MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Göttingen. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXVIII. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

Inhalt des achtundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen.

Von

O. Hölder in Göttingen.

Während nahezu alle die Functionen einer Veränderlichen, welche in der Analysis eingebürgert sind, die Eigenschaft haben, dass zwischen der unabhängigen Veränderlichen, der Function und einer Anzahl von Ableitungen der Function eine algebraische Gleichung besteht, ist für die Gammafunction eine solche Gleichung nicht möglich. Für diese Thatsache, auf welche ich durch mehrfache, vergebliche Versuche eine solche Gleichung aufzufinden geführt worden bin, soll in der vorliegenden Arbeit ein elementarer Beweis auseinandergesetzt werden. Auf die ziemlich umfangreiche, auf die Gammafunction sich beziehende Literatur wird hier nicht eingegangen werden, indem in derselben, soweit sie mir bekannt ist, die aufgeworfene Frage nirgends berührt wird. Dagegen hat, wie ich jetzt nachträglich erfahre, Herr Weierstrass schon früher in einer mündlichen Aeusserung die Aufgabe gestellt, zu beweisen, dass die Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung genüge.

Es wird im Folgenden die besprochene Eigenschaft zunächst für die logarithmische Ableitung der Gammafunction nachgewiesen werden; es lässt sich dann daraus ein Rückschluss auf die Gammafunction selbst machen. Auf diese Weise zerfällt der nachstehende Beweis von selbst in zwei Theile. Für die logarithmische Ableitung der Gammafunction wird die Bezeichnung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

gebraucht werden. Es ist also in den Gauss'schen Bezeichnungen

$$\varphi(x) = \Psi(x-1) = \frac{\Pi'(x-1)}{\Pi(x-1)}.$$

Die Function $\varphi(x)$ ist eine eindeutige, analytische Function, welche im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzt und der Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(x+1) = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$

genügt. Durch diese Eigenschaften allein ist die Function keineswegs bestimmt; es ist aber für den zu führenden Beweis nicht nöthig, mehr von der Function $\varphi(x)$ zu wissen, wesshalb dieser Beweis sich noch auf andere Functionen miterstreckt.

Erster Theil.

Vorausgesetzt, dass für die Function $\varphi(x)$ eine algebraische Differentialgleichung existirte, denke man sich diese in die Form

$$(2) \qquad G(x;\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \cdots,\, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

gebracht, wobei G eine ganze Function von

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)$$

bedeutet, deren Coefficienten rationale Functionen von x sein sollen. Die Gleichung (2) soll für alle Werthe von x bestehen; dabei wird natürlich angenommen, dass diese Gleichung nicht identisch ist, d. h. dass die Function G dann nicht gleich Null ist, wenn an Stelle von $\varphi(x),\ \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ willkürliche, von einander und von x unabhängige Veränderliche gesetzt werden. Insbesondere möge angenommen werden, dass in der Function G Glieder von der m^{ten} Dimension wirklich auftreten, dagegen Glieder von höherer Dimension nicht vorkommen, so dass also die Function G von der m^{ten} Dimension, und $m \geq 1$ ist. Der Beweis beruht nun darauf, dass die Gleichung (2) mit Hilfe der Gleichung (1) mehr und mehr reducirt werden kann, was dann schliesslich auf einen Widerspruch hinausführt.

Weil nun vermöge der gemachten Annahme die Coefficienten von G auch *gebrochene* rationale Functionen sein dürfen, kann man zugleich erreichen, dass der Coefficient eines von den Gliedern m^{ter} Dimension gleich 1 ist; es wird angenommen, dass dies in der Gleichung (2) schon der Fall ist. Aus der Gleichung (2) folgt nun

$$(3) \qquad \begin{aligned} &G(x+1;\, \varphi(x+1),\, \varphi'(x+1),\, \cdots,\, \varphi^{(n)}(x+1)) \\ &\qquad - G(x;\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \cdots,\, \varphi^{(n)}(x)) = 0. \end{aligned}$$

Wenn jetzt die Gleichung (1):

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$

$\varkappa$ mal differenzirt wird, ergiebt sich

$$(4) \qquad \varphi^{(\varkappa)}(x+1) = \frac{(-1)^{\varkappa}\, \varkappa!}{x^{\varkappa+1}} + \varphi^{(\varkappa)}(x).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (4) kann man die linke Seite von (3) auf die Form einer ganzen Function von

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)$$

bringen mit Coefficienten, die rationale Functionen von x sind, so dass man also erhält:

$$(5)\qquad H(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Wenn hierin Glieder m^{ter} Dimension vorkommen, so können diese nur hervorgegangen sein aus den Gliedern m^{ter} Dimension von (2). Das Aggregat dieser letzteren Glieder sei

$$P_{1m}(x) + R_2(x)P_{2m}(x) + \cdots + R_s(x)P_{sm}(x),$$

wobei $R_2 \ldots R_s$ rationale Functionen von x und

$$P_{1m}(x),\ P_{2m}(x),\ \ldots,\ P_{sm}(x)$$

Producte von Potenzen von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(x)$ von der m^{ten} Dimension bedeuten. Diese s Grössen $P_{\nu m}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ sollen natürlich alle von einander verschieden sein. Wenn man nun in $P_{\nu m}(x+1)$ vermöge der Gleichungen (1) und (4) für $\varphi(x+1)$, $\varphi'(x+1)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(x+1)$ die Grössen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(x)$ einführt, erhält man nur ein Glied m^{ter} Dimension, nämlich $P_{\nu m}(x)$. Es ist demnach

$$\{R_2(x+1) - R_2(x)\}\, P_{2m}(x) + \cdots + \{R_s(x+1) - R_s(x)\}\, P_{sm}(x)$$

das Aggregat der Glieder m^{ter} Dimension in der Gleichung (5).

Sollte für jeden Werth von x

$$R_\nu(x+1) - R_\nu(x) = 0$$

sein, so zieht dies sofort die Kette von Gleichungen:

$$R_\nu(x) = R_\nu(x+1) = R_\nu(x+2) = \cdots$$

nach sich, woraus, da $R_\nu(x)$ eine rationale Function bedeutet, folgt, dass diese einen constanten Werth haben muss.

Wenn also von den Functionen

$$R_2(x),\ R_3(x),\ \ldots,\ R_s(x)$$

eine nicht constant ist, so ist die Gleichung (5) keine Identität, sondern sie ist von der m^{ten} Dimension, enthält aber mindestens ein Glied m^{ter} Dimension weniger als (2).

Man kann nun die linke Seite von (5) mit einer rationalen Function von x dividiren und dadurch erreichen, dass einer der Coefficienten der Glieder m^{ter} Dimension gleich 1 wird. Dann kann die so erhaltene Gleichung wiederum in derselben Weise behandelt werden, wie dies bei der Gleichung (2) geschehen ist. Dieses Verfahren ist nöthigenfalls weiter fortzusetzen.

Jedenfalls kommt man einmal auf eine Gleichung, in welcher entweder nur ein Glied m^{ter} Dimension enthalten ist, oder je zwei

Coefficienten der Glieder m^{ter} Dimension zu einander in constantem Verhältniss stehen, so dass also diese Coefficienten selbst sämmtlich als constant angenommen werden können; denn so lange dies nicht der Fall ist, behalten die vorstehenden Betrachtungen Giltigkeit, und es kann durch das angegebene Verfahren die Zahl der Glieder m^{ter} Dimension vermindert werden.

Damit ist also bewiesen: *Wenn eine Gleichung m^{ter} Dimension besteht, so besteht auch eine ebensolche Gleichung, in welcher die Coefficienten der Glieder m^{ter} Dimension constant sind.*

Wenn aber jetzt eine Gleichung

$$G_0(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)) = 0 \tag{6}$$

von der zuletzt genannten Beschaffenheit vorliegt, so wird die aus der Entwicklung von

$$\begin{aligned} G_0(x+1;\ \varphi(x+1),\ \varphi'(x+1),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x+1)) \\ - G_0(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x)) = 0 \end{aligned}$$

hervorgehende Gleichung:

$$H_0(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x)) = 0 \tag{7}$$

von einer niedrigeren Dimension als der m^{ten}. Es ist dabei nur zu zeigen, dass diese Gleichung (7) keine Identität sein kann.

Zu diesem Zweck ist zu überlegen, was für Glieder $m - 1^{\text{ter}}$ Dimension sich auf der linken Seite der Gleichung (7) ergeben. Diese Glieder $m - 1^{\text{ter}}$ Dimension können nur entstehen aus den Gliedern $m - 1^{\text{ter}}$ Dimension von (6) oder aus dem Aggregat

$$P_{1m}(x) + c_2 P_{2m}(x) + \cdots + c_s P_{sm}(x), \tag{8}$$

welches die Glieder höchster Dimension von (6) darstellen soll. Die $c_2 \ldots c_s$ bedeuten hier constante Grössen, und die Bedeutung der $P_{1m}(x)$, $P_{2m}(x)$, ..., $P_{sm}(x)$ ist aus dem Vorstehenden bekannt; einer der Coefficienten ist wieder gleich 1 angenommen worden.

Zuvörderst mögen die aus dem Aggregat (8) hervorgehenden Glieder betrachtet werden. Es ist

$$P_{1m}(x) = (\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2} \cdots (\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r},$$

wobei die Summe

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = m$$

ist, und die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ positiv, von Null verschieden sind. Die $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_r$ sind alle von einander verschieden; eine von diesen Zahlen kann auch gleich Null sein, es ist dann $\varphi^{(0)}(x)$ durch $\varphi(x)$ zu erklären. Die Differenz $P_{1m}(x+1) - P_{1m}(x)$ liefert nun nach $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\cdots$, $\varphi^{(n)}(x)$ entwickelt unter Anderem das Glied*)

---

*) Falls $\varkappa_1 = 0$ ist, hat man nur statt $1 . 2 . 3 \ldots \varkappa_1$ in der Formel 1 einzusetzen.

$$\frac{(-1)^{\varkappa_1}\varkappa_1!\,\alpha_1}{x^{\varkappa_1+1}}\,(\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r},$$

welches von Null verschieden ist, welches aber in der Gleichung (7) noch mit andern Gliedern vereinigt erscheinen kann.

Aus dem Aggregat (8) kann nun ein weiteres, dasselbe Product

$$(9)\qquad (\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

enthaltendes Glied nur dann hervorgehen, wenn mindestens eines der Producte

$$P_{\nu m}(x)\qquad (\nu = 2, 3, \cdots, s)$$

die Form

$$P_{\nu m}(x) = (\varphi^{(l)}(x))\,(\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

besitzt. Es bedeutet hier l eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n$. Weil $P_{\nu m}(x)$ jetzt als von $P_{1m}(x)$ verschieden vorausgesetzt wird, so ist nothwendig auch l von $\varkappa_1$ verschieden, während l wohl mit einer der Zahlen $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ zusammenfallen kann. Man findet nun in der Entwicklung von

$$c_\nu P_{\nu m}(x+1) - c_\nu P_{\nu m}(x)$$

das Glied

$$\frac{const.}{x^{l+1}}\,(\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r}.$$

Solche Glieder können also, gleichfalls aus dem Aggregat (8) hervorgehend, sich mit dem zuerst erhaltenen Glied $m-1^{\text{ter}}$ Dimension vereinigen; es ist aber dann jedenfalls *l von $\varkappa_1$ verschieden.*

Man kann somit sagen, dass die sämmtlichen aus dem Aggregat (8) hervorgehenden Glieder, welche das Product (9) enthalten, vereinigt dieses Product ergeben behaftet mit dem Coefficienten

$$\sum_{\mu=0}^{n}\frac{A_\mu}{x^{\mu+1}}.$$

Dabei ist von den Constanten $A_0, A_1, \cdots, A_n$ jedenfalls

$$A_{\varkappa_1} = (-1)^{\varkappa_1}\varkappa_1!\,\alpha_1$$

von Null verschieden.

Es handelt sich jetzt darum, ob die Glieder $m-1^{\text{ter}}$ Dimension von (6) auch einen Beitrag von der Form

$$\textit{rat. Funct. von } x \textit{ mal } (\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

zur Gleichung (7) liefern. Dies ist nur dann der Fall, wenn eines der Glieder $m-1^{\text{ter}}$ Dimension von (6) selbst die Form

$$R(x)\cdot(\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}\,(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

hat, und zwar ergiebt sich dann daraus für die Gleichung (7) der Beitrag

$$\left\{R(x+1)-R(x)\right\}(\varphi^{(\varkappa_1)}(x))^{\alpha_1-1}(\varphi^{(\varkappa_2)}(x))^{\alpha_2}\cdots(\varphi^{(\varkappa_r)}(x))^{\alpha_r}.$$

Wenn man die vorstehenden Entwicklungen zusammenfasst, kommt man zu dem Resultat, dass das Product (9) in der Gleichung (7) mit dem Coefficienten

$$\sum_{\mu=0}^{n}\frac{A_\mu}{x^{\mu+1}}+R(x+1)-R(x) \tag{10}$$

behaftet auftritt, wobei $R(x)$ irgend eine rationale Function von x bedeutet. Ein Ausdruck von der Form (10) kann nicht für alle Werthe von x gleich Null sein, wenn, wie dies hier der Fall ist, eine der Constanten $A_0, A_1, \cdots, A_n$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es wird der Beweis für die letztere Behauptung nachher nachgeliefert werden. Zuvor soll der beabsichtigte Schluss zu Ende gebracht werden.

Es ist jetzt Folgendes bewiesen: *Wenn zwischen den Grössen* $\varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)$ *eine für alle Werthe von x giltige, nicht identische Gleichung besteht, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, und die von der m^{ten} Dimension ist, so besteht zwischen denselben Grössen auch eine ebensolche Gleichung $m-1^{\text{ter}}$ Dimension.* Es besteht dann auch eine Gleichung $m-2^{\text{ter}}$, $m-3^{\text{ter}}, \cdots$ Dimension. Also müsste auch eine in den $\varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)$ *lineare* Gleichung existiren. Aus der Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{n}R_\mu(x)\,\varphi^{(\mu)}(x)+R(x)=0,$$

in welcher die rationalen Functionen

$$R_\mu(x) \quad (\mu=0,1,2,\cdots,n)$$

jedenfalls nicht sämmtlich für alle Werthe von x verschwinden, könnte man dann nach dem Früheren auch auf das Bestehen einer Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{n}c_\mu\varphi^{(\mu)}(x)+\overline{R}(x)=0$$

schliessen, wobei von den Constanten $c_0, c_1, \cdots, c_n$ mindestens eine von Null verschieden ist. Daraus folgt aber

$$\sum_{\mu=0}^{n}c_\mu\left\{\varphi^{(\mu)}(x+1)-\varphi^{(\mu)}(x)\right\}+\overline{R}(x+1)-\overline{R}(x)=0,$$

welche Gleichung sofort in

$$\sum_{\mu=0}^{n} \frac{c_\mu (-1)^\mu \mu!}{x^{\mu+1}} + \overline{R}(x+1) - \overline{R}(x) = 0$$

übergeht. Die linke Seite der letzten Gleichung ist von der Form (10), desshalb ist diese Gleichung widersprechend. Es kann also die Function $\varphi(x)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen.

Der Vollständigkeit wegen ist noch der Nachweis zu führen, dass eine Gleichung von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_\mu}{x^{\mu+1}} + R(x+1) - R(x) = 0$$

unmöglich ist, wenn eine von den Constanten $A_0, A_1, \cdots, A_n$ von Null verschieden ist.

Die vorstehende Summe wird an der Stelle $x = 0$ unendlich, es verlangt also die Gleichung, dass an derselben Stelle die Differenz

$$R(x+1) - R(x)$$

unendlich wird. Die rationale Function $R(x)$ wird also an einer der beiden Stellen $x = 0$ und $x = 1$ sicher unendlich. Nun sei in der Reihe der Grössen

$$\cdots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \cdots$$

p die algebraisch grösste und q die algebraisch kleinste, für welch $R(x)$ unendlich wird; alsdann ist $p \geqq q$. Die Differenz

$$R(x+1) - R(x)$$

wird sicher an den Stellen $x = p$ und $x = q - 1$ unendlich. D. h. also diese Differenz wird an zwei von einander verschiedenen Stellen unendlich, während die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{n} \frac{A_\mu}{x^{\mu+1}}$$

nur an einer Stelle unendlich wird. Es ist somit eine Gleichung von der betrachteten Form nicht möglich.

Zweiter Theil.

Es muss jetzt gezeigt werden, dass auch die Function $\Gamma(x)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann*). Zu diesem Zweck ist die Relation

---

*) Wenn für die logarithmische Ableitung einer Function eine algebraische Differentialgleichung besteht, so ergiebt sich unmittelbar eine ebensolche Gleichung für die Function selbst. Es kann also aus der Unmöglichkeit einer algebraischen Differentialgleichung für eine bestimmte Function direct auf die Un-

(11) $$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\,\varphi(x)$$

zu benutzen, welche mehrmals differenzirt die folgenden Gleichungen ergiebt:

$$(12)\quad \begin{cases} \Gamma''(x) = \Gamma'(x)\,\varphi(x) + \Gamma(x)\,\varphi'(x) \\ \qquad\quad = \Gamma(x)\left\{(\varphi(x))^2 + \varphi'(x)\right\}, \\ \Gamma'''(x) = \Gamma'(x)\left\{(\varphi(x))^2 + \varphi'(x)\right\} + \Gamma(x)\left\{2\varphi(x)\,\varphi'(x) + \varphi''(x)\right\} \\ \qquad\quad = \Gamma(x)\left\{(\varphi(x))^3 + 3\varphi(x)\,\varphi'(x) + \varphi''(x)\right\}. \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung von $\Gamma(x)$ ist gleich dem Product von $\Gamma(x)$ in eine ganze Function von

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}(x).$$

Gesetzt nun, es sei für die Gammafunction eine algebraische Differentialgleichung vorhanden, so bringe man diese in die Form

(13) $$\mathfrak{G}(x;\ \Gamma(x),\ \Gamma'(x),\ \cdots,\ \Gamma^{(n)}(x)) = 0,$$

wobei $\mathfrak{G}$ eine ganze Function von

$$\Gamma(x),\ \Gamma'(x),\ \cdots,\ \Gamma^{(n)}(x)$$

bedeuten soll, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind. Diese Gleichung (13) kann vermittelst der Relationen (11) und (12) in eine algebraische Gleichung zwischen

$$x;\ \Gamma(x),\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(x)$$

verwandelt werden, welche in derselben Form wie (13)

(14) $$\mathfrak{H}(x;\ \Gamma(x),\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(x)) = 0$$

heissen möge. Diese Gleichung (14) kann nicht identisch sein, wenn, was selbstverständlich vorausgesetzt wird, die Gleichung (13) nicht identisch ist. Setzt man nämlich in den Gleichungen (11) und (12) statt

$$\Gamma(x),\ \Gamma'(x),\ \cdots,\ \Gamma^{(n)}(x),$$
$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(x)$$

beziehungsweise die Veränderlichen

$$y,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,$$
$$z,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1}$$

ein, so verwandeln sich diese Gleichungen in das System

---

möglichkeit einer solchen Differentialgleichung für deren logarithmische Ableitung geschlossen werden. Die umgekehrte Behauptung bedarf eines Beweises, wenn auch sehr naheliegende Ueberlegungen dieselbe plausibel erscheinen lassen. Der gegebene Beweis ist nichts Anderes als die Umbildung solcher Ueberlegungen in die Form eines zwingenden Schlusses.]

$$\begin{aligned} y_1 &= yz, \\ y_2 &= y(z^2 + z_1), \\ y_3 &= y(z^3 + 3zz_1 + z_2), \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

welches in das folgende

$$\begin{aligned} z &= \frac{y_1}{y}, \\ z_1 &= \frac{y_2}{y} - \frac{y_1^2}{y^2}, \\ z_2 &= \frac{y_3}{y} + 2\frac{y_1^3}{y^3} - 3\frac{y_2 y_1}{y^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

rückwärts aufgelöst werden kann, welches also betrachtet werden kann als ein solches, das aus $n+1$ unabhängigen Veränderlichen $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ die n abhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ bestimmt, oder aber auch als ein solches, welches aus den $n+1$ nunmehr als unabhängig betrachteten Veränderlichen $y, y_1, y_2, \cdots, y_n$ die $z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ bestimmt. Es würde somit das Verschwinden des Ausdrucks

$$\mathfrak{H}(x;\ y,\ z,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1})$$

für alle Werthe von $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ und von x auch das Verschwinden des Ausdrucks

$$\mathfrak{G}(x;\ y,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)$$

für alle Werthe von $y, y_1, \cdots, y_n$ und von x mit sich bringen.

Statt der ganzen Function

$$\mathfrak{H}(x;\ y,\ z,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1})$$

von $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ kann man sich, falls sie nicht selbst irreducibel ist, eine irreducible Function gesetzt denken, denn es muss doch einer ihrer irreduciblen Factoren

$$\mathfrak{H}_1(x;\ y,\ z,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1})$$

in eine für alle Werthe verschwindende Function von x übergehen, wenn man statt $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ die Grössen $\Gamma(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\cdots$, $\varphi^{(n-1)}(x)$ einsetzt.

Wenn von der Reducibilität, beziehungsweise Irreducibilität einer ganzen Function die Rede ist, so muss stets angegeben werden, welche ganzen Functionen als mögliche Theiler der gegebenen in Frage kommen sollen, d. h. was man von den Coefficienten der Theiler voraussetzen will. Dieser Umstand, auf welchen schon Galois aufmerksam gemacht hat, ist neuerdings besonders hervorgehoben worden von Herrn

Kronecker, welcher zur Charakterisirung des dabei jedesmal erst zu wählenden Standpunkts den Begriff des Rationalitätsbereichs eingeführt hat. Dem Kronecker'schen Rationalitätsbereich entspricht hier der Bereich der rationalen Functionen von x. Die Theiler, welche in Betracht kommen, sind ganze Functionen von $y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}$, deren Coefficienten rational zusammengesetzt sind in Beziehung auf die Veränderliche x, wobei aber hier von der Beschaffenheit der in diese rationalen Functionen von x eingehenden Constanten abgesehen wird.

Es ist zu bemerken, dass wir hierbei, wie im Folgenden,

$$x, y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}$$

als unabhängige Veränderliche betrachten.

Man wird nun ferner annehmen, dass in der Function

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \ldots, z_{n-1})$$

die Grösse y wirklich vorkommt; denn, wenn dies nicht der Fall wäre, so würde dies, weil $\mathfrak{H}_1$ nicht identisch gleich Null sein kann, das Bestehen einer algebraischen Relation zwischen

$$x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)$$

bedeuten, was nach den früheren Ausführungen unmöglich ist.

Es möge demgemäss die Function $\mathfrak{H}_1$ nach Potenzen von y geordnet werden, so dass

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{\nu=0}^{\varrho} \mathfrak{G}_\nu(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1}) \,.\, y^\nu$$

wird. Dabei ist $\varrho \geq 1$, und der Ausdruck

$$\mathfrak{G}_\varrho(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

welcher eine ganze Function ist von $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit Coefficienten, die in x rational sind, ist jedenfalls nicht identisch gleich Null. Dies gilt auch von

$$\mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

weil die Function $\mathfrak{H}_1$ irreducibel vorausgesetzt wird.*)

Die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\varrho} \mathfrak{G}_\nu(x; \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) (\Gamma(x))^\nu = 0 \tag{15}$$

soll jetzt nach x differenzirt werden; man erhält dann, wenn man gleichzeitig für $\Gamma'(x)$ wieder $\Gamma(x)\varphi(x)$ einsetzt:

---

*) Es würde sonst nur noch der Fall $\mathfrak{H}_1 = R(x) \,.\, y$ übrig bleiben, welcher eine widersprechende Gleichung für $\Gamma(x)$ nach sich ziehen würde.

$$\sum_{\nu=0}^{\varrho}\Big\{\frac{d}{dx}\mathfrak{G}_\nu(x;\,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n-1)}(x))$$
$$+\nu\varphi(x)\,\mathfrak{G}_\nu(x;\,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n-1)}(x)\Big\}\big(\Gamma(x)\big)^\nu=0,$$

welche Gleichung auf die Form

$$(16)\qquad \sum_{\nu=0}^{\varrho}\overline{\mathfrak{G}}_\nu(x;\,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x))\big(\Gamma(x)\big)^\nu=0$$

gebracht werden kann.

Der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{\varrho}\overline{\mathfrak{G}}_\nu(x;\,z,z_1,\ldots,z_n)\,y^\nu$$

möge mit

$$\mathfrak{H}_2(x;\,y,z,z_1,\ldots,z_n)$$

bezeichnet werden. Dabei bedeutet z_n eine neue, von $x, y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ unabhängige Veränderliche. Es bestehen nun die Gleichungen

$$(17)\ \overline{\mathfrak{G}}_\nu(x;\,z,z_1,\ldots,z_n)=\frac{\partial\mathfrak{G}_\nu(x;z,z_1,\ldots,z_{n-1})}{\partial x}+\sum_{\alpha=0}^{n-1}z_{\alpha+1}\frac{\partial\mathfrak{G}_\nu(x;z,z_1,\ldots,z_{n-1})}{\partial z_\alpha}$$
$$+\nu z\,\mathfrak{G}_\nu(x;\,z,z_1,\ldots,z_{n-1})$$
$$(\nu=0,1,2,\ldots,\varrho,\quad z_0=z).$$

Von diesen Gleichungen fasse man zunächst die letzte ins Auge, für $\nu=\varrho$. Dieselbe lehrt, dass man die Function

$$\overline{\mathfrak{G}}_\varrho(x;\,z,z_1,\ldots,z_n)$$

aus zwei Theilen zusammensetzen kann, von welchen der zweite:

$$\varrho z\,\mathfrak{G}_\varrho(x;\,z,z_1,\ldots,z_{n-1})$$

jedenfalls nicht identisch gleich Null ist und in $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ eine Dimension hat, die um eine Einheit höher ist als die von

$$\mathfrak{G}_\varrho(x;\,z,z_1,\ldots,z_{n-1}),$$

während der erste Theil in $z, z_1, \ldots, z_n$ von nicht höherer Dimension ist als $\mathfrak{G}_\varrho$. Somit ist auch

$$\overline{\mathfrak{G}}_\varrho(x;\,z,z_1,\ldots z_n)$$

nicht identisch gleich Null, und die Dimension dieser Function in $z, z_1, \ldots, z_n$ ist um eins grösser als die von $\mathfrak{G}_\varrho(x;\,z,z_1,\ldots,z_{n-1})$. Es ist also auch

$$\mathfrak{H}_2(x;\,y,z,z_1,\ldots,z_n)$$

nicht identisch gleich Null, und zwar ist der Grad dieser Function in y genau gleich ϱ.

Die linken Seiten der Gleichungen (15) und (16) betrachte man jetzt als ganze Functionen von $\Gamma(x)$ allein. Auf diese beiden Functionen wende man das Verfahren an, welches dazu dient, den grössten gemeinsamen Theiler zu finden. Indem zwischen x, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$ eine algebraische Gleichung nicht bestehen kann, hat man dabei ebenso zu operiren, als ob an Stelle dieser Grössen willkürliche, von einander unabhängige Veränderliche ständen. Da nun die Gleichungen (15) und (16) einander nicht widersprechen dürfen, muss der beim Verfahren des gemeinsamen Theilers übrig bleibende Rest für alle Werthe von x verschwinden. Dies kann, weil dieser Rest aus $x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ sich rational zusammensetzt, nur dadurch geschehen, dass derselbe *formell* gleich Null wird. Mit andern Worten: es haben auch die Functionen

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \ldots, z_n)$$

einen gemeinsamen Theiler. Zunächst ist dies so zu verstehen, dass der Theiler, sowie die Quotienten, welche durch Division von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ durch diesen Theiler entstehen, vorausgesetzt werden als ganze Functionen von y, deren Coefficienten die willkürlichen Veränderlichen $x, z, z_1, \ldots, z_n$ rational enthalten. Die Function $\mathfrak{H}_1$ ist irreducibel, auch als Function von y, es wird also $\mathfrak{H}_1$ die Function $\mathfrak{H}_2$ in dem eben angegebenen Sinne theilen. Weil aber $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ beide vom ϱ^{ten} Grad in y sind, kann der Quotient

$$\frac{\mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \ldots, z_n)}{\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

die Grösse y nicht enthalten, er ist eine rationale Function von $x, z, z_1, \ldots, z_n$ allein. Es besteht also die Gleichung

$$(18) \qquad \begin{aligned} &g(x; z, z_1, \ldots, z_n)\, \mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \ldots, z_n) \\ &= g_1(x; z, z_1, \ldots, z_n)\, \mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}), \end{aligned}$$

in welcher g und g_1 *ganze* Functionen von $z, z_1, \ldots, z_n$ bedeuten mit Coefficienten, die rational in x sind. Weil nun $\mathfrak{H}_1$ irreducibel ist, und diese Function die Variable y wirklich enthält, so kann g mit $\mathfrak{H}_1$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Dabei handelt es sich jetzt wieder beständig um ganze Functionen von $y, z, z_1, \ldots, z_n$. Es folgt somit aus der Gleichung (18), dass g ein Factor von g_1 sein muss. Es besteht also eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \ldots, z_n) = \mathfrak{Q}(x; z, z_1, \ldots, z_n)\, \mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

wobei $\mathfrak{Q}$ eine ganze Function von $z, z_1, \ldots, z_n$ vorstellt.

Die letzte Gleichung ist äquivalent mit der Reihe von Gleichungen:

$$(19) \qquad \overline{\mathfrak{G}}_\nu(x; z, z_1, \ldots, z_n) = \mathfrak{Q}(x; z, z_1, \ldots, z_n)\, \mathfrak{G}_\nu(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1})$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Die Function $\mathfrak{Q}$ ist selbstverständlich nicht identisch gleich Null; die letzte von den Gleichungen (19):

$$\overline{\mathfrak{G}}_\varrho(x; z, z_1, \ldots, z_n) = \mathfrak{Q}(x; z, z_1, \ldots, z_n)\, \mathfrak{G}_\varrho(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1})$$

zeigt aber, dass $\mathfrak{Q}$ in $z, z_1, \ldots, z_n$ genau von der ersten Dimension sein muss; denn es wurde die Dimension von $\overline{\mathfrak{G}}_\varrho$ um eine Einheit grösser gefunden als die von $\mathfrak{G}_\varrho$. Aus der ersten von den Gleichungen (19):

$$\overline{\mathfrak{G}}_0(x; z, z_1, \ldots, z_n) = \mathfrak{Q}(x; z, z_1, \ldots, z_n)\, \mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1})$$

würde nun, da $\mathfrak{G}_0$ (s. o.) nicht identisch verschwindet, folgen, dass die Dimension von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ grösser sein müsste als die von $\mathfrak{G}_0$. Dies widerspricht aber der ersten von den Gleichungen (17):

$$\overline{\mathfrak{G}}_0(x; z, z_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial \mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial x} + \sum_{\alpha=0}^{n-1} z_{\alpha+1} \frac{\partial \mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial z_\alpha}.$$

Damit ist also die Voraussetzung, dass die Gammafunction einer algebraischen Differentialgleichung genüge, auf einen Widerspruch zurückgeführt.

Göttingen, den 26. Juni 1886.

Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Von

W. Voigt in Göttingen.*)

(Mit einer Figurentafel.)

Obgleich durch Herrn von Helmholtz und Kirchhoff eine Methode gegeben ist, für den Fall einer ebenen Flüssigkeitsbewegung Probleme zu lösen, bei welchen die Flüssigkeit eine theilweise freie Oberfläche besitzt, sind doch erst wenige Beispiele der Art durchgeführt; es hat daher die folgende Mittheilung, welche eine Anwendung der Kirchhoff'schen Methode auf den Zusammenstoss von mehreren Flüssigkeitsstrahlen bringt, vielleicht einiges Interesse.

Bezeichen φ_1, φ_2 für zwei Flüssigkeiten die Geschwindigkeitspotentiale stationärer Strömungen, so gelten bekanntlich bei ebenen Bewegungen innerhalb der Flüssigkeiten die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{p_1}{\varepsilon_1} = C_1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2\right), \quad \frac{p_2}{\varepsilon_2} = C_2 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2\right),$$

an den freien Oberflächen:

$$\text{(b)} \qquad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}} = 0, \quad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2}} = 0, \quad \overline{p_1} = c_1, \quad \overline{p_2} = c_2,$$

worin p_1, p_2 die Drucke, ε_1, ε_2 die constanten Dichtigkeiten, C_1, C_2 und c_1, c_2 Constanten bezeichnen.

Längs der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten, welche aus Stromcurven gebildet wird, die wir die *singulären* nennen wollen, gilt:

$$\text{(c)} \qquad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}} = \overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}} = 0, \quad \overline{p_1} = \overline{p_2}.$$

Wir wollen den Fall betrachten, dass zwei Strahlen aus dem Unendlichen kommen und im Endlichen zusammentreffen; die Geschwindig-

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1885, Nr. 9.

keiten seien im Unendlichen in den Querschnitten constant G_1 und G_2, im Endlichen variabel V_1 und V_2, an den freien Oberflächen sei der Druck gleich Null; dann giebt die Grenzbedingung $\overline{p}_1 = \overline{p}_2$ die Relation:

$$\varepsilon_1 (G_1^2 - \overline{V}_1^2) = \varepsilon_2 (G_2^2 - \overline{V}_2^2)$$

oder

$$(c') \qquad \varepsilon_1 G_1^2 - \varepsilon_2 G_2^2 = \varepsilon_1 \overline{V}_1^2 - \varepsilon_2 \overline{V}_2^2 .$$

Diese Formel zeigt, *dass wenn im Unendlichen die lebendigen Kräfte der Volumeneinheit für beide Strahlen gleich sind, dieselben auch in jedem Punkte der gemeinsamen Grenze gleich sein müssen.*

In diesem Falle kann man also die Bewegungen in beiden Strahlen durch das eine modificirte Geschwindigkeitspotential

$$\Phi$$

umfassen, welches im Gebiet der ersten Flüssigkeit gleich $\sqrt{\varepsilon_1}\,\varphi_1$, in dem der zweiten gleich $\sqrt{\varepsilon_2}\,\varphi_2$ ist und der Bedingung zu genügen hat, dass überall:

$$(1) \qquad \Delta\Phi = 0,$$

in den freien Grenzen aber:

$$(2) \qquad \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial n}} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}\right)^2 + \left(\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}\right)^2 = G^2$$

sein muss; hierbei ist $\varepsilon_1 G_1^2 = \varepsilon_2 G_2^2 = G^2$ gesetzt.

Der Bequemlichkeit wegen wollen wir weiterhin Φ kurz das Geschwindigkeitspotential, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ die Geschwindigkeitscomponenten nennen, obgleich sie sich davon noch durch den Factor $\sqrt{\varepsilon}$ unterscheiden.

Ein specieller, in diesem allgemeinen enthaltener Fall ist der, dass zwei Strahlen *derselben* Flüssigkeit, welche im Unendlichen die gleiche Geschwindigkeit besitzen, zusammenstossen.

Nach einem Grundsatz der Hydrodynamik bleiben Flüssigkeitstheilchen, die sich einmal in der Oberfläche befinden, immer in derselben. Hiernach können die an der Oberfläche beider Strahlen befindlichen nie zu inneren werden, die beiden Strahlen können also nie zu *einem* zusammenfliessen, sondern müssen, indem sie sich theilen, wiederum *zwei* in verschiedenen Richtungen auseinanderfliessende ergeben, von denen der eine in den Raum zwischen den beiden Stossrichtungen, der andere in den gegenüberliegenden fällt. Dieselben vier Stromcurven, welche die Grenzen der stossenden Strahlen bilden, begrenzen in anderer Combination auch die resultirenden Strahlen. Von den im Innern der beiden stossenden Strahlen liegenden Stromcurven muss je eine sich in zwei Zweige theilen, welche nach dem

Zusammenstoss die Grenze zwischen der ursprünglich den verschiedenen Strahlen angehörigen Flüssigkeit bilden. Wir nennen sie, wie schon festgesetzt, die *singulären* Stromcurven. An der Stelle der Verzweigung dieser singulären Stromcurven muss die Geschwindigkeit verschwinden, und daher muss diese Stelle für die singulären Stromcurven beider Flüssigkeiten nach Gleichung (c') gemeinsam sein. Wir nennen diese Stelle, in welcher die Geschwindigkeit verschwindet und die singulären Stromcurven sich verzweigen, das *Stosscentrum*.

Die obige Betrachtung lässt sich sogleich auf das Problem des Zusammenstosses beliebig vieler aus dem Unendlichen kommenden Flüssigkeitsstrahlen erweitern. Besitzen sie im Unendlichen gleiche lebendige Kraft der Volumeneinheit, so auch überall längs der Curven, in welchen sie sich berühren, und man kann daher in diesem Falle auch für sie ein *gemeinsames* Geschwindigkeitspotential Φ einführen, welches durch die Bedingungen (1) und (2) bestimmt ist. Wir wollen das Problem zunächst in dieser Allgemeinheit in Angriff nehmen und nur die eine Beschränkung einführen, dass die von der Flüssigkeit bedeckte Fläche eine einfach zusammenhängende ist. Damit ist übrigens der Fall nicht ausgeschlossen, dass sich die Grenzen verschiedener Strahlen schneiden, denn man kann in solchen Fällen die Dicke der Flüssigkeit senkrecht zur xy-Ebene unendlich gering und die Strahlen an einander vorbeigeführt denken.

Sei

$$\Omega = \Phi + i\Psi$$

eine Function von $z = x + iy$, so giebt bekannntlich

$$\Psi = \text{Const.}$$

das System der Strömungscurven, welche dem Geschwindigkeitspotential Φ entsprechen.

Es ist dann auch:

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}.$$

„Nun setzen wir*):

$$(5) \qquad \frac{dz}{d\Omega} = \zeta = \xi + i\eta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

und betrachten ξ und η als die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, die wir die ζ-Ebene nennen werden; die ξ-Axe soll dabei parallel der x-Axe, die η-Axe parallel der y-Axe gewählt sein. Die Vergleichung der Gleichungen (4) und (5) zeigt dann, dass, wenn man von dem Punkte $\zeta = 0$ nach dem Punkte ζ

*) Kirchhoff, Mechanik p. 291, 1876.

eine gerade Linie zieht, die Länge dieser, also ϱ, das Reciproke der Geschwindigkeit und ihre Richtung die Richtung der Bewegung in dem Punkte z ist".

Da in unserm Problem n Strahlen mit gleichen (reducirten) Geschwindigkeiten aus dem Unendlichen kommen und in's Unendliche gehen, so kann derselbe Werth Ω an n verschiedenen Stellen der z-Ebene stattfinden mit Ausnahme derjenigen Werthe, welche der Geschwindigkeit Null entsprechen und welche an den oben definirten „Stosscentren" eintreten.

Sind n stossende Strahlen vorhanden, so gehen nach dem Zusammenstoss auch n Strahlen in's Unendliche hinaus. Die Anzahl der Stosscentren ist hierbei, wie man leicht durch die Anschauung erkennt, im Maximo $(n-1)$; in diesem Falle sind alle Stosscentren auf der Grenze von nur je zwei Strahlen gelegen. Hängen in einem Stosscentrum $(h+1)$ Strahlen zusammen, so kann man dasselbe als ein h-faches durch Zusammenrücken von h ursprünglich getrennten einfachen Stosscentren entstandenes betrachten. Der Grenzfall ist der nur *eines* $(n-1)$ fachen Stosscentrums.

Denken wir also die Werthe Ω, welche allen Punkten im Innern der Flüssigkeit entsprechen, auf einer Ω-Ebene ausgebreitet, so wird dieselbe n-blättrig zu wählen sein und innerhalb des Bereichs der Flüssigkeit in den $(n-1)$ Punkten, welche den Stosscentren entsprechen und sämmtlich im Endlichen liegen, zusammenhängen. Das letztere Resultat liefert auch direct der von Riemann gegebene Satz*): Ist die Anzahl der Umdrehungen, welche die Grenze eines einfach zusammenhängenden endlichen Bereichs macht, gleich n, so ist die Anzahl der auf ihm liegenden einfachen Verzweigungspunkte gleich $(n-1)$.

Die freien Grenzen des Bereichs der Flüssigkeit sind in der z-Ebene Stromcurven, müssen also in der Ω-Ebene Parallele zur Φ-Axe sein. Wir nehmen an, dass sie im ersten Blatt durch

$$\Psi = +a_1 \quad \Psi = +b_1$$

im zweiten durch

$$\Psi = +a_2 \quad \Psi = +b_2$$

(6) im dritten durch

$$\Psi = +a_3 \quad \Psi = +b_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

im $n$ten durch

$$\Psi = +a_n \quad \Psi = +b_n$$

gegeben seien; Punkte im Innern der Flüssigkeit entsprechen dabei Punkten *zwischen* diesen Geraden, das Gebiet der Flüssigkeit ist also der zwischen ihnen liegende n-fache Streifen. Damit derselbe zusammenhänge muss sein:

*) Riemann's Werke, Edit. H. Weber p. 106, Leipzig 1876.

$$a_1 > b_1, a_2 > b_2, \ldots, a_n > b_n$$

und auch

$$a_2 > b_1, a_3 > b_2, \ldots, a_1 > b_n.$$

Da in den freien Grenzen ferner die constante (reducirte) Geschwindigkeit G stattfindet, so müssen sie sich in der ζ-Ebene nach dem Obigen als Theile eines Kreises vom Radius $R = \frac{1}{G}$ um den Coordinatenanfang darstellen; Punkte im Innern der Flüssigkeit entsprechen dabei Punkten *ausserhalb* des Kreises, da die Geschwindigkeit in der Grenze die grösste sein muss, das ganze Gebiet der Flüssigkeit also der ganzen Umgebung des Kreises.

Dabei ist aber Folgendes hervorzuheben.

Die Radienvectoren von 0 nach ζ geben durch ihre Richtung an einer Stelle $\xi = R \cos \vartheta$, $\eta = R \sin \vartheta$ die Richtung der Bewegung, welche an der durch $\zeta = \xi + i\eta$ abgebildeten Stelle z stattfindet. Die sämmtlichen beim Umlaufen der gesammten Flüssigkeit in den Grenzen anzutreffenden Bewegungsrichtungen müssen also beim Umlaufen des Kreises vom Radius R (das beiläufig in entgegengesetzter Richtung geschieht, da das *Innere* der Flüssigkeit der *Umgebung* des Kreises entspricht) durch die Richtungen der Radien wiedergegeben werden. Ist die Anzahl aller sich in's Unendliche erstreckenden (sowohl kommenden als gehenden) Strahlen gleich m, so ist die Summe der bei der Umlaufung angetroffenen Richtungsänderungen der Flüssigkeitsbewegung gleich

$$(m - 2)\pi$$

oder, da, wie oben gezeigt, m eine gerade Zahl $= 2n$ sein muss, weil ebenso viele Strahlen aus Unendlich kommen, wie nach Unendlich gehen müssen,

$$= 2(n-1)\pi.$$

Ebenso gross muss also auch die Summe der Richtungsänderungen bei Umlaufung des Kreises in der ζ-Ebene sein, d. h. die ζ-Ebene muss $(n - 1)$ Blätter besitzen, welche ausserhalb des Kreises vom Radius R in $n - 2$ Punkten zusammenhängen, sodass ein Umlauf längs des Kreises durch alle $(n - 1)$ Blätter führt. Dies folgt aus dem oben citirten Riemann'schen Satz sogleich, wenn man nach der Methode der reciproken Radien die *Umgebung* des Kreises vom Radius R auf das Innere einer Kreisfläche vom Radius $\frac{1}{R}$ abbildet.

Wir betrachten die Abbildung des oben definirten n-fachen Streifens in der Ω-Ebene auf dieser $(n - 1)$ blättrigen ζ-Ebene und wollen sie vermitteln durch die Abbildung auf einer *ein*blättrigen ζ'-Ebene.

In dieser soll der n-fache Streifen auf einem Kreis vom Radius R'

so wiedergegeben werden, dass im ersten Blatt der Ω-Ebene der Punkt $\Phi = +\infty$ entspricht dem Punkt $\zeta' = R'$ der ζ-Ebene,
ebenso $\Phi = -\infty$ $\quad \zeta' = R' e^{i\alpha_1'}$
im zweiten Blatte analog

$$\Phi = +\infty \text{ entspricht } \zeta' = R' e^{i\beta_1'}$$
$$\Phi = -\infty \qquad \zeta' = R' e^{i\alpha_2'}$$

im dritten Blatte

$$\Phi = +\infty \qquad \zeta' = R' e^{i\beta_2'}$$
$$\Phi = -\infty \qquad \zeta' = R' e^{i\alpha_3'}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

im $n$ten Blatte

$$\Phi = +\infty \qquad \zeta' = R' e^{i\beta'_{n-1}}$$
$$\Phi = -\infty \qquad \zeta' = R' e^{i\alpha'_n},$$

wobei

$$0 < \alpha_1' < \beta_1' < \alpha_2' < \beta_2' < \cdots < \alpha_n' < \beta_n' \quad \text{und} \quad \beta_n' = 2\pi \text{ ist.}$$

Es muss also längs des Kreises vom Radius R' sein:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \Omega &= ia_1 && \text{für } 0 < \vartheta' < \alpha_1' \\ \Omega &= ib_1 && \;\;\text{,,}\;\; \alpha_1' < \vartheta' < \beta_1' \\ \Omega &= ia_2 && \;\;\text{,,}\;\; \beta_1' < \vartheta' < \alpha_2' \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ \Omega &= ia_n && \;\;\text{,,}\;\; \beta'_{n-1} < \vartheta' < \alpha'_n \\ \Omega &= ib_n && \;\;\text{,,}\;\; \alpha'_n < \vartheta' < \beta'_n. \end{aligned}$$

Diesen Bedingungen wird genügt durch die Function:

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{i}{2\pi}\left[(a_1-b_1)\alpha_1' + (b_1-a_2)\beta_1' + (a_2-b_2)\alpha_2' + \cdots + (a_n-b_n)\alpha_n' + 2\pi b_n\right] \\ (8)\qquad + \frac{1}{\pi}\Big[(a_1-b_1)\,l\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\alpha_1'}\Big) + (b_1-a_2)\,l\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\beta_1'}\Big) \\ + \cdots + (b_n-a_1)\,l\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Da bei der conformen Abbildung je ein innerer und ein Randpunkt sich beliebig entsprechend gewählt werden kann und letzterer bereits durch die Annahme, dass dem Punkt $\Phi = +\infty$ im ersten Blatt der Ω-Ebene $\zeta' = +R'$ entspricht, bestimmt ist, so kann nur noch über einen innern Punkt verfügt werden. Dem scheint zu widersprechen, dass bei willkürlich gewählten a_n, b_n noch $(2n-1)$ Grössen α_n, β_n disponibel sind. Indess ist zu beachten, dass die Verfügung über die a_n und b_n keineswegs den abzubildenden n-fachen Streifen in der Ω-Ebene vollständig bestimmt, sondern dazu noch die

Angabe der auf ihm liegenden $(n-1)$ Verzweigungspunkte nach Ort und Art erforderlich ist.

Die Bilder der Verzweigungspunkte in der ζ'-Ebene sind gegeben durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'}=0$$

oder

$$0=\frac{(a_1-b_1)e^{-i\alpha_1'}}{1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\alpha_1'}}+\frac{(b_1-a_2)e^{-i\beta_1'}}{1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\beta_1'}}+\cdots \tag{9}$$

Die Gleichung ist vom $(2n-2)$ten Grade, da der Coefficient von $(\zeta')^{2n-1}$ identisch verschwindet. $(n-1)$ Wurzeln müssen Punkte innerhalb des Kreises vom Radius R' ergeben, da nach dem Riemann'schen Satz $(n-1)$ Verzweigungspunkte im Bereich der Flüssigkeit liegen müssen*).

---

*) Man kann aber diesen Nachweis hier einfach direct führen und somit sich der Anwendung jenes Satzes vollständig entschlagen.

Dazu bedenke man zunächst, dast

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'}=\Omega'$$

gesetzt eine einwerthige Function von ζ' ist.

Ω' wird unendlich in den $2n$ Punkten $R'e^{i\alpha_1'}$, $R'e^{i\beta_1'}$, ... es muss also ebenso oft verschwinden. Zwei Nullpunkte fallen in's Unendliche, die übrigen im Allgemeinen in's Endliche. Wendet man den Satz, dass das Randintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d(l\Omega')$$

über eine beliebige geschlossene Curve ausgedehnt die Anzahl der umschlossenen Nullpunkte weniger der der umschlossenen Unendlichkeitspunkte giebt, auf einen Kreis an, der um den Punkt $\zeta'=0$ mit einem unendlich wenig grösseren oder kleineren Radius als R' beschrieben ist, so kann man die Anzahl der auf der Kreisfläche liegenden Nullpunkte von Ω' bestimmen.

Hierzu bemerke man, dass, weil die Grössen a_n, b_n einen zusammenhängenden Streifen in der Ω-Ebene bestimmen sollen,

$$\begin{aligned} a_1-b_1&=+A_1', & a_2-b_2&=+A_2', \ldots \\ -(b_1-a_2)&=+B_1', & -(b_2-a_3)&=+B_2', \ldots \end{aligned}$$

sämmtlich positive Grössen sein müssen.

Die Gleichung $\Omega'=0$ kann also geschrieben werden:

$$0=\frac{A_1'}{R'e^{i\alpha_1'}-\zeta'}-\frac{B_1'}{R'e^{i\beta_1'}-\zeta'}\pm\cdots=\Phi'+i\Psi'$$

und stellt in ihrem reellen und imaginären Theil Φ' und Ψ' — mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen — die ξ- und η-Componente der Attraction dar, welche an der Stelle ζ' stattfinden würde, wenn in den Punkten $R'e^{i\alpha_1'}$, $R'e^{i\beta_1'}$, ...

Ihre Lage wird bei unserm Problem kaum direct gegeben, sondern nur durch Verfügungen über Breite, Richtung und Lage der Strahlen bestimmt sein. Sie ist bestimmt, wenn $(2n-2)$ reelle Relationen zwischen den a_n, b_n und α_n, β_n gegeben sind; da $(2n-1)$ α_n, β_n verfügbar sind, so bleibt, wie auch nöthig, bei festgesetzten a_n, b_n, noch eine übrig, um einen innern Punkt in den beiden auf einander abgebildeten Flächen sich entsprechen zu lassen*). Wir wollen auf diese Verfügungen erst eingehen, wenn wir allgemein den Weg der Lösung vollständig angegeben haben.

Um die gewonnene Abbildung des $n$fachen Streifens auf dem Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene für unser hydrodynamisches Problem zu verwerthen, verfahren wir folgendermassen.

Wir bilden zunächst den Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene so in einer $(n-1)$-blättrigen ζ''-Ebene auf einen Kreis vom beliebigen Radius R'' um den Coordinatenanfang ab, dass die Punkte des ersteren, welche durch die Wurzeln der Gleichung (9) gegeben sind (d. h. die Bilder der Verzweigungspunkte in der Ω-Ebene) in letzterem übereinander und zwar in den Mittelpunkt fallen. Dass dies *allgemein*

---

die Massen A_1, $-B_1$, A_2, $-B_2$, ... angebracht wären und nach dem Gesetz der (-1)ten Potenz der Entfernung wirkten. Das Integral

$$\int d(l\Omega')$$

wird hiernach

$$=\int d\left[\frac{1}{2}l(\Phi'^2+\Psi'^2)+i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\Phi'}{\Psi'}\right)\right],$$

und wenn man berücksichtigt, dass $\Phi'^2+\Psi'^2$ das Quadrat der resultirenden Kraft, $\frac{\Psi'}{\Phi'}$ die negative Tangente des Winkels zwischen ihrer Richtung und der ξ-Axe ist, so erkennt man ohne alle Rechnung, dass der reelle Theil des Integrales über eine beliebige geschlossene Curve genommen verschwindet, der imaginäre die Summe aller Richtungsänderungen der resultirenden Kraft bei der Umlaufung der Curve ergiebt.

Für Punkte, welche einem Attractionscentrum unendlich nahe liegen, ist die Kraft nach diesem Centrum hin oder von ihm hinweg gerichtet je nach dem Vorzeichen der daselbst befindlichen Masse. Daher kann man für einen Kreis um den Punkt $\zeta'=0$, der unendlich nahe dem das Flüssigkeitsgebiet begrenzenden liegt, sogleich durch die Anschauung die Grösse der obigen Richtungsänderung finden. Auf der Grenze selbst können keine Nullpunkte liegen, da in der Grenze die Geschwindigkeit gleich G, in den Verzweigungspunkten gleich Null ist.

Liegt der Kreis innerhalb desjenigen vom Radius R' so findet sich der Werth der Richtungsänderung $-(n-1)2\pi$, liegt er ausserhalb $+(n+1)2\pi$; im ersteren Falle umschliesst er nur die Nullpunkte im Innern des Kreises R'; im letzteren Falle auch die $2n$ Unendlichkeitspunkte; beides ergiebt übereinstimmend, dass sich insgesammt $(n-1)$ Nullpunkte auf der Fläche, also auch $(n-1)$ ausserhalb befinden.

*) In der Festsetzung der a_n, b_n liegt nämlich bereits die Bestimmung der Φ Axe in der Ω-Ebene.

möglich ist erkennt man nach einer mündlichen Bemerkung meines verehrten Freundes H. Weber in Marburg leicht in folgender Weise.

Allgemein kann man ausser einem Randpunkt nur *einen* innern Punkt bei der Abbildung sich entsprechen lassen. Geschieht die Abbildung des einfach zusammenhängenden Bereiches auf einer $(n-1)$ blättrigen Ebene, so sind die $(n-2)$ im Innern liegenden Verzweigungspunkte verfügbar und man kann durch ihre Wahl weitere $(n-2)$ innere Punkte sich entsprechen lassen; es können demnach im Ganzen die Bilder von $(n-1)$ Punkten des einblättrigen Kreises beliebig gewählt werden.

Schliesslich bilden wir durch die Substitution

$$\zeta'' = \frac{1}{\zeta}$$

den Kreis vom Radius R'' in der $(n-1)$ blättrigen ζ''-Ebene ab auf der Umgebung des Kreises vom Radius $R = \frac{1}{R''}$ in der gleichfalls $(n-1)$ blättrigen ζ-Ebene, dass das Bild des Centrums ins Unendliche fällt. Dann ist zugleich der $n$fache Streifen in der Ω-Ebene ebenda so abgebildet, dass die Bilder seiner Verzweigungspunkte, d. h. der Stosscentren, im Unendlichen, die seiner Grenzen auf der Peripherie des Kreises vom Radius R liegen.

Die gewonnene Relation zwischen Ω und ζ giebt dann für jedes System der darin vorkommenden Constanten a_n, b_n und α_n, β_n die Lösung eines Problemes des Stosses für n Flüssigkeitsstrahlen. Nach (5) erhält man durch:

$$z = \int \zeta \, d\Omega + \text{Const.} \tag{10}$$

zu jedem Punkt ζ oder Ω einen entsprechenden z der xy-Ebene; der Grenze des Streifens in der Ω-Ebene und zugleich dem Kreis vom Radius R in der ζ-Ebene entspricht die freie Grenze der Flüssigkeit, ein negativer Umlauf des Kreises ergiebt einen positiven der Grenzen der Flüssigkeit. Wird auf dieser Kreislinie an den Punkten

$$-\vartheta = 0,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2, \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_n$$

(wobei $\beta_n = 2\pi(n-1)$ ist) Ω abwechselnd gleich $+\infty$ und $-\infty$, so geben

$$(\alpha_1 - 0),\ (\beta_1 - \alpha_1),\ (\alpha_2 - \beta_1), \ldots,\ (\beta_n - \alpha_n)$$

die Richtungsänderungen der Strömung längs der $2n$ die freie Grenze der Flüssigkeit bildenden Stromfäden von Unendlichen aus bis wieder in's Unendliche.

$$q = 0,\ \pi - \alpha_1,\ 2\pi - \beta_1,\ 3\pi - \alpha_2, \ldots,\ (2n-1)\pi - \alpha_n,$$

sind daher die Winkel der x-Axe gegen die Radienvectoren nach den unendlich fernen Theilen der Strahlen oder gegen die Richtungen der Strahlen im Unendlichen selbst, diese Richtungen nicht im Sinne der

Strömung, sondern stets in's Unendliche hinaus positiv gerechnet. Ist eine der Differenzen $\alpha_h - \beta_{h-1}$ oder $\beta_h - \alpha_h$ grösser als π so schneidet das entsprechende Stück der Begrenzung sich selbst.

Fig. 1 giebt den Zusammenhang zwischen diesen Richtungen für eine zweiblättrige ζ-Ebene, also für drei zusammenstossende Strahlen das untere Blatt ist schraffirt. Fig. 2 zeigt wie etwa bei gegebenen Constanten diese Flüssigkeitsbewegung verlaufen kann. Die punktirten Linien deuten die singulären Stromcurven an, ihre Schnittpunkte die Stosscentren. Die Gleichungen der singulären Stromcurven erhält man, wenn man in der Formel (10), in welcher $\Omega = \Phi + i\Psi$ ist, dem Ψ successive diejenigen constanten Werthe beilegt, welche den Wurzeln der Gleichung (9)

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = 0$$

entsprechen; die Oerter der Stosscentren geben sich, wenn man über Φ und Ψ demgemäss verfügt.

Wir wollen den vorstehend beschriebenen Weg der Lösung in dem einfachen, immer noch sehr allgemeinen Falle wirklich gehen, dass alle $(n-1)$ Stosscentren zusammenfallen, d. h. die $(n-1)$ Verzweigungspunkte auf dem Kreis vom Radius R' *identisch* werden. Da dieser $(n-1)$ fache Verzweigungspunkt in den Coordinatenanfang von ζ' gebracht werden soll und dies nur auf eine Weise möglich ist, kann man ihn ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich bei der ersten Abbildung dahin fallen lassen. Hierzu ist erforderlich, dass die Gleichung (9) die $(n-1)$ fache Wurzel $\zeta' = 0$ besitzt und dies findet statt, wenn die $(n-1)$ Bedingungen erfüllt sind:

$$(11) \qquad 0 = (a_1 - b_1)e^{-ih\alpha_1'} + (b_1 - a_2)e^{-ih\beta_1'} + \cdots$$

für

$$h = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Dies giebt die $(2n-2)$ reellen Gleichungen*):

$$(12) \qquad \begin{aligned} 0 &= (a_1 - b_1)\cos h\alpha_1' + \cdots \\ 0 &= (a_1 - b_1)\sin h\alpha_1' + \cdots \end{aligned}$$

für

$$h = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Soll dieser $(n-1)$ fache Windungspunkt $\Omega = 0$ entsprechen, was wegen der Willkürlichkeit des Coordinatenanfangs keine Beschränkung ist, so ist noch erforderlich, *dass die b_h sämmtlich negativ* sind und gilt:

$$(13) \qquad 0 = (a_1 - b_1)\alpha_1' + (b_1 - a_2)\beta_1' + \cdots.$$

---

*) Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, dass bei Erfüllung dieser Relationen die übrigen $(n-1)$ Verzweigungspunkte sämmtlich in's Unendliche fallen.

Es sind also die $(2n-1)$ Grössen α_h', β_h' durch diese $(2n-1)$ Gleichungen bestimmt, wenn die a_h, b_h gegeben sind.

Nun werde gesetzt:

$$\zeta' = (\zeta'')^{\frac{1}{n-1}}$$

und

$$\zeta'' = \frac{1}{\zeta}, \quad \text{also} \quad \zeta' = \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

so wird:

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\left[(a_1 - b_1)\, l\left(1 - \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \frac{e^{-i\alpha_1'}}{R'}\right)\right.$$

$$\left. + (b_1 - a_2)\, l\left(1 - \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \frac{e^{-i\beta_1'}}{R'}\right) + \cdots\right].$$

Hierin führen wir noch ein:

$$\alpha_h' = \frac{\alpha_h}{n-1} \quad \beta_h' = \frac{\beta_h}{n-1} \quad R' = \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

und vertauschen die b_h mit $-b_h$, so erhalten wir:

$$(14) \qquad \Omega = \frac{1}{\pi}\left\{(a_1 + b_1)\, l\left[1 \mp \left(\frac{Re^{-i\alpha_1}}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]\right.$$

$$\left. - (b_1 + a_2)\, l\left[1 - \left(\frac{Re^{-i\beta_1}}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right] \pm \cdots - (b_n + a_1)\, l\left[1 - \left(\frac{R}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]\right\}$$

als diejenige Function, welche in dem behandelten Specialfall das Problem löst, wenn man dazu nimmt die Nebenbedingungen:

$$R = \frac{1}{G},$$

$$(15) \qquad \begin{aligned} 0 &= (a_1 + b_1)\alpha_1 - (b_1 + a_2)\beta_1 + \cdots - b_n 2\pi \\ 0 &= (a_1 + b_1)\cos\frac{h\alpha_1}{n-1} - (b_1 + a_2)\cos\frac{h\beta_1}{n-1} + \cdots \\ &\qquad + (a_n + b_n)\cos\frac{h\alpha_n}{n-1} - (b_n + a_1) \\ 0 &= (a_1 + b_1)\sin\frac{h\alpha_1}{n-1} - (b_1 + a_2)\sin\frac{h\beta_1}{n-1} + \cdots \\ &\qquad + (a_n + b_n)\sin\frac{h\alpha_n}{n-1}, \end{aligned}$$

für

$$h = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Stossen nur 2 Strahlen zusammen, so ist $n = 2$, die ζ-Ebene also einblättrig. Die obigen Formeln ergeben, wenn man dies einführt:

$$(16)\quad \begin{aligned}\Omega = \frac{1}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)l\left(1-\frac{Re^{-i\alpha_1}}{\zeta}\right)-(b_1+a_2)l\left(1-\frac{Re^{-i\beta_1}}{\zeta}\right)\\ &+(a_2+b_2)l\left(1-\frac{Re^{-i\alpha_2}}{\zeta}\right)-(b_2+a_1)l\left(1-\frac{R}{\zeta}\right)\Big\}\end{aligned}$$

$$(17)\quad \begin{aligned}0 &= (a_1+b_1)\alpha_1-(b_1+a_2)\beta_1+(a_2+b_2)\alpha_2-2\pi b_2\\ 0 &= (a_1+b_1)\cos\alpha_1-(b_1+a_2)\cos\beta_1+(a_2+b_2)\cos\alpha_2-(b_2+a_1)\\ 0 &= (a_1+b_1)\sin\alpha_1-(b_1+a_2)\sin\beta_1+(a_2+b_2)\sin\alpha_2.\end{aligned}$$

Die Gleichung für z wird hiernach wegen

$$z = \int \zeta\, d\Omega + \text{Const.}$$

und falls man verfügt, dass z mit Ω verschwinden, d. h. das Stosscentrum in den Coordinatenanfang fallen soll:

$$(18)\quad \begin{aligned}z = \frac{R}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)e^{-i\alpha_1}l(\zeta-Re^{-i\alpha_1})-(b_1+a_2)e^{-i\beta_1}l(\zeta-Re^{-i\beta_1})\\ &+(a_2+b_2)e^{-i\alpha_2}l(\zeta-Re^{-i\alpha_2})-(b_2+a_1)l(\zeta-R)\Big\}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man:

$$z = x+iy,\quad \zeta = \varrho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

setzt:

$$(19)\quad \begin{aligned}x = \frac{R}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)\Big[\frac{1}{2}\cos\alpha_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_1))\\ &\qquad + \sin\alpha_1 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\alpha_1}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\alpha_1}\right)\Big]\\ &-(b_1+a_2)\Big[\frac{1}{2}\cos\beta_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\beta_1))\\ &\qquad + \sin\beta_1 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\beta_1}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\beta_1}\right)\Big]\\ &+(a_2+b_2)\Big[\frac{1}{2}\cos\alpha_2 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_2))\\ &\qquad + \sin\alpha_2 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\alpha_2}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\alpha_2}\right)\Big]\\ &-(b_2+a_1)\cdot\frac{1}{2}\, l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos\vartheta)\Big\},\end{aligned}$$

$$
(19)\quad
\begin{aligned}
y = -\frac{R}{\pi}\Big\{(a_1+b_1\Big[\frac{1}{2}\sin\alpha_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_1))
&- \cos\alpha_1 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\alpha_1}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\alpha_1}\right)\Big]\\
-(b_1+a_2)\Big[\frac{1}{2}\sin\beta_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\beta_1))
&- \cos\beta_1 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\beta_1}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\beta_1}\right)\Big]\\
+(a_2+b_2)\Big[\frac{1}{2}\sin\alpha_2 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_2))
&- \cos\alpha_2 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\alpha_2}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\alpha_2}\right)\Big]\\
-(b_2+a_1)\Big[-\operatorname{arctg}\frac{\varrho\sin\vartheta}{\varrho\cos\vartheta-R}\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Nimmt man $\varrho = R$ und lässt ϑ von 0 bis -2π abnehmen, so umläuft man zugleich in *positiver Richtung* die gesammte Flüssigkeit. Die Schwierigkeit, die in der Bestimmung des Werthes des arctg in den Ausdrücken von x und y liegt, umgeht man, indem man in (18) die Logarithmen entwickelt und den imaginären Theil nach der Formel:

$$\frac{1}{2}(\pi-\chi) = \sum \frac{\sin h\chi}{h} \quad \text{für} \quad 0<\chi<2\pi$$

$$-\frac{1}{2}(\pi+\chi) = \sum \frac{\sin h\chi}{h} \quad \text{für} \quad 0>\chi>-2\pi$$

summirt. Man erhält so:

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{R}{2\pi}\Big\{(a_1+b_1)\Big[\cos\alpha_1 . l\Big(4\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big)\\
&\qquad \pm \sin\alpha_1\,(\pi\mp(\alpha_1+\vartheta))\mp\cdots\Big]\Big\}\\
\bar{y} &= \frac{R}{2\pi}\Big\{(a_1+b_1)\Big[-\sin\alpha_1 . l\Big(4\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big)\\
&\qquad \pm \cos\alpha_1\,(\pi\mp(\alpha_1+\vartheta))\mp\cdots\Big]\Big\}.\ ^{*)}
\end{aligned}
$$

Das obere Zeichen gilt für $0<(\alpha_1+\vartheta)<2\pi$, das untere für $0>(\alpha_1+\vartheta)>-2\pi$; analog in den anderen Gliedern.

Hiernach erkennt man sogleich, dass beim Passiren des Werthes $\vartheta = -\alpha_1$ springt:

$$\bar{x} \text{ um } -R(a_1+b_1)\sin\alpha_1$$

$$\bar{y} \text{ um } -R(a_1+b_1)\cos\alpha_1.$$

*) Hiernach kann nach Formel (17) unter dem Logarithmus der Factor 4 beliebig weggelassen werden.

Es ist also $R(a_1+b_1)=A_1$ die Breite des in der Richtung α_1 aus Unendlich kommenden Stromes.

Ganz ebenso findet sich:

$$R(a_2+b_2)=A_2$$

die Breite des in der Richtung α_2 kommenden,

$$R(b_1+a_2)=B_1, \quad R(b_2+a_1)=B_2$$

die Breiten der in der Richtung β_1 und β_2 ($=0$) in's Unendliche fliessenden Strahlen.

Dass $A_1+A_2 \equiv B_1+B_2$ ist, sagt also aus, dass ebenso viel Flüssigkeit zu-, wie abfliesst.

Man kann hiernach die Resultate schreiben:

$$(21)\quad \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\pi R}\{A_1 l(\zeta - Re^{-i\alpha_1}) - B_1 l(\zeta - Re^{-i\beta_1}) \\ &\qquad + A_2 l(\zeta - Re^{-i\alpha_2}) - B_2 l(\zeta - R)\} \\ z &= \frac{1}{\pi}\{A_1 e^{-i\alpha_1} l(\zeta - Re^{-i\alpha_1}) - B_1 e^{-i\beta_1} l(\zeta - Re^{-i\beta_1}) \\ &\qquad + A_2 e^{-i\alpha_2} l(\zeta - Re^{-i\alpha_2}) - B_2 l(\zeta - R)\} \end{aligned}$$

$$(21)\quad \begin{aligned} x &= \Big\{\frac{A_1}{\pi}\Big[\frac{\cos\alpha_1}{2} l(\varrho^2+R^2-2R\varrho\cos(\vartheta+\alpha_1)) \\ &\qquad + \sin\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{R\sin(\vartheta+\alpha_1)}{\varrho - R\cos(\vartheta+\alpha_1)}\Big] \mp \cdots\Big\} \\ y &= \Big\{\frac{A_1}{\pi}\Big[-\frac{\sin\alpha_1}{2} l(\varrho^2+R^2-2R\varrho\cos(\vartheta+\alpha_1)) \\ &\qquad + \cos\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{R\sin(\vartheta+\alpha_1)}{\varrho - R\cos(\vartheta+\alpha_1)}\Big] \mp \cdots\Big\}. \end{aligned}$$

Dazu die Bedingungen:

$$(22)\quad \begin{aligned} 0 &= A_1\alpha_1 - B_1\beta_1 + A_2\alpha_2 - 2\pi b_2 R \\ 0 &= A_1\cos\alpha_1 - B_1\cos\beta_1 + A_2\cos\alpha_2 - B_2 \\ 0 &= A_1\sin\alpha_1 - B_1\sin\beta_1 + A_2\sin\alpha_2 \\ 0 &= A_1 - B_1 + A_2 - B_2. \end{aligned}$$

Die zweite und dritte Gleichung hiervon hat den einfachen Sinn, dass die Schwerpunktsgeschwindigkeit der im Unendlichen in gleicher Zeit durch einen Querschnitt zu- und abströmenden Flüssigkeit gleich ist.

Es drückt sich nach diesen Formeln *nicht* Alles vollständig durch die Breiten und Richtungen der Strahlen aus, sondern es bleibt noch eine Grösse (b_2) in den Formeln, die wesentlich von der Lage des Stosscentrums abhängt. Da dieselbe nur in einer Gleichung vorkommt, so kann man sie willkürlich lassen und durch gegebene A, B und α, β bestimmen. Dabei ist nur das Eine zu beachten,

dass b_2 sich positiv und kleiner als $\frac{A_2}{R}$ und $\frac{B_2}{R}$ ergeben muss, da $A_2 = (a_2 + b_2)R$, $B_2 = (b_2 + a_1)R$ ist und die a_h und b_h sämmtlich positiv sind; eine Bestimmung über den Zusammenhang zwischen den A, B und α, β giebt die erste Formel aber nicht.

Nach der Ableitung sind A_1, A_2 die Breiten der aus Unendlich kommenden $B_1 B_2$ der in's Unendliche gehenden Strahlen. Für die Discussion ist es bei der im Uebrigen gewählten Bezeichnung bequemer, diese Bedeutungen zu *vertauschen*. Dies ist erlaubt, d. h. *die ganze Flüssigkeitsbewegung kann einfach umgekehrt werden*, weil wenn man in der Ω-Ebene das Coordinatensystem mit dem entgegengesetzten vertauscht, also die Bewegungsrichtung umkehrt (da wachsende Φ in abnehmende verwandelt werden) z nichts weiter als das Vorzeichen ändert, also die Gestalt der Flüssigkeit erhalten bleibt und das ganze Bild nur um 180° gedreht wird. Da es aber auf die absolute Lage der Erscheinung nicht ankömmt, können wir diese Drehung auch ignoriren.

Die Bedingungen, um die es sich handelt, schreiben wir, indem wir alle Breiten durch $B_2 = B$ ausdrücken:

$$1 = \frac{A_1}{B} - \frac{B_1}{B} + \frac{A_2}{B}$$

$$(23)\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\cos\beta_1 + \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 \\ 0 &= \frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\sin\beta_1 + \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 \end{aligned}$$

$$2\pi\frac{b_2 R}{B} = \frac{A_1}{B}\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\beta_1 + \frac{A_2}{B}\alpha_2.$$

Es giebt dabei:

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < 2\pi.$$

Man bemerkt: Sind alle drei Richtungswinkel α_1, β_1, α_2 gegeben, so sind die Verhältnisse der Breiten A, B vollständig bestimmt.

Es wird nämlich:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{\sin(\alpha_2 - \beta_1) - (\sin\alpha_2 - \sin\beta_1)}{\Delta}$$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}{\Delta}$$

$$\frac{A_2}{B} = \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1) - (\sin\beta_1 - \sin\alpha_1)}{\Delta}$$

wenn:

$$\Delta = \sin(\alpha_2 - \beta_1) + \sin(\beta_1 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

ist.

Einen physikalischen Sinn geben natürlich nur die Fälle, welche die A und B sämmtlich positiv werden lassen.

Die gewöhnliche Fragestellung wird die sein, dass das Verhältniss der Breiten $\frac{B_1}{B}$ der stossenden Strahlen und ihre gegenseitige Richtung, also β_1 gegeben ist, und die Breiten A_1, A_2 und Richtungen α_1, α_2 der resultirenden Strahlen gesucht werden.

Hier reichen die drei ersten Gleichungen (23) zur Bestimmung nicht aus, sondern es giebt unendlich viele Lösungen. Bestimmt wird das Problem erst, wenn noch eine der Grössen für die *resultirenden* Strahlen gegeben ist, oder über $b_2 R$, d. h. über *die Lage des Stosscentrums* in der Flüssigkeit verfügt ist. Im letzteren Falle werden die Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten transcendent. Ist im ersteren, hiernach günstigeren Falle α_1 gegeben, so wird:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{B_1(1-\cos\beta_1)}{B_2(1-\cos\alpha_1) + B_1(1-\cos(\beta_1-\alpha_1))};$$

alles Uebrige ergiebt sich hieraus leicht.

Die Rolle, welche $b_2 R$ bei dem Problem spielt, übersieht man am deutlichsten in dem Falle *gleich breiter*, in entgegengesetzter Richtung zusammenstossender Strahlen. Dann ergiebt sich wegen:

$$B_1 = B, \qquad \beta_1 = \pi$$

sogleich:

$$B_1 = A_1 = A_2, \qquad \alpha_2 = \pi + \alpha_1$$

und aus der vierten Formel (23) folgt:

$$\frac{Rb_2}{B}\pi = \alpha_1 .$$

Es wird also $\frac{Rb_2}{B} = 0$ oder 1 wenn $\alpha_1 = 0$ oder π ist; im Falle, dass die Strahlen *aneinander* hingehen, rückt also das Stosscentrum in die Oberfläche; je mehr der Stoss central ist, um so näher liegt es der Mitte der Strahlen. Analoges gilt auch für den directen Stoss zweier ungleich breiter Strahlen.

Dies ist mit der directen Anschauung in vollkommenem Einklang. Ueberraschend ist aber, dass die Theorie auch für den *schiefen* Stoss in gleicher Weise eine verschiedene Lage des Stosscentrums und demgemäss bei demselben gegenseitigen Richtungswinkel einen verschiedenen Verlauf der Erscheinung zulässt. Man kann sich von der Nothwendigkeit dieser Thatsache etwas Rechenschaft geben, indem man überlegt, dass wenn man ursprünglich *entgegengesetzt* gerichtete stossende Strahlen um einen unendlich kleinen Winkel gegeneinander neigt, nothwendig auch nur eine *unendlich kleine* Aenderung der ganzen resultirenden Bewegung eintreten muss und hiernach bei *verschiedenen* in *verschiedener* Weise excentrisch stossenden Paaren durch diese kleine

Neigung nicht die *gleiche* Bewegung entstehen kann, sondern eine Verschiedenheit bestehen bleiben muss, wenngleich die verschiedenen Paare gleiche Breite und gleiche Richtung der stossenden Strahlen besitzen.

Es muss also die stationäre Bewegung bei dem Zusammentreffen mehrerer Flüssigkeitsstrahlen von den Umständen beim ersten Beginn dieser Bewegung abhängig sein. Etwas Aehnliches hat sich auch in andern Gebieten der Hydrodynamik ergeben.

Wir wollen schliesslich ein einfaches Beispiel in Rücksicht auf das eben Erörterte ausführlicher behandeln.

Es sei gegeben

$$B_1 = B, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

d. h. der Zusammenstoss zweier gleich breiter Strahlen unter rechtem Winkel. Dann geben die 4 Bedingungen:

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{A_1 + A_2}{B} \\
1 &= \frac{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}{B} \\
1 &= \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{B} \\
\frac{R b_2}{B} &= \frac{A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2}{2\pi B} - \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{24}$$

also:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{1}{2 - (\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{1 - 3\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}.$$

Ferner:

$$\Omega = \frac{B}{\pi R}\left\{\frac{A_1}{B}\, l(\zeta - R e^{-i\alpha_1}) + \frac{A_2}{B}\, l(\zeta - R e^{-i\alpha_2}) - l((\zeta - R)(\zeta + iR))\right\},$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} = &+ \frac{B}{2\pi}\left\{\left[\frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 . l\left(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\right) + \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 . l\left(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_2}{2}\right) - l\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\right. \\
&\left. + \left[\pm\frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 . (\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \pm \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 . (\pi \mp (\alpha_2+\vartheta)) \mp \left(\pi \mp \left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)\right)\right]\right\} \\
\bar{y} = &- \frac{B}{2\pi}\left\{+\left[\frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 . l\left(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\right) + \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 . l\left(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_2}{2}\right) - l\left(\sin^2\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right]\right. \\
&\left. + \left[\mp\frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 . (\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \mp \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 . (\pi \mp (\alpha_2+\vartheta)) \pm (\pi \mp \vartheta)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Das obere Zeichen gilt in den 6 Gliedern, wenn resp. $(\alpha_1 + \vartheta)$, $(\alpha_2 + \vartheta)$, ϑ und $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$ zwischen 0 und 2π, das untere, wenn es zwischen 0

und -2π liegt. Bei einem Umlauf der Flüssigkeit in positiver Richtung nimmt ϑ von 0 bis -2π ab, die Zeichenwechsel treten also bei

$$0, -\alpha_1, -\frac{\pi}{2}, -\alpha_2, -2\pi \text{ ein.}$$

Wir wollen einige einfache Specialfälle untersuchen und durch Figuren eine ungefähre Vorstellung von dem Verlaufe der Flüssigkeitsbewegung zu geben versuchen. Nach dem Vorstehenden ist eine der beiden Grössen α_1 und α_2 beliebig zu wählen. Wegen der allgemeinen Relation

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 = 2\pi$$

muss dabei aber sein:

$$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < 2\pi.$$

1) Sei zunächst:

$$\alpha_1 = 0$$

so folgt:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A_1 = A_2 = B; \quad a_1 = a_2 = \frac{B}{R}, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

Die letzteren Werthe zeigen, dass der Streifen in der Ω-Ebene in beiden Blättern übereinanderfällt und ganz oberhalb der Φ-Axe liegt; der Verzweigungspunkt liegt auf der Begrenzung. Dieser Fall ist also nicht möglich, er giebt kein Problem des Stosses; wir haben uns vorzustellen, dass dabei die beiden unter $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander geneigten (normal zur z-Ebene gemessen unendlich dünnen) Strahlen übereinander hinwegfliessen ohne sich zu treffen.

Nimmt man α_1 unendlich klein, so wird:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \qquad A_1 = B_2(1 + \alpha_1),$$

$$A_2 = B_2(1 - \alpha_1), \qquad b_2 = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right)\alpha_1 B_2$$

der Verzweigungspunkt liegt also auf dem Streifen. Dieser Fall ist durch Fig. 3 angedeutet.

2) Setzt man

$$\alpha_2 = \pi$$

so wird $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, also α_1 nahe $0{,}2\pi$. Zugleich folgt:

$$A_1 = \frac{5}{3}B, \quad A_2 = \frac{1}{3}B,$$

$$a_1 = 0{,}92\frac{B}{R}, \quad a_2 = 0{,}25\frac{B}{R}, \quad b_1 = 0{,}75\frac{B}{R}, \quad b_2 = 0{,}083\frac{B}{R};$$

die letzteren Werthe sind nur angenährt. Die Gestalt des Streifens in der Ω-Ebene ist in Fig. 4 gegeben.

Was die Flüssigkeitsbewegung selbst anbetrifft so bietet der Umstand eine Schwierigkeit, dass wegen $\beta_2 = 2\pi$, $\alpha_2 = \pi$ zwei entgegengesetzte fliessende Strahlen sich parallel der x-Axe in's Unendliche erstrecken. Ihre gegenseitige Lage erhellt aus der Gleichung

$$\bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\left\{ l\left(\frac{\sin\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{2}}\right)^2 \mp \frac{4}{3}(\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \pm \frac{1}{3}(\pi \mp (\pi+\vartheta)) \pm (\pi \mp \vartheta)\right\}.$$

Hierin ist bereits benutzt, dass $\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$ ist.

Für $\vartheta = 0$ erhält man

$$\bar{y} = +\frac{B}{2\pi}\left\{l(5) + \frac{(\pi - 4\alpha_1)}{3} + \pi(1 \mp 1)\right\}.$$

Der Strahl B liegt also im Unendlichen zwischen diesen beiden Ordinaten.

Für $\vartheta = \pi$ aber folgt:

$$\bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\left\{l(2) - \frac{(\pi - 4\alpha_1)}{3} + \pi\left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Hiernach werden die beiden parallelen Strahlen etwa so liegen wie die Figur 4 angiebt, nämlich im Unendlichen mit ihren benachbarten Grenzen um etwa 0,37 B von einander entfernt.

3) Setzt man

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

so resulirt:

$$\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad A_1 = \frac{B}{2-\sqrt{2}} = 1{,}71\,B, \quad A_2 = B\,\frac{3-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2{,}29\,B,$$

$$a_1 = 0{,}855\,\frac{B}{R}, \quad a_2 = 0{,}145\,\frac{B}{R},$$

$$b_1 = 0{,}855\,\frac{B}{R}, \quad b_2 = 0{,}145\,\frac{B}{R}.$$

Der Streifen in der Ω-Ebene liegt, wie Fig. 5 zeigt, symmetrisch um die Φ-Axe und den Verzweigungspunkt. Die Flüssigkeitsstrahlen selbst sind in ihrer Gestalt leicht vorzustellen und ebenda angedeutet.

4) Setzt man

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$

so wird $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, α_1 also nahe $0{,}3\pi$, ferner

$$A_1 = \frac{5}{3}\,B, \quad A_2 = \frac{1}{3}\,B,$$

$$a_1 = 0{,}75\,\frac{B}{R}, \quad a_2 = 0{,}083\,\frac{B}{R}, \quad b_1 = 0{,}92\,\frac{B}{R}, \quad b_2 = 0{,}25\,\frac{B}{R}.$$

Der Fall ist das Gegenbild zu 2) wie die Fig. 6 weiter darlegt.

5) Setzt man endlich $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so erhält man den zweiten Grenzfall, welcher (1) entspricht. Es wird

$$\alpha_2 = 2\pi, \quad A_1 = A_2 = B, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = b_2 = \frac{B}{R}.$$

Fig. 7 giebt das zugehörige Bild.

Die singulären Stromcurven und die Stosscentren sind nur nach Schätzung eingezeichnet. Ihre genaue Bestimmung ist schwierig. Sie werden erhalten, wenn man in der Formel (25) für Ω den imaginären Theil gleich Null setzt und die dieser Gleichung genügenden Paare ϱ und ϑ in die allgemeinen Gleichungen (21) für x und y einführt. Eine Discussion der Gestalt dieser Curven dürfte ohne höchst umständliche Rechnungen selbst in den einfachsten Specialfällen nicht möglich sein.

Göttingen, Sommer 1885.

Zur Reduction der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf die Jerrard'sche Form — eine Weiterführung des von Hermite eingeschlagenen Weges.

(Vgl. Comptes rendus Tome LXI, LXII).

Von

Johannes Rahts in Königsberg.

I.

Kurze Darlegung des Hermiteschen Weges.

Hermite legt seinen Untersuchungen über die Invarianten und Covarianten der Form fünfter Ordnung eine canonische Form zu Grunde, welche sich aus der allgemeinen durch eine lineare Substitution mit der Determinante eins ergiebt, und deren Coefficienten sich durch die Invarianten der allgemeinen Form ausdrücken lassen. Ist

$$f(x, y) = \alpha x^5 + 5\beta x^4 y + 10\gamma x^3 y^2 + 10\gamma' x^2 y^3 + 5\beta' x y^4 + \alpha' y^5$$
$$= (\alpha \beta \gamma \gamma' \beta' \alpha' \between x y)^5$$

die vorliegende allgemeine Form, so ergiebt die 4^te Ueberschiebung von f über sich eine Covariante 2^ten Grades und 2^ter Ordnung

$$2\Phi(x,y) = 2\{(\alpha\beta' - 4\beta\gamma' + 3\gamma^2)x^2 + (\alpha\alpha' - 3\beta\beta' + 2\gamma\gamma')xy + (\alpha'\beta - 4\beta'\gamma + 3\gamma'^2)y^2\}$$

und die 2^te Ueberschiebung von 2Φ über sich eine Invariante 4^ten Grades:

$$2\{4(\alpha\beta' - 4\beta\gamma' + 3\gamma^2)(\alpha'\beta - 4\beta'\gamma + 3\gamma'^2) - (\alpha\alpha' - 3\beta\beta' + 2\gamma\gamma')^2\}$$
$$= -2A.$$

Die linearen Factoren von $\Phi(xy)$ führte Hermite als neue Variable $x'y'$ ein und zwar so, dass die Covariante Φ durch die neuen Variablen ausgedrückt die Form:

$$\Phi = \sqrt{A} \,.\, x'y'$$

erhält. Durch Beifügung des Factors $\sqrt{A}$ wird bewirkt, dass die Substitutionsdeterminante eins ist. — Offenbar ist die Substitution durch

diese Bedingung noch nicht vollständig bestimmt, sondern man kann, ohne zu verhindern, dass die Determinante gleich eins ist, statt x' und y' die Werthe:

$$X = \omega x',$$
$$Y = \frac{1}{\omega} y'$$

setzen und dieses ω willkürlich bestimmen. Sind nun die nach der ersten Substitution in der Form f auftretenden Coefficienten: a, b, c, c', b', a', so werden sie nach der letzten Substitution:

$$a\omega^5,\ b\omega^3,\ c\omega,\ c'\omega^{-1},\ b'\omega^{-3},\ a'\omega^{-5}.$$

Indem nun Hermite $\omega = \sqrt{\frac{c'}{c}}$ setzt und für die Coefficienten $a\omega^5, b\omega^3$... die Bezeichnungen $\lambda,\ \mu,\ \sqrt{\varkappa},\ \sqrt{\varkappa},\ \mu',\ \lambda'$ einführt, erhält er die erwähnte canonische Form

$$F(XY) = (\lambda\ \mu\ \sqrt{\varkappa}\ \sqrt{\varkappa}\ \mu'\ \lambda' \between XY)^5$$

deren Coefficienten die beiden Bedingungsgleichungen

$$\lambda\mu' - 4\mu\sqrt{\varkappa} + 3\varkappa = 0,$$
$$\lambda'\mu - 4\mu'\sqrt{\varkappa} + 3\varkappa = 0$$

erfüllen müssen. Durch Einführung von $\lambda\lambda' = g$ und $\mu\mu' = h$ gelingt es die 5 Coefficienten durch die 3 Grössen g, h und k auszudrücken:

$$72\sqrt{k^5}\,.\,\lambda = h(g-16k)^2 - 9k^2(g+16k) + (g-16k)\sqrt{\Delta},$$
$$24\sqrt{k^3}\,.\,\mu = (9k^2+16hk-gh) - \sqrt{\Delta},$$
$$24\sqrt{k^3}\,.\,\mu' = (9k^2+16hk-gh) + \sqrt{\Delta},$$
$$72\sqrt{k^5}\,.\,\lambda' = h(g-16k)^2 - 9k^2(g+16k) - (g-16k)\sqrt{\Delta},$$

wenn

$$\Delta = (9k^2+16hk-gh)^2 - 576hk^3.$$

Diese canonische Form benutzt Hermite, um die übrigen Invarianten und einige Covarianten der Form 5ter Ordnung abzuleiten.

Aus der Covariante

$$2\Phi(XY) = 2\sqrt{A}\,.\,XY$$

folgt durch 2te Ueberschiebung mit der Form F die Covariante 3ten Grades und 3ter Ordnung:

$$2\varphi_1 = 2\sqrt{A}\,(\mu X^3 + 3\sqrt{k}\,X^2Y + 3\sqrt{k}\,XY^2 + \mu' Y^3)$$

und durch 4te Ueberschiebung mit F die lineare Covariante 5ten Grades:

$$4A\sqrt{k}\,(X+Y) = 4L_1.$$

Aus der Ueberschiebung dieser linearen Covariante mit der quadra-

tischen Covariante $2\Phi XY$ folgt eine zweite lineare Covariante 7ten Grades:

$$4\sqrt{A^3}\sqrt{k}\,(X-Y)=4L_2.$$

Die erste Ueberschiebung der cubischen Covariante $2\varphi_1$ mit 2Φ giebt wieder eine cubische Covariante 4ten Grades:

$$2\varphi_2=2A(\mu X^3+\sqrt{k}\,X^2Y-\sqrt{k}\,XY^2-\mu' Y^3),$$

die 3te Ueberschiebung der beiden cubischen Covarianten $2\varphi_2$ mit $2\varphi_1$ giebt eine Invariante 8ten Grades, und die Ueberschiebung der beiden linearen Covarianten $4L_2$ mit $4L_1$ eine Invariante 12ten Grades:

$$8B=8A\sqrt{A}\,(h-k),$$
$$32C=32\sqrt{A^5}\,.\,k.$$

Eine weitere Invariante 18ten Grades erhält man durch die 3te Ueberschiebung der cubischen Covariante $2\varphi_1$ mit dem Cubus der linearen Covariante $4L_1$:

$$\frac{32}{3}K=128\sqrt{A^7}\,.\,\sqrt{k^3}(\mu-\mu'),$$

so dass also

$$K=\sqrt{A^7}\sqrt{\Delta}$$

ist.

Durch die 3 Invarianten A, B, C lassen sich die Grössen g, h, k wie folgt ausdrücken:

$$g=\frac{A^3+3AB+C}{\sqrt{A^5}},$$
$$h=\frac{AB+C}{\sqrt{A^5}},$$
$$k=\frac{C}{\sqrt{A^5}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$K^2=A^7\,.\,\Delta$$

ein, so erhält man folgende Bedingungsgleichung zwischen den 4 Invarianten A, B, C, K:

$$K^2=(A^2+3B)^2AB^2+2(A^2+3B)(A^2-12B)BC$$
$$+(A^2-72B)AC^2-48C^3,$$

oder wenn man

$$AB+C=M,$$
$$AM+3B^2=Q$$

setzt:

$$K^2=AQ^2-24BCQ-48MC^2.\;-$$

Anmerkung: Die Ueberführung der allgemeinen Form 5ter Ordnung auf die Hermitesche canonische Form ist nicht immer möglich.

Erstens darf die Invariante A nicht verschwinden, denn in diesem Falle ist $\Phi(xy)$ ein vollständiges Quadrat also nicht auf die Form $\sqrt{A}\,.\,XY$ zu bringen, und

zweitens darf die Invariante C nicht Null sein, es sei denn dass zugleich B und K verschwinden. Bei dem Uebergange von der Zwischenform

$$F(x'y') = (a\,b\,c\,c'\,b'\,a' \between x'\,y')^5$$

auf die canonische Form wurde nämlich

$$X = \omega x',$$

$$Y = \frac{1}{\omega}\,y'$$

und

$$\omega = \sqrt{\frac{c'}{c}}$$

gesetzt; dieses setzt voraus, dass nicht eine der Grössen c oder c' gleich Null ist; sind beide Null, so hat $F(x'y')$ schon die Eigenschaften der canonischen Form. Die Hermiteschen Invarianten für $F(x'y')$ sind:

$$A = (aa' - 3bb' + 2cc')^2,$$

$$B = \sqrt{A^3}\,(bb' - cc'),$$

$$C = \sqrt{A^5}\,.\,cc',$$

$$K = 12\sqrt{A^7}\,(bc'^3 - b'c^3),$$

ausserdem ist:

$$ab' - 4bc' + 3c^2 = 0$$

und

$$a'b - 4b'c + 4c'^2 = 0,$$

und hieraus ergiebt sich die obige Bemerkung, dass die Hermitesche canonische Form nicht existirt, wenn $C = 0$ ist, es sei denn, dass zugleich B und K verschwinden. —

Nachdem dann Hermite nachgewiesen hat, dass jede Invariante der Form 5^{ter} Ordnung eine ganze rationale Function der 4 Invarianten A, B, C, K ist, geht er zu dem Hauptgegenstande seiner Untersuchung über, nämlich zur Anwendung dieser Invarianten und Covarianten bei der Reduction der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades auf die Jerrard'sche Form,

$$x^5 - x - a = 0$$

oder vielmehr auf die etwas allgemeinere Form

$$x^5 + ax + b = 0. -$$

Wenn $f(xy)$ eine Form n^{ter} Ordnung und $\varphi(xy)$ eine Covariante dieser Form von der Ordnung $(n-2)$ ist, so erhält man durch Substitution von

$$z = \frac{\varphi(x,1)}{f'_x(x,1)}$$

in $f(x, y) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten Invarianten von der Form $f(x, y)$ sind, und in welcher der Coefficient von z^{n-1} verschwindet. Statt der beiden Gleichungen

$$f(x, y = 0,$$
$$z\frac{\partial f(xy)}{\partial x} - y \,.\, \varphi(xy) = 0$$

kann man auch setzen

$$z\frac{\partial f}{\partial y} + x\,\varphi(xy) = 0,$$
$$z\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\varphi(xy) = 0$$

und erhält durch Elimination von x und y aus ihnen die Gleichung für z.

Substituirt man:

$$x = mX + m'Y$$
$$y = nX + n'Y$$

in f und φ und drückt Z ebenso durch X und Y aus wie z durch x und y, so folgt wegen der Invarianteneigenschaft von $\varphi(x, y)$,

$$\varphi(XY) = (mn' - nm')^i\varphi(xy):$$

$$Z\left(m'\frac{\partial f}{\partial x} + n'\frac{\partial f}{\partial y}\right) + X(mn' - nm')^i\varphi(xy) = 0,$$
$$Z\left(m\frac{\partial f}{\partial x} + n\frac{\partial f}{\partial y}\right) - Y(m\eta' - nm')^i\varphi(xy) = 0$$

oder nach Multiplication mit $+m$ und $-m'$ und mit $-n$ und $+n'$ und Addition:

$$\frac{Z}{(mn' - m'n)^{i-1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + x\varphi(xy) = 0,$$
$$\frac{Z}{(mn' - m'n)^{i-1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - y\varphi(xy) = 0.$$

Es ergiebt sich also für $\frac{Z}{(mn' - m'n)^{i-1}}$ dieselbe Gleichung wie für z, und hieraus folgt unmittelbar, dass die Coefficienten der Gleichung für z Invarianten der Form $f(x, y)$ sind, auch lässt sich leicht der Grad derselben bestimmen.

Es sei die resultirende Gleichung für z:

$$D.z^n + \mathfrak{A}z^{n-2} + \mathfrak{B}z^{n-3} + \cdots + \mathfrak{K} = 0,$$

oder

$$z^n + \left(\frac{\mathfrak{A}}{D}\right)z^{n-2} + \left(\frac{\mathfrak{B}}{D}\right)z^{n-3} + \cdots + \left(\frac{\mathfrak{K}}{D}\right) = 0,$$

und für Z:

$$Z^n = \left(\frac{\mathfrak{A}}{D}\right)' Z^{n-2} + \left(\frac{\mathfrak{B}}{D}\right)' Z^{n-3} + \cdots + \left(\frac{\mathfrak{K}}{D}\right)' = 0,$$

so ist, da nach dem Vorhergehenden für $\frac{Z}{(mn'-m'n)^{i-1}}$ dieselbe Gleichung gilt wie für z,

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{D}\right)' = (mn' - m'n)^{2i-2} \cdot \left(\frac{\mathfrak{A}}{D}\right),$$

$$\left(\frac{\mathfrak{B}}{D}\right)' = (mn' - m'n)^{3i-3} \cdot \left(\frac{\mathfrak{B}}{D}\right) \text{ etc. etc.}$$

d. h. die Coefficienten der Gleichung für z haben die Invarianteneigenschaft, und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{K}$ selbst sind Invarianten, wenn D eine solche ist. D ist aber als Coefficient der höchsten Potenz von z das Eliminationsresultat der Gleichungen:

$$\frac{df}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad f(x, y) = 0$$

oder der Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

somit die Discriminante von $f(x, y)$.

Kennt man nun von der Form n^{ter} Ordnung $f(x, y)$ $(n-1)$ unabhängige Covarianten $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, bezeichnet dieselben mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ und setzt

$$\varphi(xy) = t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 + \cdots + t_{n-1}\varphi_{n-1}$$

so enthält die Substitution

$$z = \frac{\varphi(x, 1)}{f_x'(x, 1)}$$

$(n-1)$ willkürliche Grössen und ist somit die allgemeinste Transformation der Gleichung $f(x, 1) = 0$, welche auf eine neue Gleichung n^{ten} Grades führt, in der der Coefficient von z^{n-1} verschwindet.

$\mathfrak{A}$ ist eine homogene Function 2^{ten} Grades von den Grössen $t_1, t_2, \ldots$, $\mathfrak{B}$ eine homogene Function 3^{ten} Grades von denselben Grössen etc. etc., die Coefficienten von $t_1^2, t_1 t_2 \ldots$ in $\mathfrak{A}$, die von $t_1^3, t_1^2 t_2 \ldots$ in $\mathfrak{B}$ etc. sind Invarianten der Form f, deren Grad in folgender Weise zu bestimmen ist:

Es sei der Rang von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ bezüglich $i_1, i_2, i_3 \ldots$ und ihr Grad $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Vertauschung der Form $f(x, y)$ mit der durch die Substitution

$$x = mX + m'Y,$$
$$y = nX + n'Y$$

entstehenden Form $F(X, Y)$ darauf hinauskommt, dass man

$$t_1 \text{ durch } t_1(mn' - m'n)^{i_1 - 1},$$
$$t_2 \text{ durch } t_2(mn' - m'n)^{i_2 - 1}$$
$$\text{etc. etc.}$$

ersetzt, daher wird der Coefficient von $t_\alpha t_\beta$ in $\frac{\mathfrak{A}}{D}$ den Rang $i_\alpha + i_\beta - 2$ haben, oder da D den Rang $n(n-1)$ hat, wird der Coefficient von $t_\alpha t_\beta$ in $\mathfrak{A}$ den Rang $i_\alpha + i_\beta - 2 + n(n-1)$ haben. Ersetzt man den Rang $i_\alpha \ldots$ durch den Grad $\delta_\alpha \ldots$, so ergiebt sich der Grad des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta$ in $\mathfrak{A}$ gleich $\delta_\alpha + \delta_\beta + 2n - 4$, der Grad des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta t_\gamma$ in $\mathfrak{B}$ gleich $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + 2n - 5$, der des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta$ in $\mathfrak{C}$ gleich $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + \delta_\delta + 2n - 6$, der des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta t_\varepsilon$ in $\mathfrak{B}$ gleich

$$\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + \delta_\delta + \delta_\varepsilon + 2n - 7.$$

— Hermite führt nur den Grad des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta$ in $\mathfrak{A}$ und den des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta t_\gamma$ in $\mathfrak{B}$ an, und zwar ist der letztere fälschlich gleich $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + 3n - 6$ angegeben. —

Bei der Form 5ter Ordnung erhält man 4 unabhängige cubische Covarianten mit Hülfe der schon gefundenen:

$$\varphi_1 = \sqrt{A}\,\{\mu X^3 + 3\sqrt{k}\,X^2 Y + 3\sqrt{k}\,X Y^2 + \mu' Y^3\},$$
$$\varphi_2 = A\,\{\mu X^3 + \sqrt{k}\,X^2 Y - \sqrt{k}\,X Y^2 - \mu' Y^3\}.$$

Die Ueberschiebung von φ_1 und $\Phi = \sqrt{A}\,XY$ giebt

$$A\sqrt{A}(3\mu X^3 + \sqrt{k}\,X^2 Y + \sqrt{k}\,X Y^2 + 3\mu' Y^3)$$

oder durch Verbindung mit φ_1

$$\varphi_3 = A\sqrt{A}\,\{\mu X^3 - \sqrt{k}\,X^2 Y - \sqrt{k}\,X Y^2 + \mu' Y^3\},$$

und die Ueberschiebung von φ_3 und Φ giebt

$$A^2\,(3\mu X^3 - \sqrt{k}\,X^2 Y + \sqrt{k}\,X Y^2 - 3\mu' Y^3)$$

oder durch Verbindung mit φ_2

$$\varphi_4 = A^2\{\mu X^3 - 3\sqrt{k}\,X^2 Y + 3\sqrt{k}\,X Y^2 - \mu' Y^3\}.$$

Die 4 cubischen Covarianten sind unabhängig von einander, d. h. es besteht keine lineare Gleichung zwischen ihnen, weil die Determinante der Coefficienten von X^3, $X^2 Y$, $X Y^2$, Y^3 nicht verschwindet.

Hermite zeigt nun, dass φ_2, wenn $f(x, y)$ einen Linearfactor doppelt hat, denselben Linearfactor auch hat, und modificirt die Covarianten φ_3 und φ_4 so, dass sie dann auch diesen Factor haben, φ_4 mit Hülfe einer neuen cubischen Covariante ψ, welche die Covariante 3ter Ordnung von φ_1 ist.

Es wird

$$\begin{aligned}
\psi = {} & A\sqrt{A}\,\{2\sqrt{k^3} - 3\mu k + \mu'\mu^2\}\,X^3, \\
& + 3A\sqrt{A}\,\{\sqrt{k^3} + \mu\mu'\sqrt{k} - 2\mu k\}\,X^2 Y, \\
& - 3A\sqrt{A}\,\{\sqrt{k^3} + \mu\mu'\sqrt{k} - 2\mu' k\}\,X Y^2, \\
& - A\sqrt{A}\,\{2\sqrt{k^3} - 3\mu' k + \mu\mu'^2\}\,Y^3.
\end{aligned}$$

Indem nun Hermite statt φ_3 und φ_4 die Covarianten

$$\varphi_3' = 4\varphi_3 + A \,.\, \varphi_1,$$
$$\varphi_4' = 4\varphi_4 + 3A\varphi_2 + 96\psi$$

setzt, erhält er das neue System von cubischen Covarianten:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sqrt{A}\,\{\mu X^3 + 3\sqrt{k}X^2Y + 3\sqrt{k}XY^2 + \mu' Y^3\},\\
\varphi_2 &= A\,\{\mu X^3 + \sqrt{k}X^2Y - \sqrt{k}XY^2 - \mu' Y^3\},\\
\varphi_3 &= \sqrt{A^3}\{5\mu X^3 - \sqrt{k}X^2Y - \sqrt{k}XY^2 + 5\mu' Y^3\},\\
\varphi_4 &= \sqrt{A^3}\{7\mu\sqrt{A} + 96(2\sqrt{k^3} - 3\mu k + \mu'\mu^2)\}X^3,\\
&\quad - 3\sqrt{A^3}\{3\sqrt{k}\sqrt{A} - 96(\sqrt{k^3} + \mu\mu'\sqrt{k} + 2\mu k)\}X^2Y,\\
&\quad + 3\sqrt{A^3}\{3\sqrt{k}\sqrt{A} - 96(\sqrt{k^3} + \mu\mu'\sqrt{k} - 2\mu' k)\}XY^2,\\
&\quad - \sqrt{A^3}\{7\mu'\sqrt{A} + 96(2\sqrt{k^3} - 3\mu' k + \mu\mu'^2)\}Y^3.
\end{aligned}$$

Die Substitution, mit Hülfe deren die Jerrardsche Form erhalten werden soll, ist:

$$z = \frac{t\varphi_1 + u\varphi_2 + v\varphi_3 + w\varphi_4}{f_x'(x, 1)}.$$

Bezeichnet man

$$u\varphi_2 + v\varphi_3 + w\varphi_4$$

mit $\Theta(x, y)$, so hat $\Theta(x, y)$, wenn $f(x, y)$ einen Linearfactor doppelt hat, dieser Linearfactor auch, d. h. es ist:

$$\Theta(x_0, 1) \quad \text{durch} \quad (x_1 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)$$

ebenso

$$\Theta(x_1, 1) \quad \text{durch} \quad (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \quad \text{etc.}$$

theilbar. Daraus folgt, dass eine Wurzel z_i der Gleichung für z die Form

$$z_i = \frac{t\varphi_1(x_i, 1)}{f_x'(x_i, 1)} + \Phi(x_i, 1)$$

hat, worin $\Phi(x_i, 1)$ eine ganze Function ist.

Der Coefficient von z^3 in der Gleichung für z $\left(\frac{\mathfrak{A}}{D}\right)$ ist gleich der Summe der Quadrate $z_0^2 + z_1^2 + \cdots$ multiplicirt mit $-\frac{1}{2}$, da der Coefficient von z^4 identisch verschwindet. Also:

$$\frac{\mathfrak{A}}{D} = -\frac{1}{2}\sum_i\left\{\frac{t\varphi_1(x_i, 1)}{f_x'(x_i, 1)} + \Phi(x_i, 1)\right\}^2. -$$

In dieser Summe sind alle Glieder ganze Functionen mit Ausnahme des Coefficienten von t^2, und es folgt hieraus, dass in $\mathfrak{A}$ alle Glieder mit Ausnahme des Gliedes, welches t^2 enthält, den Factor D haben.

Da die Covarianten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 bezüglich den Grad 3, 5, 7, 9 haben, so ergeben sich nach dem vorher erhaltenen Ausdrucke

$$\delta_\alpha + \delta_\beta + 2n - 4$$

für die Grade der Coefficienten von t^2, tv, v^2, u^2, uw, w^2 die Zahlen 12, 16, 20, 16, 20, 24, welche alle Vielfache von 4 sind. Diese Coefficienten sind daher gerade Invarianten und ganze Functionen der Invarianten A, B, C. Für die Grade der Coefficienten von tu, tw, uv, vw erhält man die Zahlen 14, 18, 18, 22. Diese Coefficienten sind schiefe Invarianten und müssen in Folge dessen gleich Null sein; denn wenn man sie durch die Discriminante $D = A^2 + 128B$, welche in ihnen als Factor enthalten ist, dividirt, so ist der Grad der Quotienten kleiner als 18, welches der kleinstmögliche Grad einer schiefen Invariante ist.

Hermite giebt nun noch den Werth von $\mathfrak{A}$ ohne Ableitung an:

$$\begin{aligned} -5\mathfrak{A} = {} & D_1 t^2 - 6BDtv - D(D_1 - 10AB)v^2 \\ & + D(-Bu^2 + 2D_1 uw + (9BD - 10AD_1)w^2) \end{aligned}$$

— hier ist

$$D_1 = 25AB + 16C$$

gesetzt —, und löst die Gleichung

$$\mathfrak{A} = 0$$

einmal dadurch auf, dass er

$$t = \frac{3BD + \sqrt{ND}}{D_1} \cdot v, \qquad u = \frac{D_1 + \sqrt{N}}{B} w$$

setzt

$$-N = D_1^2 - 10ABD_1 + 9B^2D -$$

das andere Mal dadurch, dass er

$$t = \frac{\sqrt{D}\,u - 3Dw}{\sqrt{10A + 6\sqrt{D}}}$$

und

$$v = \frac{(10A + 3\sqrt{D})w - u}{\sqrt{10A + 6\sqrt{D}}}$$

setzt. —

II.

Bestimmung der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Wenn man eine genügende Anzahl specieller Gleichungen 5ten Grades hat, welche schon auf die Hermitesche Normalform gebracht sind, und deren Wurzeln man kennt, so kann die Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in folgender Weise ausgeführt werden:

Man berechnet für die speciellen Fälle die 4 fundamentalen Invarianten A, B, C, K und die Covarianten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, bildet

$$z = \frac{t\varphi_1 + u\varphi_2 + v\varphi_3 + w\varphi_4}{f'_x(x, 1)}$$

und setzt in diesen Ausdruck der Reihe nach die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 der speciellen Gleichungen ein, wodurch man die Wurzeln z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 der neuen Gleichung erhält. Die Potenzsummen der z ergeben dann die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ der transformirten Gleichung für die speciellen Fälle. Da man nun weiss, dass die Coefficienten der mit Potenzen von t, u, v, w multiplicirten Glieder in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Invarianten sind, deren Grad sich vorher bestimmen lässt, und da man ferner den allgemeinen Ausdruck einer Invariante n^{ten} Grades durch die Fundamentalinvarianten bis auf unbestimmte Zahlencoefficienten angeben kann, so erhält man durch die speciellen Fälle Gleichungen, aus denen sich die allgemeinen Ausdrücke von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ bestimmen lassen.

Es ist z. B. der Coefficient von t^2 in $\mathfrak{A}$ vom 12^{ten} Grade, er muss also die Form

$$\alpha A^3 + \beta AB + \gamma C$$

haben. Durch 3 specielle Fälle erhält man 3 Gleichungen für die Zahlencoefficienten α, β, γ. —

Statt vieler specieller Fälle kann man auch einen nehmen, welcher noch willkürliche Grössen enthält; als solchen wählte ich die reciproke Gleichung 5^{ten} Grades:

$$\lambda x^5 + 5\mu x^4 y + 10\sqrt{k}\, x^3 y^2 + 10\sqrt{k}\, x^2 y^3 + 5\mu x y^4 + \lambda y^5,$$

zwischen deren Coefficienten noch die Gleichung

$$\lambda\mu - 4\mu\sqrt{k} + 3k = 0$$

besteht. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{u+1} + \sqrt{u-1}}{\sqrt{u+1} - \sqrt{u-1}}$$

und

$$\frac{x}{y} = -1$$

wenn

$$u = \frac{\lambda - 5\mu + \sqrt{R}}{4\lambda}$$

und

$$R = (5\mu - \lambda)^2 + 4\lambda\,(5\mu + \lambda - 10\sqrt{k})$$

gesetzt wird. Um den Ausdruck für $\frac{x}{y}$ zu vereinfachen, führte ich statt $\lambda, \mu, \sqrt{k}$ solche Grössen ein, welche R zu einem vollständigen Quadrate machen und ausserdem die zwischen λ, μ und $\sqrt{k}$ bestehende Bedingungsgleichung identisch erfüllen. Ich setzte:

$$\lambda = 5m(9l^2-1)(1-25l^2),$$
$$\mu = 3m(5l^2-1)^2,$$
$$\sqrt{k} = m(5l^2-1)(1-25l^2),$$

dann wird

$$\sqrt{R} = 80m \,.\, l(10l^2-1)$$

und

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{10l^2-1} \pm \sqrt{l(2-5l)}}{\sqrt{10l^2-1} \mp \sqrt{l(2-5l)}}.$$

Aus diesem Ausdrucke erhalte ich noch zwei Wurzeln der Gleichung, wenn ich l durch $-l$ ersetze, die 5te Wurzel ist -1. —

Von den Invarianten dieser speciellen Form 5ter Ordnung ist K gleich Null, da K den Factor $\mu - \mu'$ hat und hier $\mu = \mu'$ ist. Zwischen den Invarianten A, B, C besteht also die Bedingungsgleichung $K^2 = 0$, wenn man sich statt K^2 seinen Ausdruck in A, B, C gesetzt denkt. Sonst besteht keine Gleichung zwischen den 3 Invarianten, denn sie sind abhängig von 2 ganz willkürlichen Grössen m und l. — Da dieses m sich bei der Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ immer fortheben wird, weil jeder Coefficient in den Ausdrücken für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ homogen in Bezug auf die Coefficienten der ursprünglichen Form ist, so kann es unbeschadet der Allgemeinheit von vorneherein fortgelassen werden. —

Es lässt sich hier sogleich schätzen, in wie weit dieses Beispiel der Anforderung, die Coefficienten der einzelnen Potenzen von t, u, v, w in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, genügen wird. Da nämlich zwischen den 3 Invarianten A, B, C dieses Beispiels nur eine nicht reducirbare Gleichung $K^2 = 0$ besteht, welche in Bezug auf die Coefficienten der ursprünglichen Form vom 36sten Grade ist, so wird bei der Bestimmung jeder geraden Invariante niedrigeren Grades die specielle Form ebensoviel gelten wie die allgemeine. Das heisst, wenn ich eine Function von m und l habe, welche einer Invariante (von niedrigerem Grade als dem 36sten) gleich sein soll, und ich finde eine Combination von den Invarianten A, B, C des Beispiels, welche dieselbe Function von m und l liefert, so ist dieses die einzig mögliche. Denn gäbe es zwei Combinationen, welche beide gleich dieser Function von m und l sind, so würde ihre Gleichsetzung eine Relation zwischen den Invarianten A, B, C des Beispiels geben, welche von niedrigerem Grade als dem 36sten ist. Dieses ist aber nicht verträglich mit der Irreducibilität der Gleichung $K^2 = 0$. — Statt Function von m und l kann man auch Functionen von l allein betrachten, wenn nur von solchen Verbindungen die Rede ist, welche homogen in Bezug auf die Coefficienten der ursprünglichen Form sind.

Hieraus folgt, dass dieses Beispiel genügt, um alle Coefficienten

in $\mathfrak{A}$ zu bestimmen und in $\mathfrak{B}$ und C alle diejenigen, welche nicht die schiefe Invariante K zum Factor haben. Dagegen würde es nicht mehr ausreichen bei einzelnen Coefficienten in $\mathfrak{D}$, weil diese über den 36^{sten} Grad hinausgehen.

Um für das vorliegende Beispiel die Invarianten und Covarianten zu erhalten, bilde ich zuerst

$$\begin{aligned} g &= \lambda^2 = 25(9l^2-1)^2(25l^2-1)^2, \\ h &= \mu^2 = 9(5l^2-1)^4, \\ k &= (5l^2-1)^2(25l^2-1)^2. \end{aligned}$$

Hiernach ist:

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= g-3h+2k = 5\,.\,2^8 l^2(10l^2-1)^3, \\ B &= \sqrt{A^3}(h-k) = -\sqrt{A^3}\,.\,8(5l^2-1)^2(5l^2+1)(10l^2-1), \\ C &= \sqrt{A^3}\,.\,k = \sqrt{A^5}\,.\,(5l^2-1)^2(25l^2-1)^2, \\ K &= 0, \\ D &= A^2+128B = \sqrt{A^3}\,.\,2^8(10l^2-1)(25l^2-4). \end{aligned}$$

Die 4 cubischen Covarianten erhalten für die Wurzel x_1 der Gleichung $f(x,1)=0$ die Form:

$$\frac{\varphi_1(x_1,1)}{f'_x(x_1,1)} = \sqrt{A}\cdot\frac{3}{5.2^3}\,\frac{5l^2-1}{10l^2-1}\,(5l-1)\sqrt{\frac{10l^2-1}{2l-5l^2}},$$

$$\frac{\varphi_2(x_1,1)}{f'_x(x_1,1)} = -A\cdot\frac{1}{5.2^3}\,\frac{5l^2-1}{10l^2-1}\,\frac{l-1}{l},$$

$$\frac{\varphi_3(x_1,1)}{f'_x(x_1,1)} = -\sqrt{A^3}\cdot\frac{1}{5.2^3}\,\frac{5l^2-1}{(10l^2-1)^2}\,\frac{(5l-1)(5l-2)(2l+1)}{l}\sqrt{\frac{10l^2-1}{2l-5l^2}},$$

$$\frac{\varphi_4(x_1,1)}{f'_x(x_1,1)} = -A^2\cdot\frac{3}{5^2.2^3}\,\frac{5l^2-1}{l^2(10l^2-1)^2}\big(5l(50l^2-7)-(25l^2-2)\big).$$

Die Werthe der Covarianten für die Wurzeln x_2, x_3, x_4 sind hierin mit enthalten, wenn man berücksichtigt, dass die Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{10l^2-1}{2l-5l^2}}$ auch das negative Zeichen haben kann, und dass statt l auch $-l$ eintreten kann. Für die Wurzel $x_0=-1$ ergeben sich die Werthe

$$\varphi_1(x_0,1)=0,$$

$$\frac{\varphi_2(x_0,1)}{f'_x(x_0,1)} = A\cdot\frac{1}{10}\,\frac{5l^2-1}{10l^2-1},$$

$$\varphi_3(x_0,1)=0,$$

$$\frac{\varphi_4(x_0,1)}{f'_x(x_0,1)} = -A^2\cdot\frac{3}{50}\,\frac{5l^2-1)(25l^2-2)}{l^2(10l^2-1)^2}.$$

Es ist nun z. B. der Coefficient von t^2 in $\mathfrak{A}$ gleich

$$-\frac{1}{2} D \sum^i \left[\frac{\varphi_1(x_i, 1)}{f'_x(x_i, 1)}\right]^2.$$

Setzt man hierin die angegebenen Werthe, so ergiebt sich

$$\sqrt{A^5} \cdot \frac{72}{5} (5l^2-1)^2 (25l^2-3).$$

Andrerseits ist der Coefficient von t^2 eine Invariante vom 12^{ten} Grade, hat also die Form:

$$\begin{aligned} &\alpha A^3 + \beta AB + \gamma C \\ = \sqrt{A^5} \{&\alpha . 5 . 2^8 l^2 (10l^2-1)^3 - 2^3 \beta . (5l^2-1)^2 (5l^2+1)(10l^2-1) \\ &+ \gamma (25l^2-1)^2 (5l^2-1)^2\} . \end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke für den Coefficienten von t^2 müssen identisch gleich sein. Setzt man in ihnen

$$5l^2 - 1 = 0, \quad \text{so folgt:} \quad \alpha = 0,$$

setzt man

$$5l^2 + 1 = 0, \quad \text{so folgt:} \quad \gamma = -\frac{16}{5},$$

setzt man endlich

$$25l^2 - 1 = 0, \quad \text{so folgt:} \quad \beta = -5.$$

Somit ist der Coefficient von t^2 in $\mathfrak{A}$ gleich

$$-\frac{1}{5}(25AB + 16C) = -\frac{1}{5}\,{}_1D.$$

In derselben Weise erhält man die übrigen Coefficienten, so dass $-5\mathfrak{A}$ den von Hermite angegebenen Ausdruck erhält:

$$\begin{aligned} -5\mathfrak{A} = D_1 t^2 - 6BDtv - D(D_1 - 10AB)v^2 - BDu^2 \\ + 2DD_1 uw + D(9BD - 10AD_1)w^2. \end{aligned}$$

Nun müssen die Grössen t, u, v, w so bestimmt werden, dass $\mathfrak{A} = 0$ ist. Hermite giebt, wie oben erwähnt, hiefür zwei Lösungen an; es lässt sich diese Gleichung $\mathfrak{A} = 0$ etwas allgemeiner lösen, so nämlich, dass in den Ausdrücken von t und u durch v und w noch eine willkürliche zu bestimmende Grösse vorkommt.

Denkt man sich t und u linear durch die beiden Grössen v und w ausgedrückt

$$t = \alpha v + \beta w,$$
$$u = \gamma v + \delta w,$$

und diese Werthe in die Gleichung $\mathfrak{A} = 0$ eingesetzt, so müssen, da v und w willkürlich bleiben sollen, die Coefficienten von v^2, vw und w^2 verschwinden. Es ergeben sich für $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ folgende Gleichungen:

$$(D_1\alpha-3BD)^2 = BDD_1\gamma^2 + D(D_1^2-10ABD_1+9B^2D),$$
$$(D_1\alpha-3BD)\beta = D(B\delta-D_1)\gamma,$$
$$D(B\delta-D_1)^2 = BD_1\beta^2 + D(D_1^2-10ABD_1+9B^2D).$$

Setzt man hierin zur Abkürzung:

$$D_1^2 - 10ABD_1 + 9B^2D = N,$$
$$D_1\alpha - 3BD = a,$$
$$B\delta - D_1 = b,$$

so erhalten die Gleichungen die einfachere Form:

$$a^2 = D(BD_1\gamma^2+N),$$
$$a\beta = D\,.\,b\,.\,\gamma,$$
$$Db^2 = BD_1\beta^2 + DN,$$

und aus ihnen folgt:

$$a^2\beta^2 - D^2b^2\gamma^2 = DN(\beta^2-D\gamma^2) = 0,$$

also

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{D}}, \qquad b = \frac{a}{\sqrt{D}},$$

und

$$a^2 = BD_1\beta^2 + DN.$$

Die Gleichung $\mathfrak{A} = 0$ wird somit erfüllt durch die Substitution:

$$D_1 t = (a+3BD)\,v + \beta D_1 w,$$
$$B\sqrt{D}\,u = \qquad \beta B\,v + (a+D_1\sqrt{D})\,w,$$

wenn zwischen a und β die Gleichung

$$a^2 = ND + BD_1\beta^2$$

besteht. Die beiden Hermiteschen Lösungen folgen hieraus, wenn man

1. $\quad \beta = 0 \qquad$ also $\quad a = \sqrt{ND},$

2. $\quad a = -3BD - D_1\sqrt{D} \quad$ also $\quad \beta = \sqrt{2D(5A+3\sqrt{D})}$

setzt. —

Um $\mathfrak{B}$ zu bilden, muss man zunächst die Grade der einzelnen Coefficienten bestimmen. Nach dem Vorhergehenden hat der Coefficient von $t_\alpha\,.\,t_\beta\,.\,t_\gamma$ den Grad

$$\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + 5,$$

wenn δ_α, δ_β, δ_γ die Grade der Covarianten $\varphi_\alpha\,\varphi_\beta\,\varphi_\gamma$ bezeichnen, mit welchen $t_\alpha\,t_\beta\,t_\gamma$ multiplicirt ist. Da nun die Covarianten $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4$ bezüglich den Grad 3, 5, 7, 9 haben, so sind die Grade von

$$t^2u,\ t^2w,\ tuv,\ tvw,\ u^3,\ u^2w,\ uv^2,\ uw^2,\ v^2w,\ w^3$$

gleich

$$16,\ 20,\ 20,\ 24,\ 20,\ 24,\ 24,\ 28,\ 28,\ 32$$

und die der Coefficienten von

$$t^3,\ t^2v,\ tu^2,\ tuw,\ tv^2,\ tw^2,\ u^2v,\ uvw,\ v^3,\ vw^2$$

gleich

$$14,\ 18,\ 18,\ 22,\ 22,\ 26,\ 22,\ 26,\ 26,\ 30.$$

Die Coefficienten der zweiten Reihe haben den Factor K, sind also durch die obige Specialform nicht zu bestimmen.

Berücksichtigt man, dass alle Glieder, welche nicht t^2 enthalten, die Discriminante zum Factor haben und dass die niedrigste schiefe Invariante den Grad 18 hat, so erkennt man sofort, dass die Coefficienten von t^3, tu^2, tuw, tv^2, u^2v gleich Null sind. Für die übrigen Coefficienten lassen sich leicht die Formen angeben, welche sie als Functionen von A, B, C und K haben. Es muss z. B. der Coefficient von t^2u die Form

$$\mu A^4 + \nu A^2 B + \pi A C + \varrho B^2$$

haben. — Für die specielle Form $x^5 + y^5$ ist $A = 1$, $B = C = 0$, ferner sind die Covarianten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sämmtlich Null. Es ist also in diesem Falle der Coefficient von t^2u auf der einen Seite gleich Null, auf der andern Seite gleich μ, folglich $\mu = 0$.

Aus demselben Grunde fällt bei den übrigen 9 Coefficienten, welche K nicht enthalten, die höchste Potenz der Invariante A fort. Ersetzt man ferner die Invariante C durch eine andere Invariante 12ten Grades

$$M = AB + C,$$

so wird der Coefficient von t^2u die Form

$$\nu A^2 B + \pi A M + \varrho B^2$$

annehmen, und es lässt sich zeigen, dass dann auch das zweite Glied in dem Coefficienten von t^2u sowohl, wie in jedem der übrigen 9 Coefficienten verschwindet. In der vorher behandelten speciellen Form hat nämlich jede von den Covarianten φ den Factor $(5l^2 - 1)$, jedes Glied von $\mathfrak{B}$ wird also, da

$$\mathfrak{B} = -\frac{D}{3} \sum \left(\frac{t\varphi_1 + u\varphi_2 + v\varphi_3 + w\varphi_4}{f x}\right)^3,$$

den Factor $(5l^2 - 1)^3$ enthalten. —

Auf der anderen Seite würde aber in den Coefficienten von t^2u das Glied $\nu \cdot A^2 B$ das einzige sein, welches nur den Factor $(5l^2 - 1)^2$ hat, denn

$$M = AB + C = 9\sqrt{A^5}\,(5l^2 - 1)^4,$$

also muss ν gleich Null sein, dasselbe gilt für die zweiten Glieder der 9 andern Coefficienten.

Die Bestimmung der Zahlenfactoren erfolgte wie bei $\mathfrak{A}$ und ergab für $\mathfrak{B}$, wenn der Abkürzung halber

$$P = AM - 72B^2$$

gesetzt wird, den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\frac{75}{2}\mathfrak{B} = & -9Pt^2u - 135MDt^2w + 54MDtuv + 54(24B^2 - 17AM)Dtvw \\ & + MDu^3 - 3PDu^2w + 15D(AM - 24B^2)uv^2 \\ & + 9(MD + 10AP)Duw^2 \\ & + 3D(21MD - 10AP)v^2w \\ & + 3D(160D_1^2 + 27D(24B^2 - 17AM))w^3.\end{aligned}$$

Hier fehlen noch die Glieder, welche die schiefe Invariante K enthalten. Um diese zu finden, musste eine andere Specialform gewählt werden. Es sei:

$$f(x, y) = x^5 + 5\alpha x^4 y + 10\beta x^3 y^2 + 10\beta x^2 y^3 + 5\alpha' xy^4 - y^5.$$

Damit $f(xy)$ die canonische Form hat, sind die Coefficienten α, α', β noch folgenden Bedingungen zu unterwerfen:

$$\alpha' - 4\alpha\beta + 3\beta^2 = 0,$$

$$-\alpha - 4\alpha'\beta + 3\beta^2 = 0$$

oder

$$\alpha = \frac{3\beta^2(1+4\beta)}{1+16\beta^2}, \qquad \alpha' = -\frac{3\beta^2(1-4\beta)}{1+16\beta^2}.$$

Ist nun β eine kleine Grösse, so können α und α' nach β entwickelt werden und $f(x, y)$ erhält die Form:

$$\begin{aligned}f(x,y) = & \, x^5 + 15\beta^2(1 + 4\beta - 16\beta^2 - \cdots)x^4y + 10\beta x^3y^2 + 10\beta x^2y^3 \\ & - 15\beta^2(1 - 4\beta - 16\beta^2 + \cdots)xy^4 - y^5.\end{aligned}$$

Die Wurzeln der Gleichung $f(x, 1) = 0$ werden gleich den fünften Wurzeln der Einheit sein, jede vermehrt um eine nach Potenzen von β fortschreitende Reihe. Bezeichnet man also $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ mit α, so wird eine Wurzel x_1 der Gleichung $f(x, 1) = 0$ die Form haben:

$$x_1 = \alpha + b\,.\,\beta + c\,.\,\beta^2 + d\,.\,\beta^3 + \cdots$$

und hieraus folgt:

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \alpha^2 + 2\alpha b\beta + (2\alpha c + b^2)\beta^2 + (2\alpha d + 2bc)\beta^3 + \cdots, \\ x_1^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2 b\beta + (3\alpha^2 c + 3\alpha b^2)\beta^2 + (3\alpha^2 d + 6\alpha bc + b^3)\beta^3 + \cdots, \\ x_1^4 &= \alpha^4 + 4\alpha^3 b\beta + (4\alpha^3 c + 6\alpha^2 b^2)\beta^2 + (4\alpha^3 d + 12\alpha^2 bc + 4\alpha b^3)\beta^3 + \cdots, \\ x_1^5 &= 1 + 5\alpha^4 b\beta + (5\alpha^4 c + 10\alpha^3 b^2)\beta^2 + (5\alpha^4 d + 20\alpha^3 bc + 10\alpha^2 b^3)\beta^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Für die Potenzen der andern Wurzeln x_2, x_3, x_4, x_0 der Gleichung $f(x, 1) = 0$ ergeben sich ähnliche Ausdrücke, man muss nur statt α respective $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^0$ setzen und die Constanten $b, c, d \ldots$ mit andern $b_2, c_2, d_2 \ldots$ etc. $b_0, c_0, d_0 \ldots$ vertauschen.

Setzt man nun für einen Augenblick:

$$f(x,1) = x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$$

und bezeichnet die Potenzsummen der Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 mit $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \ldots$, so ist nach bekannten Formeln:

$$\begin{aligned}
s_1 &= -a_1,\\
s_2 &= a_1^2 - 2a_2,\\
s_3 &= -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3,\\
s_4 &= a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 2a_2^2 + 4a_1a_3 - 4a_4,\\
s_5 &= -a_1^5 + 5a_1^3a_2 - 5a_1a_2^2 - 5a_1^2a_3 + 5a_2a_3 + 5a_1a_4 - 5a_5,
\end{aligned}$$

in unserem Beispiele also bei Vernachlässigung von β^4:

$$\begin{aligned}
s_1 &= -15\beta^2 - 60\beta^3,\\
s_2 &= -20\beta,\\
s_3 &= -30\beta + 450\beta^3,\\
s_4 &= 260\beta^2 + 360\beta^3,\\
s_5 &= 5 + 500\beta^2.
\end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von β, β^2, β^3 in diesen Ausdrücken für $s_1, s_2, \ldots$ und in denjenigen, welche man erhält, wenn man aus den obigen Ausdrücken für $x_1, x_1^2 \ldots$ Σx, $\Sigma x^2 \ldots$ bildet, ergeben sich für die Coefficienten b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 sowohl als für die c und d Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
\Sigma b &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = u_0,\\
\Sigma \alpha b &= b_0 + \alpha\, b_1 + \alpha^2 b_2 + \alpha^3 b_3 + \alpha^4 b_4 = u_1,\\
\Sigma \alpha^2 b &= b_0 + \alpha^2 b_1 + \alpha^4 b_2 + \alpha\, b_3 + \alpha^3 b_4 = u_2,\\
\Sigma \alpha^3 b &= b_0 + \alpha^3 b_1 + \alpha\, b_2 + \alpha^4 b_3 + \alpha^2 b_4 = u_3,\\
\Sigma \alpha^4 b &= b_0 + \alpha^4 b_1 + \alpha^3 b_2 + \alpha^2 b_3 + \alpha\, b_4 = u_4,
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
5b_1 &= u_0 + \alpha^4 u_1 + \alpha^3 u_2 + \alpha^2 u_3 + \alpha\, u_4,\\
5b_2 &= u_0 + \alpha^3 u_1 + \alpha\, u_2 + \alpha^4 u_3 + \alpha^2 u_4,\\
5b_3 &= u_0 + \alpha^2 u_1 + \alpha^4 u_2 + \alpha\, u_3 + \alpha^3 u_4,\\
5b_4 &= u_0 + \alpha\, u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \alpha^4 u_4,\\
5b_0 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4.
\end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von β in $s_1, s_2 \ldots$ und in Σx, $\Sigma x^2 \ldots$ ergiebt sich:

$$\Sigma b = 0, \quad \Sigma \alpha b = -10, \quad \Sigma \alpha^2 b = -10, \quad \Sigma \alpha^3 b = 0, \quad \Sigma \alpha^4 b = 0$$

mithin

$$b_1 = -2(\alpha^3 + \alpha^4)$$

und

$$b_1^2 = \quad 4(\alpha+2\alpha^2+\alpha^3),$$
$$b_1^3 = -8(3+3\alpha+\alpha^2+\alpha^4),$$
$$\Sigma b^2 = 0,\quad \Sigma\alpha b^2 = 0,\quad \Sigma\alpha^2 b^2 = 20,\quad \Sigma\alpha^3 b^2 = 40,\quad \Sigma b^3 = -120,$$
$$\Sigma\alpha b^3 = -40,\quad \Sigma\alpha^2 b^3 = 0.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von β^2 erhält man nun:

$$\Sigma c = -15,\quad \Sigma\alpha c = 0,\quad \Sigma\alpha^2 c = 0,\quad \Sigma\alpha^3 c = 35,\quad \Sigma\alpha^4 c = 20$$

mithin

$$c_1 = -3+4\alpha+7\alpha^2,$$

folglich

$$b_1 c_1 = -2(11+7\alpha-3\alpha^3+\alpha^4)$$

und

$$\Sigma bc = -110,\quad \Sigma\alpha bc = -10,\quad \Sigma\alpha^2 bc = 30,\quad \Sigma\alpha^3 bc = 0,$$

Aus der Vergleichung der Coefficienten von β^3 folgt nun:

$$\Sigma d = -60,\quad \Sigma\alpha d = 110,\quad \Sigma\alpha^2 d = 210,\quad \Sigma\alpha^3 d = 40,\quad \Sigma\alpha^4 d = 0$$

mithin

$$d_1 = -12+8\alpha^2+42\alpha^3+22\alpha^4. -$$

Eine Wurzel der Gleichung $f(x,1)=0$ ist also:

$$x_1 = \alpha - 2\beta(\alpha^3+\alpha^4) - \beta^2(3-4\alpha-7\alpha^2) - 2\beta^3(6-4\alpha^2-21\alpha^3-11\alpha^4)\ldots,$$

und die andern Wurzeln folgen daraus, wenn statt α der Reihe nach α^2, α^3, α^4, α^0 gesetzt wird.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{B}$ hätte die Entwickelung bis zur Potenz β^2 genügt, für den nächsten Ausdruck $\mathfrak{C}$ jedoch nicht.

Die Invarianten dieser speciellen Form erhalten bis β^7 inclusive entwickelt folgende Ausdrücke:

$$\sqrt{A} = -1+2\beta^2+27\beta^4-648\beta^6,$$
$$B = -\sqrt{A^3}\,.\,(1+9\beta^2-216\beta^4)\beta^2,$$
$$C = \quad \sqrt{A^5}\,.\,\beta^2,$$
$$K = -72\sqrt{A^7}\,.\,\beta^5(1-16\beta^2),$$
$$D = -\sqrt{A^3}\,.\,(1+126\beta^2+9.125\beta^4-216.125\beta^6),$$

und für die 4 cubischen Covarianten ergeben sich die Werthe:

$$\frac{5\varphi_1(x_1,1)}{f'_x(x_1,1)} = 3\beta\sqrt{A}\Big\{(\alpha^2+\alpha^3)-3\beta(\alpha-\alpha^4)-\beta^2\big(9(\alpha+\alpha^4)+46(\alpha^2+\alpha^3)\big)$$
$$+\beta^3\big(188(\alpha-\alpha^4)+73(\alpha^2-\alpha^3)\big)\Big\},$$

$$\frac{5\varphi_2(x_1,1)}{f'_x(x_1,1)} = \beta\,.\,A\Big\{-(\alpha^2-\alpha^3)+\beta(\alpha+\alpha^4)-\beta^2\big(7(\alpha-\alpha^4)+6(\alpha^2-\alpha^3)\big)$$
$$-\beta^3\big(44(\alpha+\alpha^4)+43(\alpha^2+\alpha^3)\big)\Big\},$$

$$\frac{5\,\varphi_3(x_1,1)}{f_x'(x_1,1)} = \beta\,.\sqrt{A^3}\Big\{-(\alpha^2+\alpha^3)-13\beta(\alpha-\alpha^4)+\beta^2\big(41(\alpha+\alpha^4)-18(\alpha^2+\alpha^3)\big)$$
$$+7\beta^3\big(28(\alpha-\alpha^4)+(\alpha^2-\alpha^3)\big)\Big\},$$

$$\frac{5\,\varphi_4(x_1,1)}{f_x'(x_1,1)} = 3\beta\,\sqrt{A^3}\Big\{-3(\alpha^2-\alpha^3)-13\beta(\alpha+\alpha^4)+11\beta^2\big((\alpha-\alpha^4)-4(\alpha^2-\alpha^3)\big)$$
$$-\beta^3\big(74(\alpha+\alpha^4)+369(\alpha^2+\alpha^3)\big)\Big\}\cdot$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke erhält man durch beiderseitige Vergleichung gleicher Potenzen von β die noch fehlenden Glieder von $\mathfrak{B}$, so dass nun der vollständige Ausdruck von $\mathfrak{B}$ folgender ist:

$$\frac{75}{2}\,\mathfrak{B} = -9\,Pt^2u + 144\,Kt^2v - 135\,MDt^2w + 54\,MDtuv$$
$$+54(24B^2-17AM)Dtvw + 16.54.KDtw^2 + MDu^3 - 3PDu^2w$$
$$+15(AM-24B^2)Duv^2 - 192\,KDuvw + 9(MD+10AP)Duw^2$$
$$-16\,KDv^3 + 3D(21\,MD-10AP)v^2w + 1440\,AKDvw^2$$
$$+3D\big(160\,D_1^2+27D(24B^2-17AM)\big)w^3. -$$

Setzt man in die Gleichung

$$\mathfrak{B} = 0$$

für t und u

$$t = \frac{3BD+\sqrt{ND}}{D_1}\cdot v,$$

$$u = \frac{D_1+\sqrt{N}}{B}\cdot w,$$

welche Werthe die Gleichung

$$\mathfrak{A} = 0$$

identisch erfüllen, so erhält man für $\frac{v}{w}$ eine cubische Gleichung. Denkt man sich diese gelöst und den Werth von v durch w in die Gleichung

$$t = \frac{3BD+\sqrt{ND}}{D_1}\,v$$

eingesetzt, so ist die Substitution gefunden, welche die allgemeine Form 5ter Ordnung in die Jerrardsche Form überführt.

Für den speciellen Fall

$$K = 0$$

wird der cubischen Gleichung durch $w = 0$ genügt, und es wird sich zeigen, dass die Wurzeln der Gleichung 5ten Grades für z, welche in diesem Falle algebraisch lösbar ist, leicht anzugeben sind.

Um nun die Jerrardsche Form selbst angeben zu können, müssen noch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ bestimmt werden. $\mathfrak{C}$ hat durch die Wurzeln z ausgedrückt, die Form:

$$\mathfrak{C} = -\frac{1}{4} D \cdot \sum \left(\frac{t\varphi_1.(x_i.1) + u.\varphi_2(x_i,1) + v.\varphi_3(x_i,1) + w.\varphi_4(x_i,1)}{f'_x(x_i,1)} \right)^4 + \frac{\mathfrak{A}^2}{2D},$$

das letzte Glied $\frac{\mathfrak{A}^2}{2D}$ kann auch fortgelassen werden, da $\mathfrak{A}$ gleich Null gesetzt wird.

Der Grad des Coefficienten von $t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta$ in $\mathfrak{C}$ ist nach dem Vorhergehenden eine Invariante vom Grade

$$\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + \delta_\delta + 4,$$

und hieraus folgen für die Coefficienten von

$$t^4,\ t^3v,\ t^2u^2,\ t^2uw,\ t^2v^2,\ t^2w^2;\ tu^2v,\ tuvw,\ tv^3,\ tvw^2,\ u^4,\ u^3w,\ u^2v^2,$$
$$u^2w^2,\ uv^2w,\ uw^3,\ v^4,\ v^2w^2,\ w^4$$

19 gerade Invarianten von den Graden:

16, 20, 20, 24, 24, 28; 24, 28, 28, 32, 24, 28, 28, 32, 32, 36, 32, 36, 40,

und für die Coefficienten von

$$t^3u,\ t^3w,\ t^2uv,\ t^2vw;\ tu^3,\ tu^2w,\ tuv^2,\ tuw^2,\ tv^2w,\ tw^3,\ u^3v,\ u^2vw,$$
$$uv^3,\ uvw^2,\ v^3w,\ vw^3$$

16 ungerade Invarianten von den Graden:

18, 22, 22, 26; 22, 26, 26, 30, 30, 34, 26, 30, 30, 34, 34, 38.

Von diesen 35 Coefficienten verschwindet nur der von tu^3, weil er vom Grade 22 ist und die Discriminante D zum Factor hat.

Von den Coefficienten, welche die schiefe Invariante K enthalten, ist der von vw^3 durch die zu Grunde gelegte specielle Form wenigstens bei dem Grade ihrer Entwickelung noch nicht zu bestimmen. Er hat die Form:

$$(\mu A^3 + \nu A^2B + \pi C)\, D\,.\,K,$$

es müssten zu seiner Bestimmung die Coefficienten von β^5, β^7 und β^9 auf beiden Seiten verglichen werden, die Ausdrücke sind aber nur bis zur 7ten Potenz von β entwickelt. Dem nachfolgenden vollständigen Ausdrucke von $\mathfrak{C}$ ist der Werth dieses Coefficienten beigefügt, so wie er sich aus einer anderen Bestimmungsart ergeben hat.

Die der Bestimmung von $\mathfrak{B}$ vollständig analoge Ausführung ergiebt folgenden Ausdruck für $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned}
36\,.\,125\,\mathfrak{C} = {} & 243(AM + 3B^2)t^4 + 108(MD - 3BD_1)t^3v \\
& + 18(3MD - 7BD_1)t^2u^2 \\
& + 36(10D_1^2 + 9D(9B^2 - 7AM))\,t^2uw \\
& + 18(5N + 3(D_1^2 - 5AMD))t^2v^2 + 108(AM - 5B^2)Dtu^2v \\
& + 18(9D(112BM + 99A^2M - 315AB^2) - 100AD_1^2)\,t^2w^2 \\
& - 216(5A^2M - 9AB^2 - 176BM)Dtuvw + (45B^2 - AM)Du^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 108(A^2 M - 13AB^2 + 16BM)Dtv^3 \\
&- 9(7B^2 - AM - 24D_1^2)Dtvw^2 \\
&- 12(MD + 11BD_1)Du^3w \\
&- 6(7A^2M - 51AB^2 + 432BM)Du^2v^2 \\
&- 18(7N + 9(D_1^2 - 5AMD))Du^2w^2 \\
&- 36(2D_1^2 + 45B^2D - 10ABD_1 - 17AMD)Duvw^2 \\
&- 12(40AD_1^2 - 135BDD_1 + 162AB^2D + 729A^2MD)Du^3w \\
&+ (48D_1^2 - 440ABD_1 + 225B^2D - 13AMD \\
&\qquad\qquad\qquad - 8000ABM)Dv^4 \\
&- 18(60AD_1^2 - 500A^2BD_1 + 15BDD_1 - 1224AB^2D \\
&\qquad\qquad\qquad + 117A^2MD)Dv^2w^2 \\
&- 9(224D_1^2 - 1800ABD_1 + 243B^2D - 3159AMD \\
&\qquad\qquad\qquad + 100800ABM)D^2w^4 \\
&+ 216Kt^3u - 432DKtu^2w - 216DKtuv^2 + 16DKu^3v \\
&- 3240AKt^3w + 216AKt^2uv + 7776ADKtuw^2 \\
&+ 1512ADKtv^2w - 288ADKu^2vw + 8ADKuv^3 \\
&+ 432(5A^2 - 2D)DKuvw^2 - 648DKt^2vw \\
&- 1296(25A^2 + 2D)DKtw^3 - 24(41A^2 - 28D)DKv^3w \\
&+ 122880DD_1Kvw^3.
\end{aligned}
$$

Hier haben die Grössen M, D, D_1 und N die oben angegebenen Werthe:

$$
\begin{aligned}
M &= AB + C, & D &= A^2 + 128B, \\
D_1 &= 25AB + 16C, & N &= D_1^2 - 10ABD_1 + 9B^2D \\
& & &= 128(2M^2 + ABM + 9B^3).
\end{aligned}
$$

III.

Eine zweite Art 𝔈 und 𝔇 zu bestimmen:

Den letzten Coefficienten 𝔇 der Jerrardschen Form in derselben Weise zu bestimmen wie die vorhergehenden, würde sehr schwierig sein, denn hier reicht das erste Beispiel nicht aus, um die von der schiefen Invariante freien Glieder zu finden, auch das zweite Beispiel würde viel weiter, nämlich bis zur 13ten Potenz von β, entwickelt werden müssen, was nicht geringe Complicationen verursachen möchte.

Man kann auf einem andern Wege schneller zum Ziele gelangen.

Fasst man nämlich den Ausdruck von 𝔄 als eine quaternäre, cubische Form auf, deren Veränderliche t, u, v, w sind, so lassen sich die Gleichungen:

$$z_1 = t \cdot \frac{\varphi_1(x_1, 1)}{f'_x(x_1, 1)} + u \cdot \frac{\varphi_2(x_1, 1)}{f'_x(x_1, 1)} + v \cdot \frac{\varphi_3(x_1, 1)}{f'_x(x_1, 1)} + w \cdot \frac{\varphi_4(x_1, 1)}{f'_x(x_1, 1)},$$

$$z_2 = t \cdot \frac{\varphi_1(x_2, 1)}{f'_x(x_2, 1)} + u \cdot \frac{\varphi_2(x_2, 1)}{f'_x(x_2, 1)} + v \cdot \frac{\varphi_3(x_2, 1)}{f'_x(x_2, 1)} + w \cdot \frac{\varphi_4(x_2, 1)}{f'_x(x_2, 1)},$$

etc. etc.

oder richtiger ihre Umkehrungen als lineare Substitutionen betrachten, durch welche die quaternäre Form $\mathfrak{B}$ in den Ausdruck:

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 + z_5^3$$

umgewandelt wird, während

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0.$$

(Diese Gleichung $\mathfrak{B} = 0$ ist identisch mit der von Clebsch in den Math. Ann. Bd. IV, p. 332 ff. behandelten Gleichung der Diagonalfläche).

Es lässt sich nun allgemein beweisen, dass jede quaternäre cubische Form durch lineare Transformation in den Ausdruck

$$a_1 z_1^3 + a_2 z_2^3 + a_3 z_3^3 + a_4 z_4^3 + a_5 z_5^3$$

übergeführt werden kann, wenn zwischen den neuen Variablen die Bedingung

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$$

besteht (vgl. Clebsch, über die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche. Crelles Journal Bd. 59), ferner lässt sich zeigen, dass eine Covariante 4ter Ordnung in diesen neuen Variablen ausgedrückt die Form

$$H = \Sigma a_1 a_2 a_3 a_4 z_1 z_2 z_3 z_4$$

und eine andere Covariante 5ter Ordnung die Form

$$\Phi = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \Sigma a_1 a_2 z_1^2 z_2^2 z_3$$

annimmt.

Im vorliegenden Falle, in welchem die a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 alle der Einheit gleich sind, wird also die Covariante H bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante gleich dem Coefficienten $\mathfrak{C}$ dividirt durch D sein. —

Die zweite Covariante Φ ist, wenn $\mathfrak{A}$ verschwindet gleich $-\frac{10\mathfrak{D}}{D}$. Bezeichnet man nämlich für einen Augenblick die Coefficienten der Gleichung fünften Grades für z mit $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, so dass:

$$z^5 + p_1 z^4 + p_2 z^3 + p_3 z^2 + p_4 z + p_5 = 0,$$

so ist:

$$\begin{aligned} -p_2 p_3 &= \Sigma z_1 z_2 \,.\, \Sigma z_1 z_2 z_3 \\ &= \Sigma z_1^2 z_2^2 z_3 + 4 \Sigma z_1^2 z_2 z_3 z_4 + 10 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5, \\ -p_1 p_4 &= \Sigma z_1 \; \Sigma z_1 z_2 z_3 z_4 \\ &= \Sigma z_1^2 z_2 z_3 z_4 + 5 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5, \\ -p_5 &= z_1 z_2 z_3 z_4 z_5, \end{aligned}$$

mithin:

$$\Sigma z_1^2 z_2^2 z_3 = -p_2 p_3 + 4 p_1 p_4 - 10 p_5 .$$

Da im vorliegenden Falle

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{\mathfrak{A}}{D}, \quad p_3 = \frac{\mathfrak{B}}{D}, \quad p_5 = \frac{\mathfrak{D}}{D},$$

so ist:

$$\Phi = \Sigma z_1^2 z_2^2 z_3 = -\frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}}{D^2} - \frac{10\mathfrak{D}}{D},$$

also wenn $\mathfrak{A} = 0$

$$\Phi = -\frac{10\mathfrak{D}}{D}.$$

Kann ich nun die Covarianten H und Φ der cubischen Form $\mathfrak{B}$ in den ursprünglichen Variablen t, u, v, w bestimmen, so weiss ich, dass dieselben bis auf einen leicht zu bestimmenden Factor, welcher eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, mit den Grössen

$$\frac{\mathfrak{C}}{D} \quad \text{und} \quad \frac{-10\mathfrak{D}}{D}$$

übereinstimmen.

Die erste Covariante H ist die Hessische Determinante der Form

$$f = a_1 z_1^3 + a_2 z_2^3 + a_3 z_3^3 + a_4 z_4^3 + a_5 z_5^3$$

d. h.

$$H = \Sigma \pm \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_4^2}\right),$$

die Klammern sollen andeuten, dass die Differentialquotienten nach z_1 resp. z_2 etc. sowohl nach den explicite in f enthaltenen z_1, z_2 etc. als auch nach den in z_5 vorkommenden genommen werden müssen. Hiernach ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_5} \quad \text{etc.}$$

Nach leicht zu übersehender Umwandlung ist nun:

$$H = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_3}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_3}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_3}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_3}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_3^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_4}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_4}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_4^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_5} \\ 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_5} \\ 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_3^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_5} \\ 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_4^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_4 \partial z_5} \\ 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_5} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_5} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_5} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_4 \partial z_5} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_5^2} \end{vmatrix},$$

hier also ist:

$$H = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 z_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 z_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 z_5 \end{vmatrix} = + \Sigma a_1 a_2 a_3 a_4 z_1 z_2 z_3 z_4.$$

Die andere Covariante Φ erhält man aus der Hessischen Determinante H, wenn man statt f $f + \varrho H$ einsetzt, als Coefficienten der ersten Potenz von ϱ. Substituirt man in obige zweite Form von H statt f $f + \varrho H$, so erhält man eine Determinante Ψ und der Coefficient von ϱ^1 kann dargestellt werden als Summe von 5 Determinanten, deren erste, mit Berücksichtigung, dass $\frac{\partial^2 H}{\partial z_1^2} = 0$ ist, so lautet:

$$-\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_4} & \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_5} \\ 1 & a_2 z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 z_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 z_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_5 z_5 \end{vmatrix}.$$

Die 4 anderen Determinanten folgen aus dieser durch cyklische Vertauschung von $z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, z_5$ und $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$.

Da nun:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_2} = a_1 a_2 (a_3 a_4 z_3 z_4 + a_3 a_5 z_3 z_5 + a_4 a_5 z_4 z_5)$$

ist, so lässt sich leicht erkennen, dass

$$\Phi = 2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \; \Sigma a_1 a_2 z_1^2 z_2^2 z_3$$

ist.

Um nun $\frac{\mathfrak{C}}{D}$ zu erhalten, hat man nur die Hessische Determinante H von $-3\frac{\mathfrak{B}}{D}$ zu bilden:

$$H = \frac{3^4}{D^4} \sum \pm \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial w^2}$$

und diese mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante zu multipliciren, welche die quaternäre cubische Form $-3\frac{\mathfrak{B}}{D}$ in die Form

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 + z_5^3$$

überführt. Bezeichnet man diese Substitutionsdeterminante mit r, so wird

$$\mathfrak{C} = r^2 \cdot \frac{3^4}{D^4} \sum \pm \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial w^2}.$$

Der Werth von r lässt sich dadurch bestimmen, dass man irgend ein Glied der Hessischen Determinante von $\mathfrak{B}$ z. B. das Glied, welches t^4 als Factor enthält, berechnet und mit dem in t^4 multiplicirten Gliede von $\mathfrak{C}$ vergleicht. Auf diese Art ergab sich:

$$r^2 = \frac{5^5 D}{6^8 N^2}.$$

Zur Vergleichung habe ich einen grossen Theil der vorher berechneten Glieder von $\mathfrak{C}$ nach dieser Methode bestimmt und dieselben Ausdrücke wie vorher erhalten. Auch liess sich nun leicht der noch fehlende Coefficient von $v w^3$ bestimmen. Es ergab sich für ihn:

$$\frac{2^{11}}{3 \,.\, 5^9} D_1 K D. -$$

Um den letzten Coefficienten der Jerrardschen Form $\mathfrak{D}$ zu bilden, muss man die Covariante Φ für die Form $- 3 \frac{\mathfrak{B}}{D}$ entwickeln und dieselbe durch

$$- 10 \cdot \frac{6^{16}}{5^{10}} \cdot \frac{N^4}{D^3}$$

dividiren, denn es ist

$$- 10 \frac{\mathfrak{D}}{D} = r^4 \,.\, \Phi.$$

Bezeichnet man die einzelnen Elemente der Hessischen Determinante H mit $u_{11}, u_{12}, u_{13}, \ldots$ und die zugehörigen Unterdeterminanten mit $U_{11}\; U_{12}\; U_{13} \ldots$, so ist:

$$\Phi = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \cdot U_{11} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial u} \cdot U_{12} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial v} \cdot U_{13} + \cdots$$

Ersetzt man in dieser Darstellung von Φ die zweiten Differentialquotienten von H durch die entsprechenden von $\mathfrak{C}$, so dass

$$\Phi' = \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t^2} \cdot U_{11} + 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t \partial u} \cdot U_{12} + 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t \partial v} \cdot U_{13} + \cdots$$

so ist:

$$- 10 \mathfrak{D} = r^2 \Phi' = \frac{5^5}{6^8} \frac{D}{N^2} \cdot \Phi'.$$

Der Ausdruck $\mathfrak{D}$ wird allgemein recht complicirt, ich will ihn nur für den Fall

$$K = 0$$

entwickeln. In diesem Falle wird den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A} = 0$$

und

$$\mathfrak{B} = 0$$

durch

$$u = w = 0$$

und

$$t = \frac{3BD + \sqrt{ND}}{D_1} \cdot v$$

genügt.

Wenn $K = 0$, so stellt sich die quaternäre, cubische Form $\mathfrak{B}$ in folgender Weise dar:

$$\mathfrak{B} = at^2u + bt^2w + 2ctuv + 2dtvw + euv^2 + fv^2w.$$

Hier habe ich die Glieder, welche mit u^3, u^2w, uw^2, w^3 multiplicirt sind, fortgelassen, da nach der Bildung der 2^{ten} Differentialquotienten $u = w = 0$ gesetzt wird, diese Glieder also ohne Einfluss sind. Die Hessische Determinante von $\mathfrak{B}$ wird nun:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & at+cv & 0 & bt+dv \\ at+cv & 0 & ct+ev & 0 \\ 0 & ct+ev & 0 & dt+fv \\ bt+dv & 0 & dt+fv & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{(at+cv)(dt+fv) - (bt+dv)(ct+ev)\}^2.$$

Hieraus folgt, dass mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung die Unterdeterminanten

$$U_{11},\ U_{13},\ U_{22},\ U_{24},\ U_{23},\ U_{44}$$

gleich Null sind, folglich

$$-10\mathfrak{D} = \frac{2 \cdot 5^5}{6^6} \frac{D}{N^2} \left\{ U_{12} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t \partial u} + U_{14} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t \partial w} + U_{23} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial u \partial v} + U_{34} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial v \partial w} \right\}.$$

Es werden aber alle 4 Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t \partial u},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t \partial w},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial u \partial v},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial v \partial w},$$

wenn man nach der Differentiation

$$u = w = 0$$

setzt, und wenn ausserdem $K = 0$ ist, auch Null.

Es ist also für den Fall $K = 0$ auch $\mathfrak{D} = 0$ und die Jerrardsche Form reducirt sich auf die Gleichung:

$$D \cdot z^5 + \mathfrak{C} z = 0,$$

die 5 Wurzeln sind also

$$z_1 = 0,\quad z_{2,3,4,5} = \sqrt[4]{-\frac{\mathfrak{C}}{D}}.$$

Als Nebenresultat ergiebt sich, dass, wenn die schiefe Determinante verschwindet, die Gleichung fünften Grades sich algebraisch

auflösen lässt, (vgl. Clebsch, Theorie der linearen algebraischen Formen S. 355 und 378 und Math. Annalen Bd. IV, S. 298). —

Anmerkung: Die von Clebsch mit

$$A,\ B,\ C,\ M,\ N \text{ und } R$$

bezeichneten Invarianten der Form fünfter Ordnung werden in der Hermiteschen Bezeichnung

$$-2A,\ -8B,\ \frac{32}{3}(AB+C),\ -32C,\ -\frac{32}{3}(A^2B+AC+3B^2),$$

$$\frac{32}{3}K.$$

Königsberg im Juli 1886.

Theorie der trinomischen Gleichungen.

Von

W. HEYMANN in Dresden.

In der vorliegenden Abhandlung wollen wir zeigen, dass sich die trinomische Gleichung

$$t^n + at^{n-s} + b = 0$$

unter allen Umständen durch geschlossene, verhältnissmässig einfache Ausdrücke — *bestimmte Integrale* — auflösen lässt. Die Integrale entwickeln wir sodann in *Reihen* und prüfen diese auf ihre Convergenz. Den Schluss bilden einige unerlässliche Bemerkungen über die *Differentialresolvente* der trinomischen Gleichung.

I.

Fundamentalformen der trinomischen Gleichung.

Die Gleichung

$$t^n + at^{n-s} + b = 0$$

kann mittelst der Substitutionen

$$t = ky, \quad \text{respect.} \quad t = k\eta$$

jederzeit in eine der beiden *Fundamentalformen*

$$(1) \qquad y^n + \ y^{n-s} + x = 0,$$

$$(2) \qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

transformirt werden, welche letztere dann in folgender Weise an einander gebunden sind:

$$(3) \qquad x^s = \xi^{-n}; \quad y = \eta\,\xi^{-\frac{1}{s}}, \quad \text{resp.} \quad \eta = y\,x^{-\frac{1}{n}}.$$

Diese Zurückführung der ursprünglichen Gleichung auf *zwei* Formen ist erforderlich, weil die Lösung, die wir aufstellen, nicht für alle Werthe von a und b gebraucht werden kann. Sie ist aber auch hinreichend, da die Lösung von (1) so lange gilt, als die von (2) versagt, und umgekehrt.

II.

Auflösung der ersten Fundamentalform.

Wir müssen, wie das aus dem Verlauf der Rechnung von selbst deutlich wird, zwei Fälle unterscheiden:

A) *Es sollen jene s Wurzeln der Gleichung* (1) *dargestellt werden, welche mit x nicht gleichzeitig verschwinden.*

B) *Es sollen die übrigen $n-s$ Wurzeln dargestellt werden, welche mit x gleichzeitig verschwinden.*

A.

Die mit x nicht gleichzeitig verschwindenden s Wurzeln der Fundamentalform

$$(1) \qquad y^n + y^{n-s} + x = 0$$

sind enthalten in folgendem Integrale

$$(4) \qquad y = \frac{-\varepsilon_k^{n-1}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^x dx \left\{ \int_{v'}^{v''} \frac{dv}{v^n + v^{n-s} + \varepsilon_k^n x} \right\} + (-1)^{\frac{1}{s}},$$

wo

$$\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{s}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1$$

bedeutet und wo

$$v' = \left(-\tfrac{1}{2} - \infty\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad v'' = \left(-\tfrac{1}{2} + \infty\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Hier können die complexen Grenzen befremdlich erscheinen; indessen ist es in Rücksicht auf gewisse allgemeine Betrachtungen*) nicht zweckmässig, jene Grenzen in reelle umzusetzen, denn man zerstört dabei den *charakteristischen Nenner*

$$v^n + v^{n-s} + \varepsilon_k^n x.$$

Anders, wenn das Integral für bestimmte Werthe von x ausgewerthet werden soll. Wir werden dann in der That *reelle* Grenzen einführen und erkennen, dass wir es mit Integralformen zu thun haben, die einen ganz präcisen Sinn besitzen und die nach Cauchy durch Gammafunctionen ausdrückbar sind.

Zunächst wollen wir aber zeigen, dass das Integral (4) die Gleichung (1) wirklich identisch befriedigt, und zu diesem Zwecke fragen wir, *wie jenes Integral potenzirt wird.*

Falls y in (4) eine Lösung von (1) ist, so wird y^m offenbar so gebildet werden können, dass wir in (4) an Stelle der Zahlen n und s die Brüche $\frac{n}{m}$, beziehentlich $\frac{s}{m}$ schreiben. Thun wir dies, setzen

*) Vergl. Abschnitt V.

$y^m = z$ und führen an Stelle von $v^{\frac{1}{m}}$ die neue Integrationsvariabele w ein, so erhalten wir

$$(5) \qquad z = \frac{-m\,\varepsilon_k^{n-m}}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_0^x dx \left\{ \int\limits_{w'}^{w''} \frac{w^{m-1}\,dw}{w^n + w^{n-s} + \varepsilon_k^n x} \right\} + (-1)^{\frac{m}{s}}.$$

ε_k bedeutet nach wie vor eine der Wurzeln von

$$\varepsilon^s = 1,$$

ebenso haben die Grenzen die frühere Gestalt

$$w' = \left(-\tfrac{1}{2} - \infty\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad w'' = \left(-\tfrac{1}{2} + \infty\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Für $m = 1$ kommt man, wie nothwendig, auf das Integral (4) zurück. Ist $m \geqq n$, so wird das Integral (5) offenbar unendlich. Indessen kann man sich durch eine einfache Transformation *unter allen Umständen ein brauchbares Integral* verschaffen.

Man differenzire in diesem Falle den Ausdruck (5) ν mal nach x und integrire hierauf rückwärts ν mal zwischen den Grenzen 0 und x, dann entsteht

$$(6) \qquad z = \frac{(-1)^\nu(\nu-1)!\,m\,\varepsilon_k^{\nu n-m}}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_0^x{}^{\nu} dx^\nu \left\{ \int\limits_{w'}^{w''} \frac{w^{m-1}\,dw}{(w^n + w^{n-s} + \varepsilon_k^n x)^\nu} \right\}$$
$$+ \sum_{h=0}^{\nu-1} \alpha_h \frac{x^h}{h!},$$

und hierin ist statt ν die kleinste, ganze, positive Zahl zu setzen, für welche noch

$$\nu n - m > 0.$$

Die Summe $\sum\limits_{h=0}^{\nu-1} \alpha_h \frac{x^h}{h!}$ wird durch die ν fache Integration in das Resultat hineingezogen; in ihr bedeutet, wie man leicht übersieht,

$$\alpha_h = \left(\frac{d^h z}{dx^h}\right)_{x=0}.$$

Dieser Differentialquotient, den wir wiederholt gebrauchen werden, lässt sich aus der Fundamentalform (1) ableiten, wenn man eine von Herrn Schlömilch aufgestellte Formel*) benutzt. Mittelst dieser Formel erschliesst man ohne Weiteres, dass

---

*) Diese Formel bedeutet

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_\varrho^{n-1} \left\{ \left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho) - \varphi(y)} \right)^n f'(y+\varrho) \right\}_{\varrho=0}, \quad x = \varphi(y)$$

und findet sich in Schlömilch's „Vorlesungen über höhere Analysis".

$$\left(\frac{d^h z}{dx^h}\right)_{x=0} = m\left\{\frac{d^h}{dx^h}\left[\frac{y^{m-h(n-s)}}{m-h(n-s)}\right]\right\}_{x=0},$$

wo das y im Quotienten auf der rechten Seite der trinomischen Gleichung

$$y^s + 1 + x = 0$$

zu entnehmen ist. Führt man die Differentiation wirklich aus, so entsteht

$$(7)\quad \alpha_h = \frac{m}{s}(-1)^{\frac{m-hn}{s}-1}\prod_{k=1}^{h-1}\left\{k + \frac{h(n-s)-m}{s}\right\},\qquad \prod_1^0 = 1,$$

und *dieser s-deutige Ausdruck stellt jene s Ableitungen, welche zu den nicht gleichzeitig mit x verschwindenden Wurzeln der Fundamentalform* (1) *gehören, dar.* — Die zu den übrigen $n-s$ Wurzeln gehörigen Differentialquotienten werden für $x=0$ zum Theil unendlich gross, zum Theil verschwinden sie.

Diese Zwischenbemerkungen waren nöthig, wenn wir die ursprünglichen Betrachtungen fortsetzen, also unser Integral in die linke Seite der trinomischen Gleichung (1) einführen wollen.

Wir haben zunächst y^n zu bilden, d. h. im Integrale (6) $m=n$ zu setzen und eben deswegen $\nu = 2$ zu wählen; für die Bildung von y^{n-s} würde es genügen, $\nu = 1$ zu nehmen. Da indessen beide Potenzen zu addiren sind, so wird man der bequemeren Vereinigung wegen zweckmässig in beiden Fällen $\nu = 2$ setzen und hiernach folgendes erhalten.

$$y^n + y^{n-s} = \frac{\varepsilon_k^n}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^x\int_0^x dx^2\left\{\int_{w'}^{w''}\frac{nw^{n-1}+(n-s)w^{n-s-1}}{(w^n+w^{n-s}+\varepsilon_k^n x)^2}\,dw\right\}$$

$$+ (\alpha_0 + \alpha_1 x)_{m=n} + (\alpha_0 + \alpha_1 x)_{m=n-s}.$$

Hierin bedeuten

$$\alpha_0 = (z)_{x=0} = (-1)^{\frac{m}{s}},\qquad \alpha_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = \frac{m}{s}(-1)^{\frac{m-n}{s}+1},$$

und daher ist

$$(\alpha_0)_{m=n} + (\alpha_0)_{m=n-s} = 0,\qquad (\alpha_1)_{m=n} + (\alpha_1)_{m=n-s} = -1.$$

Beachten wir noch, dass das Integral in Bezug auf w ausführbar ist und

$$\left[\frac{-1}{w^n + w^{n-s} + \varepsilon_k^n x}\right]_{w'}^{w''} = 0$$

liefert, dann haben wir ohne Weiteres

$$y^n + y^{n-s} = -x,$$

d. h. aber, *die Fundamentalform* (1) *wird durch das Integral* (4),

oder genauer gesagt, durch jene Integrale, welche aus (4) *abgeleitet werden, identisch befriedigt.*

In unserem Calcül ist jedoch noch eine sehr wesentliche Unbestimmtheit verblieben, die wir sogleich beseitigen wollen.

Führen wir nämlich an Stelle von y die Summe

$$\sum_{k=0}^{s-1} \left\{ c_k J(\varepsilon_k, x) \right\} + (-1)^{\frac{1}{s}},$$

in welcher J die in (4) vorkommende Quadratur verzeichnet und c_0 bis c_{s-1} beliebige Constante sind, auf der linken Seite der Gleichung (1) ein, so würde, wenn wir nur genau das frühere Verfahren einhalten, jene Seite identisch verschwinden, weil eben jedes der auftretenden Integrale unabhängig von k für sich verschwindet. Indess man kann leicht zeigen, dass nicht die angegebene Summe, sondern dass *einzig und allein* der Ausdruck (4) die gesuchte Lösung der Gleichung (1) ist.

Zu diesem Zwecke beachte man, dass die höheren Differentialquotienten

$$\left(\frac{d^h y}{dx^h}\right)_{x=0}, \quad \text{oder allgemeiner} \quad \left(\frac{d^h z}{dx^h}\right)_{x=0}, \quad z = y^m,$$

mögen sie aus der trinomischen Gleichung oder aus deren Lösung berechnet werden, übereinstimmen müssen.

Entnimmt man $\left(\frac{d^h z}{dx^h}\right)_{x=0} = \alpha_h$ der Gleichung (1), so kommt man zu dem bereits unter Nr. 7 angegebenen Ausdruck. — Berechnet man dieselbe Grösse aus den Integralen (5) oder (6), so entsteht

$$\alpha_h = \frac{(-1)^h \, (h-1)! \, m \, \varepsilon_k^{hn-m}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{w'}^{w''} \frac{w^{m-1} \, dw}{(w^n + w^{n-s})^h},$$

oder, wenn der Integrationsweg nach Massgabe der Substitution

$$w = \left(-\frac{1}{2} + u\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}}$$

in das reelle Gebiet verlegt wird,

$$\alpha_h = \frac{m}{s} (-1)^{\frac{m-hn}{s} - 1} \varepsilon_k^{hn-m} \frac{(h-1)!}{2\pi} \tag{8}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\left(\frac{1}{2} + u\sqrt{-1}\right)^h \left(\frac{1}{2} - u\sqrt{-1}\right)^{\frac{h(n-s)-m}{s} + 1}}.$$

Nun ist

$$(9)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\left(\frac{1}{2}+u\sqrt{-1}\right)^p \left(\frac{1}{2}-u\sqrt{-1}\right)^q} = 2\pi \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, \quad \left.\begin{matrix} p+q>1 \\ p>0,\ q>0 \end{matrix}\right\},$$

ausserdem kann man ε_k^{hn-m} in den vorhergehenden s deutigen Factor $(-1)^{\frac{m-hn}{s}}$ eingehen lassen, folglich ergiebt sich

$$(10)\qquad \alpha_h = \frac{m}{s}(-1)^{\frac{m-hn}{s}-1} \frac{\Gamma\left(h+\frac{h(n-s)-m}{s}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{h(n-s)-m}{s}\right)},$$

Das Integral unter Nr. 9 erhält man augenblicklich, wenn man in dem allgemeinen

$$(a)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(r+u\sqrt{-1})^p (s-u\sqrt{-1})^q} = \frac{2\pi}{(r+s)^{p+q-1}} \cdot \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

$r = s = \frac{1}{2}$ setzt. Letzteres hat Cauchy aufgestellt in „Mém. sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires". Paris 1825, wie man in den älteren „Tables d'intégrales définies" von Bierens de Haan (Table 30, page 67) ersehen kann.

Wir sind zur Integralformel (a) unabhängig von Cauchy gelangt und zwar auf folgendem Wege.

Wir überlegten, dass der Ausdruck unter Nr. 8, wenn er — wie gewünscht wird — von dem unter Nr. 7 nicht verschieden sein soll, im Wesentlichen das in (7) vorkommende Product $\prod\limits_{k=1}^{h-1}$ enthalten muss. Da nun ein solches Product jederzeit durch den Quotienten zweier Gammafunctionen darstellbar ist, so versuchten wir das in (8) auftretende Integral in diesem Sinne auszuwerthen, und das führte uns zu nachstehender kurzen Ableitung des Cauchy'schen Integrales.

Wir gehen von dem für unsere Zwecke augenscheinlich sehr geeigneten Laplace'schen Integrale

$$(b)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha}{(x+\alpha\sqrt{-1})^p} = \frac{2\pi e^{-x}}{\Gamma(p)}, \quad p>0, \quad x>0$$

aus, über welches Näheres in einer Arbeit von Liouville (Crelle's J. Bd. 13) und Kummer (Crelle's J. Bd. 17, S. 236) zu ersehen ist.

In dieses Integral substituiren wir $x = rv$, $\alpha = uv$, unter u die neue Integrationsvariabele verstanden, dann entsteht

$$(c)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{uv\sqrt{-1}}\, du}{(r+u\sqrt{-1})^p} = \frac{2\pi v^{p-1} e^{-rv}}{\Gamma(p)}.$$

Multipliciren wir beiderseits mit $v^{q-1} e^{-sv}$ und integriren in Bezug auf v zwischen

oder, wenn die Gammafunction im Zähler in ein Product zerlegt wird,

$$(7) \qquad \alpha_h = \frac{m}{s}(-1)^{\frac{m-hn}{s}-1} \prod_{k=1}^{h-1} \left\{k + \frac{h(n-s)-m}{s}\right\}, \quad \prod_{1}^{0} = 1.$$

Das ist aber in der That der früher aufgestellte Differentialquotient.

Hiermit ist endgiltig bewiesen, dass das Integral (5) *wie auch das aus ihm abgeleitete* (6) *die mten Potenzen von s Wurzeln der Fundamentalform*

$$(1) \qquad y^n + y^{n-s} + x = 0$$

darstellt, wenn für ε_k successive die sten Einheitswurzeln gesetzt werden.

Dass wir insbesondere zu jenen Wurzeln der Gleichung (1) gelangt sind, welche mit x nicht gleichzeitig verschwinden, lehrt der blosse Anblick der Lösungen, und dass ihre Anzahl s beträgt, beruht auf der s-Deutigkeit von ε_k.

B.

Ermitteln wir nun auch die $m$ten Potenzen der mit x gleichzeitig verschwindenden Wurzeln der ersten Fundamentalform.

Hierbei haben wir nicht nöthig, neue Integralformen aufzusuchen, wir kommen vielmehr durch eine einfache *Transformation der früheren Lösung* zum Ziele.

Bezeichnen wir das Integral unter Nr. 6 kurz durch

$$(\alpha) \qquad z = \vartheta(m, n, s, x)$$

und vertauschen sodann die Buchstaben

$$\begin{array}{lccccc} & m & s & x & y & z \\ \text{mit} & & & & & \\ & -m & n-s & u & v^{-1} & w, \end{array}$$

so erhalten wir

$$(\beta) \qquad w = \vartheta(-m, n, n-s, u).$$

---

0 und ∞, wobei dann $r > 0$, $s > 0$ vorausgesetzt werden muss, so erhalten wir nach Umkehr der Integrationenfolge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(r+u\sqrt{-1})^p} \int_0^\infty v^{q-1} e^{-(s-u\sqrt{-1})} dv \frac{2\pi}{\Gamma(p)} \int_0^\infty v^{p+q-2} e^{-(r+s)v} dv,$$

oder, da die beiden Integrale mit den Grenzen 0 und ∞ einfache Gammafunctionen sind,

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(r+u\sqrt{-1})^p (s-u\sqrt{-1})^q} = \frac{2\pi}{(r+s)^{p+q-1}} \cdot \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, \quad \left.\begin{array}{r} p+q>1 \\ p>0,\ q>0 \\ r>0,\ s>0 \end{array}\right\},$$

also genau das Cauchy'sche Integral.

Die Gleichung

(a) $$y^n + y^{n-s} + x = 0, \qquad y^m = z$$

geht bei dieser Vertauschung über in

(b) $$uv^n + v^{n-s} + 1 = 0, \qquad v^m = w,$$

und von Gleichung (b) ist nun w in (β) die Lösung, oder genauer gesprochen: w stellt die $m$ten Potenzen jener $n-s$ Wurzeln der Gleichung (b) dar, welche für $u=0$ nicht unendlich gross werden.

Substituiren wir in die Gleichung (b), sowie in deren Lösung (β)

$$u = x^{\frac{s}{n-s}}, \quad v = yx^{-\frac{1}{n-s}}, \quad w = zx^{-\frac{m}{n-s}},$$

so kommen wir, wie leicht zu sehen, zur Gleichung (a) zurück mit der neuen $n-s$ deutigen Lösung

$$zx^{-\frac{m}{n-s}} = \vartheta\left(-m, n, n-s, x^{\frac{s}{n-s}}\right).$$

Sonach besteht folgender Satz:

Stellt

$$z = \vartheta(m, n, s, x)$$

die mten Potenzen der s mit x nicht gleichzeitig verschwindenden Wurzeln der Fundamentalform

(1) $$y^n + y^{n-s} + x = 0$$

dar, so repräsentirt

(11) $$z = x^{\frac{m}{n-s}}\,\vartheta\left(-m, n, n-s, x^{\frac{s}{n-s}}\right)$$

die mten Potenzen der n — s mit x gleichzeitig verschwindenden Wurzeln.

III.

Auflösung der zweiten Fundamentalform.

Wir wollen zeigen, *dass sämmtliche Wurzeln der zweiten Fundamentalform*

(2) $$\eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

in dem Ausdrucke

(12) $$\eta = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^{\xi} d\xi \left\{ \int_0^{\infty} v^{n-s}[g(\varepsilon_{k+1}) - g(\varepsilon_k)]\,dv \right\} + (-1)^{\frac{1}{n}}$$

enthalten sind, wo

$$g(\varepsilon_k) = \frac{\varepsilon_k^{s-1}}{v^n + \varepsilon_k^s \xi v^{n-s} + 1}$$

und

$$\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

bedeutet.

Bilden wir zunächst *eine beliebige Potenz* $\eta^m = \zeta$. Indem wir uns nur früher gemachter Bemerkungen zu erinnern brauchen, gelangen wir zu folgendem Integrale

$$(13)\quad \zeta = \frac{(-1)^\nu(\nu-1)!\,m}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_0^\xi{}^{\nu} d\xi^\nu \left\{ \int\limits_0^\infty w^{\nu(n-s)+m-1}[g(\varepsilon_{k+1}) - g(\varepsilon_k)]\,dw \right\}$$
$$+ \sum_{h=0}^{\nu-1} \alpha_h \frac{\xi^h}{h!},$$

wobei nun

$$g(\varepsilon_k) = \frac{\varepsilon_k^{\nu s - m}}{(w^n + \varepsilon_k^s \xi w^{n-s} + 1)^\nu},$$

während ε_k seine Bedeutung beibehalten hat. Statt ν hat man die kleinste, ganze, positive Zahl zu wählen, für welche

$$\nu(n-s) - m, \quad \text{respect.} \quad \nu s - m$$

eben noch positiv ausfällt. Weiter ist

$$\alpha_h = \left(\frac{d^h\zeta}{d\xi^h}\right)_{\xi=0},$$

und dieser Differentialquotient kann leicht aus der Fundamentalform (2) berechnet werden.

Man hat nämlich zunächst

$$\left(\frac{d^h\zeta}{d\xi^h}\right)_{\xi=0} = m\left\{\frac{d^h}{d\xi^h}\left[\frac{\eta^{m-hs}}{m-hs}\right]\right\}_{\xi=0},$$

wo das η im Quotienten auf der rechten Seite der binomischen Gleichung

$$\eta^{-n} + \xi + 1 = 0$$

zu entnehmen ist. Führt man die Differentiation wirklich aus, so entsteht

$$(14)\quad \alpha_h = \frac{m}{n}(-1)^{\frac{hs-m}{n}+h} \prod_{k=1}^{h-1}\left\{k - \frac{hs-m}{n}\right\}, \qquad \prod_1^0 = 1,$$

und *dieser n deutige Ausdruck stellt die den n Wurzeln der Gleichung* (2) *entsprechenden Ableitungen von* η^m *nach* ξ *für* $\xi = 0$ *dar.*

Sehen wir nun zu, ob das Integral (12) die zweite Fundamentalform

$$(2)\qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

befriedigt. Um Potenzen zu erhalten, die von ξ frei sind — was

letzteres bei der Vereinigung der Integrale wünschenswerth ist — ertheilen wir der Gleichung (12) die Form

$$\eta^s + \xi + \eta^{s-n} = 0,$$

und nun bilden wir mit Hilfe des Ausdruckes (13) die Potenzen η^s und η^{s-n}. Wie früher muss auch hier $\nu = 2$ gewählt werden, und dann ergiebt sich

$$\eta^s + \eta^{s-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^\xi \int_0^\xi d\xi^2 \left\{ T_{\varepsilon_{k+1}} - T_{\varepsilon_k} \right\} + (\alpha_0 + \alpha_1 \xi)_{m=s} + (\alpha_0 + \alpha_1 \xi)_{m=s-n},$$

wobei

$$T_{\varepsilon_k} = \varepsilon_k^s \int_0^\infty \frac{w^{n-s-1}\left(s w^n - (n-s)\right) dw}{\left(w^n + \varepsilon_k^s\, \xi w^{n-s} + 1\right)^2},$$

$$\alpha_0 = (\zeta)_{\xi=0} = (-1)^{\frac{m}{n}}, \qquad \alpha_1 = \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{m}{n}(-1)^{\frac{s-m}{n}+1}.$$

Das Integral T_{ε_k} lässt sich ausführen und liefert

$$\varepsilon_k^s \left[\frac{-w^{n-s}}{w^n + \varepsilon_k^s\, \xi\, w^{n-s} + 1} \right]_0^\infty = 0,$$

in gleicher Weise verschwindet $T_{\varepsilon_{k+1}}$, weiterhin hat man

$$(\alpha_0)_{m=s} + (\alpha_0)_{m=s-n} = 0, \qquad (\alpha_1)_{m=s} + (\alpha_1)_{m=s-n} = -1.$$

Folglich entsteht

$$\eta^s + \eta^{s-n} = -\xi,$$

d. h. aber, *die Fundamentalform* (2) *wird durch das Integral* (12), *respect. durch* (13), *welches aus* (12) *hervorgeht, identisch befriedigt.*

Wie man sieht, könnte in den Integralen (12) und (13) statt der zweigliedrigen Verbindung

$$G = g(\varepsilon_{k+1}) - g(\varepsilon_k)$$

die allgemeinere

$$G_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, g(\varepsilon_k), \qquad c_k = \text{const.}$$

gewählt werden, ohne dass sich zunächst in unserer Beweisführung etwas änderte. Es würden dann n Integrale

$$c_k T_{\varepsilon_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

entstanden sein, die jedoch sämmtlich identisch verschwinden. — Dass indessen nur die anfangs benutzte zweigliederige Verbindung G zulässig ist, kann und muss man wieder nachträglich dadurch zur Entscheidung

bringen, dass man den allgemeinen Differentialquotienten $\left(\frac{d^h \zeta}{d\xi^h}\right)_{\xi=0} = \alpha_h$ aus der Lösung (13) bestimmt und zeigt, dass er von jenem unter Nr. 14, der direct aus der trinomischen Gleichung (2) berechnet wurde, nicht verschieden ist.*)

Nun folgt aus (13)

$$\alpha_h = \frac{(-1)^h (h-1)!\, m}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{w^{h(n-s)+m-1}\, dw}{(w^n+1)^h} \left(\varepsilon_{k+1}^{hs-m} - \varepsilon_k^{hs-m}\right);$$

es ist aber

$$\int_0^\infty \frac{w^{\lambda-1}\, dw}{(w^n+1)^h} = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right) \Gamma\left(h - \frac{\lambda}{n}\right)}{\Gamma(h)},$$

und ausserdem, zufolge der Bedeutung von ε_k,

$$\varepsilon_{k+1}^{hs-m} - \varepsilon_k^{hs-m} = (-1)^{\frac{hs-m}{n}} \,.\, 2\sqrt{-1} \sin \frac{hs-m}{n}\pi.$$

Mithin entsteht

$$(15)\quad \alpha_h = \frac{m}{n}(-1)^{\frac{hs-m}{n}+h}\, \Gamma\left(h - \frac{hs-m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{hs-m}{n}\right) \cdot \frac{\sin\frac{hs-m}{n}\pi}{\pi},$$

oder, wenn das Product der Gammafunctionen nach Vorschrift der Formel

$$\Gamma(h-a)\, \Gamma(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \prod_{k=1}^{h-1} (k-a)$$

umgestaltet wird,

$$(14)\quad \alpha_h = \frac{m}{n}(-1)^{\frac{hs-m}{n}+h} \prod_{k=1}^{h-1} \left\{k - \frac{hs-m}{n}\right\}, \quad \prod_1^0 = 1,$$

und das ist in der That der schon früher gefundene Ausdruck.

Hiermit ist endgiltig erwiesen, dass der Ausdruck (13) *die mten Potenzen sämmtlicher Wurzeln der Fundamentalform*

$$(2)\qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

darstellt.

---

*) Es kann auffällig erscheinen, dass der trinomischen Gleichung scheinbar ein Ausdruck genügt, dem doch die Eigenschaft einer Lösung abgesprochen wird. — Indessen darf man nicht ausser Acht lassen, dass unsere Methode, die Lösung zu potenziren, bereits die Richtigkeit der Lösung voraussetzt. Es ist daher die Potenzbildung, wie sie in Abschnitt II und III vorkommt, erst dann gerechtfertigt, wenn man durch Vergleich der höheren Differentialquotienten die richtige Lösung von den scheinbaren ausgeschieden hat.

IV.

Reihenentwickelung für die Integrale.

Wir wollen nun die aufgestellten Integrale in Reihen entwickeln, um aus der Convergenz der letzteren einen Schluss auf die Brauchbarkeit der ersteren zu ziehen. — Ueberdiess werden wir auch später (in Abschnitt VI) aus der Gestalt der Reihen unmittelbar die Form der Differentialresolventen erschliessen können und dadurch sehr umständliche Rechnungen vermeiden.

Dem Früheren gemäss sind drei Fälle zu behandeln.

A) Wir entwickeln das Integral (5) oder, was genau auf dasselbe hinauskommt, das Integral (6) nach steigenden Potenzen von x und erhalten

$$\left.\begin{aligned} z &= \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \frac{x^h}{h!} = \sum_{h=0}^{s-1} R_h, \\ R_h &= \alpha_h \frac{x^h}{h!} + \alpha_{h+s} \frac{x^{h+s}}{(h+s)!} + \alpha_{h+2s} \frac{x^{h+2s}}{(h+2s)!} + \cdots \end{aligned}\right\}.$$

Die hier vorkommenden Differentialquotienten α_{h+s}, α_{h+2s}, etc. können sämmtlich durch den Anfangswerth α_h ausgedrückt werden. Denn lässt man in dem Ausdruck für α_h unter Nr. 10 die Zahl h um s wachsen und zerlegt alsdann die Gammafunctionen in solche Producte, dass die ursprünglichen Functionen wieder erscheinen, so ergiebt sich

$$\alpha_{h+s} = \frac{\varphi(h)}{\psi(h+s)} \alpha_h, \tag{16}$$

und hierin bedeuten

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(h) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left\{h + k\frac{s}{n} - \frac{m}{n}\right\}, \\ \psi(h) &= \Delta \prod_{k=0}^{n-s-1} \left\{h - k\frac{s}{n-s} - \frac{m}{n-s}\right\}, \\ &\qquad \Delta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Die Grösse Δ ist ein charakteristischer Bestandtheil der Discriminanten der Fundamentalformen, auch die Functionen φ und ψ haben eine tiefer gehende Bedeutung; sie treten, wie wir sehen werden, in der Differentialresolvente, welche zu Gleichung (1) gehört, auf.

Bestimmt man nun mittelst Formel (16) successive α_{h+2s}, α_{h+3s}, etc., so gelangt man zu folgender Reihe

$$(18)\quad \begin{cases} z = \sum_{h=0}^{s-1} R_h, \\ R_h = \alpha_h \left\{ \frac{x^h}{h!} + \frac{\varphi(h)}{\psi(h+s)} \frac{x^{h+s}}{(h+s)!} + \frac{\varphi(h)\ \varphi(h+s)}{\psi(h+s)\psi(h+2s)} \frac{x^{h+2s}}{(h+2s)!} + \cdots \right\}, \end{cases}$$

und *diese stellt die $m$ten Potenzen jener s Wurzeln der Fundamentalform*

$$(1)\qquad y^n + y^{n-s} + x = 0$$

dar, welche mit x nicht gleichzeitig verschwinden.

Die Grösse α_h entnimmt man aus Nr. 7 und ertheilt ihr successive jene s *verschiedenen Werthe*, wie sie dem Symbol

$$(-1)^{\frac{m-hn}{s}}$$

entsprechen. — Die Reihen R_h *convergiren*, wenn

$$\frac{x^s}{\Delta} \leqq 1.$$

B) Die $m$ten Potenzen *der übrigen $n-s$ mit x gleichzeitig verschwindenden Wurzeln* der Gleichung (1) werden nach Abschnitt II, B) dadurch gefunden, dass man in der Lösung (18) die Grössen

$$m \qquad s \qquad x \qquad z$$

mit

$$-m \qquad n-s \qquad x^{\frac{s}{n-s}} \qquad zx^{-\frac{m}{n-s}}$$

vertauscht.

Hiernach wird α_h offenbar $n-s$ deutig; die Convergenzbedingung bleibt aber bei der Vertauschung auch für die neuen Reihen nach wie vor

$$\frac{x^s}{\Delta} \leqq 1.$$

C) Wir entwickeln endlich noch das Integral (13) in Abschnitt III nach steigenden Potenzen von ξ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \zeta = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \frac{\xi^h}{h!} = \sum_{h=0}^{n-1} R_h, \\ R_h = \alpha_h \frac{\xi^h}{h!} + \alpha_{h+n} \frac{\xi^{h+n}}{(h+n)!} + \alpha_{h+2n} \frac{\xi^{h+2n}}{(h+2n)!} + \cdots \end{aligned}\right\}.$$

Nun folgt aus Formel (15), wenn man h um n wachsen lässt,

$$(19)\qquad \alpha_{h+n} = f(h) \cdot \alpha_h,$$

wobei

$$(20)\quad \begin{cases} f(h) = \Delta \prod_{k=0}^{s-1} \left\{ h + k\frac{n}{s} - \frac{m}{s} \right\} \prod_{k=0}^{n-s-1} \left\{ h + k\frac{n}{n-s} + \frac{m}{n-s} \right\}, \\ \Delta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}. \end{cases}$$

Mithin kommt man zu der Reihe

$$(21)\quad \begin{cases} \xi = \sum_{h=0}^{n-1} R_h, \\ R_h = \alpha_h \left\{ \frac{\xi^h}{h!} + f(h) \frac{\xi^{h+n}}{(h+n)!} + f(h) f(h+n) \frac{\xi^{h+2n}}{(h+2n)!} + \cdots \right\}, \end{cases}$$

und *diese stellt die $m$ten Potenzen sämmtlicher Wurzeln der Fundamentalform*

$$(2)\qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

dar.

Die Grösse α_h entnimmt man aus Nr. 14 und ertheilt ihr successive jene n *verschiedenen Werthe*, wie sie dem Symbol

$$(-1)^{\frac{hs-m}{n}}$$

entsprechen. — Die Reihen R_h *convergiren*, wenn

$$\Delta\xi^n \leqq 1.$$

Da nun die Variabelen x und ξ nach Abschnitt I durch die Gleichung

$$x^s = \xi^{-n}$$

verbunden waren, so ist

$$\frac{x^s}{\Delta} \leqq 1$$

wenn

$$\Delta\xi^n \geqq 1$$

und umgekehrt, d. h. aber:

Es giebt unter allen Umständen eine convergente Reihenentwickelung, also auch immer ein brauchbares Integral.

V.

Vorausblick auf die Theorie der allgemeinen Gleichung $n$ten Grades.

Die transcendenten Lösungen, welche wir für die Fundamentalformen der trinomischen Gleichung gefunden haben, führen uns zu einer Hypothese über die Form der Lösungen der allgemeinsten Gleichung $n$ten Grades

$$(22)\quad \Phi(y) = x_0 y^n + x_1 y^{n-s_1} + \cdots + x_{n-1} y^{n-s_{n-1}} + x_n = 0.$$

Kehren wir einen Augenblick zu dem Ausdrucke (5) in Abschnitt II zurück, welcher die $m$ten Potenzen von s Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(y) = y^n + y^{n-s} + x = 0, \qquad y^m = z$$

darstellte. Derselbe kann offenbar in der Form

$$(5^0) \quad z = \frac{-m\varepsilon_k^{-m}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^x dx \left\{ \int_{w'}^{w''} \frac{w^{m-1}\,dw}{\varphi\left(\frac{w}{\varepsilon_k}\right)} \right\} + (z)_{x=0}, \qquad \varepsilon^s = 1,$$

$$w' = \left(-\tfrac{1}{2} - \infty\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}},$$

$$w'' = \left(-\tfrac{1}{2} + \infty\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{s}}$$

gegeben werden, und *in dem Integral hat φ genau die Bedeutung der linken Seite der trinomischen Gleichung* (1). — Dieser eigenthümliche Zusammenhang zwischen jener Gleichung und ihrer Auflösung veranlasst uns, die Lösung der allgemeinen Gleichung $\Phi(y) = 0$ unter Nr. 22 in einer analogen Form vorauszusetzen.

Hiernach würde, wenn s_p das grösste aller s ist, das Integral

$$(23) \quad z = \frac{-m\varepsilon_k^{-m}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^{x_n} dx_n \left\{ \int_{w'}^{w''} \frac{w^{m-1}\,dw}{\Phi\left(\frac{w}{\varepsilon^k}\right)} \right\} + (z)_{x_n=0}, \qquad \varepsilon^{s_p} = 1$$

die $m$ten Potenzen jener s_p Wurzeln der Gleichung

$$(22) \qquad \Phi(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y^{n-s_i} = 0, \qquad \begin{array}{l} s_0 = 0 \\ s_n = n \end{array}$$

darstellen, welche mit x_n nicht gleichzeitig verschwinden.

Wir könnten unsere Annahme leicht zur Evidenz erheben, wenn wir dieselbe Art der Beweisführung anwenden würden, wie in Abschnitt II. Indessen kommt es uns an dieser Stelle nur darauf an, eine Andeutung zu machen, welche Vortheile aus den *geschlossenen* Lösungen der trinomischen Gleichung gezogen werden können.

In gleicher Weise lässt sich die Auflösung der Gleichung

$$(2) \qquad \varphi(\eta) = \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

verallgemeinern, und man findet hierüber Ausführlicheres in einer Abhandlung*) des Verf. „Transcendente Auflösung der allgemeinen Gleichung $n$ten Grades“.

*) Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 101.

VI.

Differentialresolventen der trinomischen Gleichung.

Es dürfte nicht überflüssig sein, wenn wir eine kurze Mittheilung darüber machen, *auf welchem Wege* wir eigentlich zu den transcendenten Lösungen, den Integralen in Abschnitt II und III, gelangt sind.

Der ursprüngliche Gang unserer Untersuchung*) ist thatsächlich ein ganz anderer gewesen, und nur in Rücksicht auf Uebersichtlichkeit und Kürze haben wir hier die Resultate in veränderter Reihenfolge vorgeführt.

Wir suchten ursprünglich jene lineare Differentialgleichung — *Differentialresolvente* — auf, welcher die $m$ten Potenzen ζ sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (2) genügten und fanden eine Differentialgleichung der Form

$$(24) \qquad \frac{d^n \zeta}{d \xi^n} = a_n \xi^n \frac{d^n \zeta}{d \xi^n} + a_{n-1} \xi^{n-1} \frac{d^{n-1} \zeta}{d \xi^{n-1}} + \cdots + a_1 \xi \frac{d \zeta}{d \xi} + a_0 \zeta.$$

Die Differentialgleichung konnten wir durch bestimmte, n-fache Integrale, so wie durch hypergeometrische Reihen vollständig integriren, und diese transcendenten Lösungen der Differentialgleichung stellten, nachdem die Integrationsconstanten gehörig bestimmt waren, explicite die $m$ten Potenzen der Wurzeln der trinomischen Gleichung dar.

Eine genauere Betrachtung der Integrale der Gleichung (24) führte uns weiter zu der Erkenntniss, dass die n-fachen Integrale stets auf $n-1$-fache zurückführbar sind. Dies gilt bereits, wenn die Coefficienten a_0 bis a_n vollkommen beliebige Zahlen sind. — Finden indessen zwischen den Coefficienten gewisse, hier nicht näher zu erörternde Bedingungen statt, so kann die Vielfachheit der erwähnten Integrale noch weiter herabsinken.

Nun ist es sehr bemerkenswerth, dass gerade in dem Falle, wo die Gleichung (24) die Differentialresolvente der trinomischen Gleichung (2) ist, die Coefficienten a_i so beschaffen sind, dass der Differentialgleichung durch *einfache* Integrale genügt werden kann. Ein solches Integral lautet

$$(25) \qquad \zeta_k = \int_0^\infty \frac{w^{\lambda-1}\, dw}{(w^n + \varepsilon_k^s\, \xi w^{n-s} + 1)^\mu},$$

und in demselben sind λ und μ bestimmte von den Coefficienten a_i abhängige Zahlen, ε_k bedeutet irgend eine $n$te Wurzel der Einheit.

---

*) Vergl. die einschlägigen Arbeiten des Verf. in Math. Annalen Bd. XXVI und Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXXI. Jahrg.

Das allgemeine Integral der Differentialresolvente wird hiernach

$$\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta_k$$

und *aus diesem sind nach Specialisation der Integrationsconstanten* c_k *die Lösungen der Fundamentalform* (2) *hervorgegangen*, nämlich die Integrale (12) und (13) in Abschnitt III.

Jene Lösungen sind allerdings noch durch einen Differentiationsprocess und rückwärts geleiteten Integrationsprocess in eine schicklichere Form gebracht worden*), doch kann das um so weniger befremden, wenn man sich nachträglich überzeugt, dass dieser Process *auch an der Differentialgleichung* (24) vorgenommen werden kann.

In der That, differenzirt man (24) ν mal nach ξ und setzt

$$\zeta^{(\nu)} = \zeta_1,$$

so hat man wieder eine Gleichung der ursprünglichen Form, aber mit veränderten Coefficienten a_i. Aus der neuen Differentialgleichung bestimmt man ζ_1, und dann liefert eine ν-fache Integration des ζ_1 nach ξ das ursprüngliche ζ. — Dass die Veränderungen, welche die Coefficienten der Differentialresolvente erleiden, vollständig connex mit den Veränderungen der Parameter in den Integralen sind, lehrt ein Blick auf diese Gebilde. (Vergl. Nr. 13 und 26).

Wie man sieht, hat die Differentialresolvente der trinomischen Gleichung für unsere Theorie eine fundamentale Bedeutung, und da sich diese Resolvente leicht reproduciren lässt, so wollen wir das nicht unterlassen.

Aus unseren citirten Arbeiten ist zu entnehmen, dass die Reihenentwickelung für eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^\nu \zeta}{d\xi^\nu} = f\left(\frac{d\zeta}{dl\xi}\right), \qquad f\left(\frac{d\zeta}{dl\xi}\right) = \varrho \prod_{k=0}^{n-1} \left\{\frac{d\zeta}{dl\xi} - \lambda_k\right\},$$

wo $\left(\frac{d\zeta}{dl\xi}\right)^k$ die Bedeutung von $\frac{d^k \zeta}{d(l\xi)^k}$ hat und ϱ und λ_0 bis λ_{n-1} beliebig gegebene Zahlen sind, folgendermassen lautet

$$\zeta = \sum_{h=0}^{\nu-1} C_h \left\{\frac{\xi^h}{h!} + f(h)\frac{\xi^{h+\nu}}{(h+\nu)!} + f(h)\, f(h+\nu)\frac{\xi^{h+2\nu}}{(h+2\nu)!} + \cdots\right\},$$

wo

$$C_h = \text{const.}, \qquad f(h) = \varrho \prod_{k=0}^{n-1} \{h - \lambda_k\} \cdot$$

*) Ich bemerke ausdrücklich, dass dieser Process auch auf das Integral (25) angewendet werden muss, bevor dasselbe zur Auflösung der trinomischen Gleichung benutzt werden kann.

Diese Reihe stimmt in ihrer Gestalt aber vollkommen mit jener überein, welche wir unter Nr. 21, Abschn. IV, C) fanden, und welche die $m$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0, \qquad \eta^m = \zeta$$

darstellt; nur war dort speciell

$$v = n, \qquad C_h = a_h, \qquad \varrho = \Delta$$

und $f(h)$ das Product in Nr. 20.

Weil nun f in der Reihe dieselbe Bedeutung wie in der Differentialgleichung besitzt, so ist mit Rücksicht auf das specielle f in Nr. 20 ohne Weiteres klar, dass

$$(26) \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^n\zeta}{d\xi^n} = \Delta \prod\limits_{k=0}^{s-1}\left\{\dfrac{d\zeta}{dl\xi} + k\,\dfrac{n}{s} - \dfrac{m}{s}\right\} \prod\limits_{k=0}^{n-s-1}\left\{\dfrac{d\zeta}{dl\xi} + k\,\dfrac{n}{n-s} + \dfrac{m}{n-s}\right\}, \\ \qquad\qquad \Delta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s} \end{array}\right.$$

die Differentialresolvente für die zweite Fundamentalform vorstellt.

Um von dieser Resolvente auf jene zu kommen, welche zur Fundamentalform

$$(1) \qquad y^n + y^{n-s} + x = 0, \qquad y^m = z$$

gehört, beachte man dass die Gleichungen (1) und (2) durch

$$(3) \qquad \begin{array}{l} x^s = \xi^{-n}, \\ \eta = yx^{-\frac{1}{n}} \end{array}$$

in einander übergeführt werden können, und man substituire demnach in (26)

$$\xi = x^{-\frac{s}{n}},$$

$$\zeta = zx^{-\frac{m}{n}}.$$

Die Rechnung verläuft übersichtlicher, wenn man $\dfrac{d^n\zeta}{d\xi^n}$ in einen nach $l\xi$ genommenen Differentialquotienten umsetzt; es ist

$$\frac{d^n\zeta}{d\xi^n} = \xi^{-n}\prod_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{d\zeta}{dl\xi} - k\right\}.$$

Dann muss noch ermittelt werden, wie sich ein Ausdruck

$$Q = \prod_{i=0}^{\mu-1} \left\{ \frac{d\zeta}{dl\xi} - \lambda_i \right\}$$

verändert, falls

$$\xi = x^{\alpha}, \qquad \zeta = x^{\beta} z$$

eingeführt wird.

Eine einfache Betrachtung ergiebt, dass

$$Q = \alpha^{-\mu} x^{\beta} \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{dz}{dlx} - \alpha\lambda_i + \beta \right\},$$

und nun gelangt man durch passende Verknüpfung dieser Einzelheiten zu

$$(27) \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{dz}{dlx} + k\frac{s}{n} - \frac{m}{n} \right\}$$

$$= \Delta x^{-s} \prod_{k=0}^{s-1} \left\{ \frac{dz}{dlx} - k \right\} \prod_{k=0}^{n-s-1} \left\{ \frac{dz}{dlx} - k\frac{s}{n-s} - \frac{m}{n-s} \right\},$$

welche Gleichung *die Differentialresolvente der ersten Fundamentalform ist.**) — Sie kann noch einfacher geschrieben werden, wenn man die Functionen φ und ψ benutzt, welche in Abschnitt IV, A) unter Nr. 17 auftreten; sie lautet sodann

$$(28) \qquad x^s \varphi\left(\frac{dz}{dlx}\right) = \psi\left(\frac{dz}{dlx}\right) \chi\left(\frac{dz}{dlx}\right),$$

$$\chi(h) = \prod_{k=0}^{s-1} \{h - k\}.$$

Es ist nicht schwer mittelst der Substitutionen

$$\xi = Ax^{\alpha},$$
$$\zeta = Bx^{\beta} z$$

die Differentialresolvente der Gleichung

$$y^n + ax^p y^{n-s} + bx^q = 0, \qquad y^m = z$$

herzuleiten, welche dann *beide* Resolventen (26) und (27) in sich fasst.

---

*) In Boole's „Treatise on Differential Equations", Supplementary Volume findet man auf Seite 199 zwei Differentialresolventen angegeben, die sich von den Resolventen (26) und (27) nicht wesentlich unterscheiden. Sie sind, wie aus dem Texte ersichtlich ist, durch Herrn Harley aufgefunden und von diesem Boole mitgetheilt worden. — Leider kann man a. a. O. nicht ersehen, wie Harley zu seinen Resultaten gelangt ist.

Die eben vorgeführten Differentialresolventen stehen unter der gemeinsamen Form

$$\sum_{k=n}^{0}(a_k + b_k x^r)\,\frac{d^k z}{d\,(lx)^k} = 0$$

und gehören demnach der Classe der *hypergeometrischen Differentialgleichung nter Ordnung* an. — Man kann also die vorliegenden Untersuchungen zugleich als einen Beitrag zur Theorie der hypergeometrischen Functionen höherer Ordnung hinnehmen.

Dresden, 12. Juli 1886.

Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung.

Von

Friedrich Dingeldey in Darmstadt.

Im 27. Bande dieser Annalen, S. 272 ff., habe ich gezeigt, wie sich in einfacher Weise „Elemente" (gewisse Punkte und gerade Linien) angeben lassen, mit Hilfe deren man eine beliebige ebene Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt, die gezeichnet vorliegt oder durch ihre Gleichung gegeben ist, lediglich unter Anwendung des Lineals gemäss dem Grassmann'schen planimetrischen Producte:

$$(1) \qquad (xa\,Cb)\,(xa\,C_1 b_1)\,(xd) = 0$$

construiren kann. Im Nachfolgenden will ich nun zeigen, *wie man aus diesen Elementen* (den Punkten a, b, b_1, d und den Geraden C und C_1) *sofort sehr leicht diejenigen Elemente herleiten kann, welche nöthig sind, um die zu* (1) *gehörige Hesse'sche Curve nach derselben Methode zu construiren.*

Die Gleichung der Curve (1) ergiebt sich, wenn ich dieselbe Bezeichnung zu Grunde lege wie a. a. O., in der Gestalt:

$$(2) \qquad G_2\delta_3(G_1'x_1 + G_3'x_3)x_2^2 - G_3'\delta_2(G_1x_1 + G_2x_2)x_3^2 = 0,$$

ist also von der Form:

$$(3) \qquad (\alpha x_1 + \beta x_3)x_2^2 + (\gamma x_1 + \delta x_2)x_3^2 = 0,$$

wobei alsdann:

$$(4) \quad \alpha = G_2G_1'\delta_3, \ \beta = G_2G_3'\delta_3, \ \gamma = -G_1G_3'\delta_2, \ \delta = -G_2G_3'\delta_2.$$

Die Hesse'sche Curve zu (3) wird:

$$(5) \qquad H \equiv \begin{vmatrix} 0 & \alpha x_2 & \gamma x_3 \\ \alpha x_2 & \alpha x_1 + \beta x_3 & \beta x_2 + \delta x_3 \\ \gamma x_3 & \beta x_2 + \delta x_3 & \gamma x_1 + \delta x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man hier für die α, β, γ, δ ihre Werthe (4) ein, so scheidet sich ein gemeinsamer Factor $G_2G_3'\delta_2\delta_3$ aus, und die Curve (5) wird:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &G_2 G_1' \delta_3 (G_1 G_1' x_1 + G_2 G_1' x_2 - 2 G_1 G_3' x_3) x_2^2 \\ &- G_1 G_3' \delta_2 (G_1 G_1' x_1 - 2 G_2 G_1' x_2 + G_1 G_3' x_3) x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Geraden:

$$(7)\qquad \begin{cases} C_1' \equiv G_1 G_1' x_1 + G_2 G_1' x_2 - 2 G_1 G_3' x_3 = 0 \\ \text{und} \\ C' \equiv G_1 G_1' x_1 - 2 G_2 G_1' x_2 + G_1 G_3' x_3 = 0 \end{cases}$$

spielen nun offenbar für die Hesse'sche Curve (6) dieselbe Rolle wie die Geraden C_1 und C für die Grundcurve (2). Fragen wir nun nach ihrer geometrischen Bedeutung, insbesondere nach ihrer Beziehung zu den Elementen der Grundcurve. Die Geraden C_1' und C' schneiden sich offenbar in einem Punkte von H und berühren H in dem Punkte, in welchem sie geschnitten werden von $x_3 = 0$, resp. $x_2 = 0$. Der Schnittpunkt von C_1' mit $x_3 = 0$ ist, in Grassmann'scher Weise geschrieben:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ G_1 G_1' & G_2 G_1' & -2 G_1 G_3' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

was äquivalent ist mit $G_2 e_1 - G_1 e_2$, oder mit $C(e_1 e_2)$; analog findet sich, dass der Schnittpunkt von C' mit $x_2 = 0$ der Punkt $C_1(e_3 e_1)$ ist. Die Punkte $C(e_1 e_2)$ und $C_1(e_3 e_1)$ spielen nun bei der Erzeugung der Hesse'schen Curve als Berührungspunkte zweier von demselben Curvenpunkte ausgehenden Tangenten genau dieselbe Rolle wie die Punkte b und b_1 bei der Grundcurve; sie seien deshalb, wie fernerhin stets bei entsprechenden Elementen, mit denselben, aber accentuirten Buchstaben bezeichnet, so dass also:

$$(8)\qquad \begin{cases} b' = C(e_1 e_2) = C(ab), \\ b_1' = C_1(e_3 e_1) = C_1(a b_1). \end{cases}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden C_1' und C' wird:

$$C_1' C' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ G_1 G_1' & G_2 G_1' & -2 G_1 G_3' \\ G_1 G_1' & -2 G_2 G_1' & G_1 G_3' \end{vmatrix}$$

oder

$$3 G_1 G_1' \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ G_1 & -G_2 & 0 \\ -G_1' & 0 & G_3' \end{vmatrix},$$

ist also auch zugleich der Schnittpunkt von:

$$(9)\qquad E = G_1(e_2 e_3) - G_2(e_3 e_1) \quad \text{mit} \quad F = G_1'(e_2 e_3) - G_3'(e_1 e_2).$$

Die Gerade E ist aber offenbar die vierte harmonische Gerade zu $e_2 e_3$, $e_3 e_1$ und $G_1(e_2 e_3) + G_2(e_3 e_1)$ oder zu $b_1 b$, $b_1 a$ und C; analog

ist F die vierte harmonische Gerade zu e_2e_3, e_1e_2 und $G_1'(e_2e_3)+G_3'(e_1e_2)$ oder zu bb_1, ba und C_1. Die Geraden C_1' und C' verbinden demnach die Punkte b' resp. b_1' mit dem Schnittpunkte der vierten Harmonischen zu b_1b, b_1a und C und der vierten Harmonischen zu bb_1, ba und C_1.

Nun fehlen von den Elementen der Hesse'schen Curve nur noch der dem Punkte d entsprechende Punkt d'; er ist der dritte Schnittpunkt der Geraden $b'b_1'$ mit der Curve H. Für diese Gerade ergiebt sich:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} (e_2e_3) & (e_3e_1) & (e_1e_2) \\ G_2 & -G_1 & 0 \\ G_3' & 0 & -G_1' \end{vmatrix} \quad \text{oder } G_1G_1'x_1 + G_2G_1'x_2 + G_1G_3'x_3 = 0,$$

eine Gerade, die auch schon in meiner oben citirten Arbeit vorkam und daselbst mit M bezeichnet wurde. Aus den Gleichungen $H=0$ und $M=0$ folgt nun, dass H von M ausser in b' und b_1' noch in dem Punkte geschnitten wird, in welchem sich die Geraden $M=0$ und $\delta_3x_2-\delta_2x_3=0$ schneiden; aus $H=0$ und $M=0$ ergiebt sich nämlich sofort die Gleichung:

$$G_2G_1'\delta_3\,.\,3G_1G_3'x_3\,.\,x_2^2 - G_1G_3'\delta_2\,.\,3G_2G_1'x_2\,.\,x_3^2 = 0,$$

welche äquivalent ist mit

$$x_2x_3(\delta_3x_2-\delta_2x_3)=0.$$

Die Gerade

$$\delta_3x_2-\delta_3x_3=0$$

ist aber einfach die Verbindungslinie der Punkte a und d, daher ist

$$d'=(b'b_1')(ad)=M(ad).$$

Fassen wir noch einmal Alles zusammen, so können wir sagen:

Die Elemente der zu (1) *gehörigen Hesse'schen Curve:*

$$(11)\qquad (xa'C'b')(xa'C_1'b_1')(xd')=0$$

ergeben sich aus den Elementen der Grundcurve in nachstehender einfacher Weise: Es ist

$$a'=a,\quad b'=C(ab),\quad b_1'=C_1(ab_1),\quad d'=(b'b_1')(ad)=M(ad);$$

die Geraden C' und C_1' verbinden die Punkte b_1' resp. b' mit dem Schnittpunkte der beiden Geraden E und F, wo E nach Gleichung (9) die vierte Harmonische zu b_1b, b_1a und C, F die vierte Harmonische zu bb_1, ba und C_1 ist.

München, den 23. Juli 1886.

Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p=2$.

Von

WILIBALD REICHARDT.

Betrachtet man mit Klein*) die *Kummer'sche Fläche* als gemeinsame *Singularitätenfläche* von ∞^1 confocalen Complexen

$$\sum_1^6 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \tag{1}$$

so werden die linken Seiten der Gleichungen der 6 in der einfach unendlichen Complexschaar (1) doppeltzählend enthaltenen linearen *„Fundamentalcomplexe"*

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_6 = 0$$

lineare Functionen der auf das *„Fundamentaltetraeder"* (12) (34) (56)**) bezüglichen Liniencoordinaten

$$p_{ik} = y_i^{(1)} y_k^{(2)} - y_i^{(2)} y_k^{(1)}$$

von der folgenden Form***)

$$\begin{cases} x_1 = \quad p_{12} + p_{34}, & x_3 = \quad p_{13} + p_{42}, & x_5 = \quad p_{14} + p_{23}, \\ x_2 = -i(p_{12} - p_{34}), & x_4 = -i(p_{13} - p_{42}), & x_6 = -i(p_{14} - p_{23}). \end{cases} \tag{2}$$

---

*) Klein *„Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades"* Math. Annalen Bd. II, p. 198.

**) Dasselbe ist dadurch charakterisirt, dass die 3 Paare gegenüberliegender Kanten desselben resp. den Congruenzen

$$\begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{Bmatrix}$$

als Directricenpaare zugehören.

***) Vergl. Klein, l. c., p. 205; Rohn *„Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen $p=2$"* Diss. München 1878; und *„Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche"* Math. Annalen Bd. XV, p. 345.

Die durch (1) definirte Kummer'sche Fläche geht durch die 32 Operationen

(3) $$x_i' = \pm x_i \qquad (i=1, 2, \ldots, 6)$$

in sich über, während die 720 Operationen

(4) $$x_i' = x_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots, 6)$$

(zu den Coordinaten in Bezug auf alle 15 Fundamentaltetraeder, oder, wenn man will) zu *allen* 720 *Kummer'schen Flächen* überführen, die wie die gegebene Kummer'sche Fläche der Form 6^{ten} Grades

$$f(\lambda) = (\lambda - k_1)(\lambda - k_2)\ldots(\lambda - k_6)$$

zugehören. Unter den 32 Operationen (3) sind 16, unter den 720 Substitutionen (4) aber 360, und unter allen 32 . 720 Operationen

(5) $$x_i' = \pm x_k \qquad (i, k=1, 2, \ldots, 6),$$

die durch Combination von (3) und (4) entstehen, 16 . 720 Substitutionen enthalten, die *Collineationen* bedeuten. *Diese letztere*, 16 . 720 *Operationen enthaltende Gruppe von Substitutionen soll fortan kurz mit* G *bezeichnet werden.*

Fasst man die auf das Fundamentaltetraeder (12) (34) (56) bezüglichen Tetraedercoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 durch die Formeln (2) als *absolut* (nicht blos bis auf einen Proportionalitätsfactor) *definirt* auf, so werden einer jeden dieser 16 . 720 in G enthaltenen Substitutionen der Liniencoordinaten x_i zwei lineare Substitutionen

(6) $$y_i' = \pm Y_i \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

der Punktcoordinaten y_i entsprechen (indem ja die Liniencoordinaten p_{ik} in den y_i vom zweiten Grade sind). Es wird nun behauptet, dass die quaternäre Gruppe homogener linearer Substitutionen der y_i mit der ihr entsprechenden senären Gruppe homogener linearer Substitutionen der x_i nur meroedrisch (nämlich hemiedrisch) isomorph ist, oder also, dass der folgende Satz gilt:

Es ist unmöglich, aus den 2 . 16 . 720 *sich paarweise nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Substitutionen von der Form* (6) *eine Gruppe mit nur* 16 . 720 *Substitutionen auszuscheiden, die mit der ihr entsprechenden Gruppe* G *holoedrisch isomorph wäre.*

Der Beweis dieses Satzes wird schon erbracht sein, wenn gezeigt ist, dass zwischen einer in G enthaltenen Untergruppe g und der Gruppe von Substitutionen der y_i, welche den Operationen dieser Untergruppe entsprechen, nur hemiedrischer Isomorphismus stattfindet. Als solche Untergruppe g mag die Gruppe derjenigen 16 Operationen (3) gewählt werden, die Collineationen bedeuten. Die Substitutionen dieser Gruppe g sind dadurch charakterisirt, dass sie in einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln der Liniencoordinaten x_i bestehen. Wir behaupten also: *Aus den 32 Substitutionen der Punktcoordinaten* y_i,

welche der Gruppe g der 16 *in einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln bestehenden Substitutionen* (3) *der Liniencoordinaten x_i entprechen, kann man keine aus* 16 *Operationen bestehende Gruppe g' zusammensetzen, die mit g holoedrisch isomorph wäre.*

Zum Beweise dieser Behauptung ziehen wir die folgenden beiden Operationen der Gruppe g in Betracht

$$(A)\ \begin{cases} x_1' = +x_1, \\ x_2' = +x_2, \\ x_i' = -x_i,\ (i=3,4,5,6), \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} x_1' = +x_1, \\ x_i' = -x_i,\ (i=2,3,4,5), \\ x_6' = +x_6. \end{cases}$$

Diesen Operationen (A) und (B) entsprechen die folgenden homogenen linearen Substitutionen der Punktcoordinaten y_i

$$[A]\ \begin{cases} y_1' = (-1)^\mu y_1, \\ y_2' = (-1)^\mu y_2, \\ y_3' = -(-1)^\mu y_3, \\ y_4' = -(-1)^\mu y_4, \end{cases} (\mu=0,1), \quad [B]\ \begin{cases} y_1' = (-1)^\nu y_3, \\ y_2' = (-1)^\nu y_4, \\ y_3' = (-1)^\nu y_1, \\ y_4' = (-1)^\nu y_2. \end{cases} (\nu=0,1).$$

In der That: Bildet man mit Benutzung der y_i' statt der y_i die Liniencoordinaten p_{ik}' und alsdann nach den Formeln (2) die Grössen x_i', so gelangt man, wenn man noch die p_{ik}' durch die p_{ik} und darauf die p_{ik} durch die x_i ausdrückt, gerade zu den Formeln (A) und (B). Man bemerke nun, dass

$$(A)(B) = (B)(A).$$

Sollte also eine Gruppe g' der verlangten Art existiren, so müssten μ und ν so gewählt werden können, dass auch

$$[A][B] = [B][A]$$

wird. Dies aber ist unmöglich, denn man erhält

$$[A][B]\ \begin{cases} y_1' = -(-1)^{\mu+\nu} y_3, \\ y_2' = -(-1)^{\mu+\nu} y_4, \\ y_3' = (-1)^{\mu+\nu} y_1, \\ y_4' = (-1)^{\mu+\nu} y_2, \end{cases} \qquad [B][A]\ \begin{cases} y_1' = (-1)^{\mu+\nu} y_3, \\ y_2' = (-1)^{\mu+\nu} y_4, \\ y_3' = -(-1)^{\mu+\nu} y_1, \\ y_4' = -(-1)^{\mu+\nu} y_2. \end{cases}$$ *)

*) Hierbei ist noch zu bemerken, dass man auch durch Einfügung geeigneter Proportionalitätsfactoren in die quaternären Substitutionen $[A]$, $[B]$, ... keine Gruppe g' erreichen kann, deren Isomorphismus mit g holoedrisch wäre. Ferner lässt sich zeigen, dass sich auch für die weitere in G enthaltene *Untergruppe mit* 360 *Operationen*, die aus den 360 in (4) enthaltenen geraden Vertauschungen der Liniencoordinaten x_i besteht, keine entsprechende Gruppe von 360 Substitutionen der Punktcoordinaten y_i angeben lässt, die mit der Gruppe der genannten 360 Substitutionen der x_i holoedrisch isomorph wäre. (Vergl. „*Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades*" Sitzungsber. der math. phys. Classe der kgl. sächs. Ges. der Wissensch. 1885, p. 419).

Es lässt sich also in der That aus den 32 den 16 Operationen der Gruppe g entsprechenden quaternären Substitutionen keine Gruppe g' angeben, die mit g holoedrisch isomorph wäre, womit gleichzeitig die Richtigkeit des ursprünglich zu beweisenden Satzes ausser Zweifel gestellt ist.

Eben dieser Satz wird nun insbesondere von Wichtigkeit, wenn man die Coordinaten

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$$

eines Knotenpunktes einer der 720 zu $f(\lambda)$ gehörigen 720 Kummer'schen Flächen bezogen auf ein Fundamentaltetraeder in Betracht zieht. Von einem ersten Knotenpunkte der gegebenen Kummer'schen Fläche führen die 16 in (3) enthaltenen in einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln der x_i bestehenden Substitionen zu allen 16 Knotenpunkten dieser Fläche über; verbindet man aber eine gerade Vertauschung (4) mit einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln oder eine ungerade Vertauschung (4) mit einer ungeraden Anzahl von Vorzeichenwechseln der x_i, so gelangt man von den Knotenpunkten der ersten Fläche zu den Knoten aller 720 zu $f(\lambda)$ gehörigen Kummer'schen Flächen. In Anwendung auf die (absolut definirt gedachten) Knotenpunktscoordinaten η_i sagt also der soeben bewiesene Satz aus, *dass die* 2 . 16 . 720 *sich paarweise nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Systeme von Knotenpunktscoordinaten, die zu* $f(\lambda)$ *gehören, eine Gruppe bilden, die keine mit* G *holoedrisch isomorphe Gruppe von nur* 16 . 720 *Operationen als Untergruppe enthält.*

Die sämmtlichen 2 . 16 . 720 linearen homogenen Substitutionsformeln der Punktcoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4, die den 16 . 720 Operationen der Gruppe G entsprechen, sind dadurch ausgezeichnet, dass in sie *nur numerische Coefficienten* eingehen. Es werden also insbesondere auch die 2 . 16 . 720 Systeme von Knotenpunktscoordinaten $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, von denen soeben die Rede war, unter einander linear mit rein numerischen Coefficienten zusammenhängen.

Unsere Hauptaufgabe wird nun sein, *die Coordinaten* y_1, y_2, y_3, y_4 *und insbesondere die Knotenpunktscoordinaten* $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ *auf transcendentem Wege derart absolut zu definiren, dass zu ihnen ein Substitutionssystem der genannten Art gehört,* ein solches also, in dessen Substitutionen nur numerische Coefficienten eingehen; und in letzter Linie wird man fragen können, ob diese absolute Festlegung von Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 resp. $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ nicht in der Weise geschehen kann, dass das zugehörige Substitutionssystem identisch ist mit der oben besprochenen Gruppe von 2.16.720 linearen, homogenen quaternären Substitutionen.

Zur Erledigung dieser Aufgabe mögen auf der Kummer'schen Fläche auf folgendem Wege *transcendente Parameter* definirt werden: Man projicire die Kummer'sche Fläche von einem ihrer Knotenpunkte

(den wir den *„Anfangspunkt“* nennen wollen) aus auf eine beliebige Ebene*). Danach erscheint als Bild dieses Knotenpunktes ein Kegelschnitt — es ist dies der Schnitt des von dem Knotenpunkte auslaufenden Tangentialkegels mit der Projectionsebene — und die von dem Anfangspunkte (in den 6 Fundamentalcomplexen) auslaufenden Doppelebenen werden ihr Bild in 6 Tangenten dieses Kegelschnittes finden. Auf dem letzteren lässt sich alsdann ein Parameter λ in der Weise einführen, dass den Berührungspunkten der 6 Tangenten resp. die Parameterwerthe $k_1, k_2, \ldots, k_6$ zukommen. Irgend einem Punkte P der Projectionsebene sollen alsdann die Parameter λ', λ'' zugeordnet werden, wenn die Berührungspunkte der von diesem Punkte an den Kegelschnitt gelegten beiden Tangenten diese Parameterwerthe besitzen. Jeder Punkt P der Projectionsebene ist nun das Bild derjenigen beiden Punkte der Kummer'schen Fläche, in welchen dieselbe (abgesehen von dem Anfangspunkte) von der durch P gehenden projicirenden Geraden geschnitten wird. Diesen beiden Punkten der Kummer'schen Fläche sollen die algebraischen Parameterwerthe

$$\begin{Bmatrix} \lambda', & \pm\sqrt{f(\lambda')} \\ \lambda'', & \pm\sqrt{f(\lambda'')} \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} \lambda', & \pm\sqrt{f(\lambda')} \\ \lambda'', & \mp\sqrt{f(\lambda'')} \end{Bmatrix}$$

beigelegt werden, und zwar mag die Unbestimmtheit, welchem dieser beiden Punkte das eine, welchem das andere Parametersystem zugeordnet werden soll, durch die Verabredung aufgehoben werden, dass alle Punkte derjenigen Curve, in welcher der von dem Anfangspunkte auslaufende Tangentialkegel die Kummer'sche Fläche ausserdem schneidet, Parameterwerthe

$$\begin{Bmatrix} \lambda', & \pm\sqrt{f(\lambda')} \\ \lambda', & \mp\sqrt{f(\lambda')} \end{Bmatrix}$$

erhalten sollen, wonach dann diesem Knotenpunkt selbst die ∞^1 Parametersysteme

$$\begin{Bmatrix} \lambda', & \pm\sqrt{f(\lambda')} \\ \lambda', & \pm\sqrt{f(\lambda')} \end{Bmatrix}$$

zukommen. Von dieser *algebraischen Parametervertheilung auf der Kummer'schen Fläche* (für welche die 6 durch den Anfangspunkt gehenden Berührungskegelschnitte

$$\lambda' = k_1, \ \lambda' = k_2, \ldots, \ \lambda' = k_6$$

die Rolle von Uebergangscurven spielen) gelangt man zu den gewünschten *transcendenten Parametern* u_1, u_2, indem man setzt

*) Vergl. Darboux, *„Sur la surface à seize points singuliers“* Comptes rendus t. 92, p. 1493.

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} du_1 &= \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} \\ du_2 &= \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} \end{aligned}\right\},$$

darnach

$$(8)\qquad u' = \int_{k_0}^{\lambda', \sqrt{f(\lambda')}} du, \qquad u'' = \int_{k_0}^{\lambda'', \sqrt{f(\lambda'')}} du^{*}),$$

und schliesslich

$$(9)\qquad u = u' - u'' \quad (\text{mod. } \omega^{(i)}),$$

wobei

$$\omega', \quad \omega'', \quad \omega''', \quad \omega^{IV}$$

die zu den überall endlichen Integralen u gehörigen Perioden bedeuten. Von einem ersten Punkte $\bar{u}$ der Kummer'schen Fläche gelangt man zu allen 16 Punkten, die demselben in den bewussten 16 Collineationen zugehören, indem man zu den 16 Punkten

$$u = \bar{u} + \frac{1}{2} \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} \omega^{(i)} \qquad (\text{mod. } \omega^{(i)})$$

übergeht (wo die $\varepsilon^{(i)}$ nach Wahl 0 oder 1 bedeuten). Der Anfangspunkt erhält die Parameter $u_1, u_2 = 0, 0$, alle 16 Knotenpunkte also die Parameterwerthe

$$u = \frac{1}{2} \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} \omega^{(i)}.$$

Geht man von den ursprünglichen Integralen u zu den transcendent normirten überall endlichen Integralen

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega_2'' u_1 - \omega_1'' u_2}{p^{(12)}} \\ v_2 &= \frac{\omega_2' u_1 - \omega_1' u_2}{p^{(21)}} \end{aligned}\right\}$$

über, wobei unter $p^{(ik)}$ die Periodendeterminante

$$p^{(ik)} = \omega_1^{(i)} \omega_2^{(k)} - \omega_2^{(i)} \omega_1^{(k)}$$

zu verstehen ist, so stellen sich für diese Integrale v_1, v_2 statt

$$\begin{Bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \omega_1'' \\ \omega_2'' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \omega_1''' \\ \omega_2''' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \omega_1^{IV} \\ \omega_2^{IV} \end{Bmatrix}$$

resp. die Perioden ein:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \end{Bmatrix},$$

---

*) Jede dieser Gleichungen soll 2 Formeln vertreten, von denen die eine zum Index 1, die andere zum Index 2 gehört.

wobei

$$(11)\qquad \tau_{11}=\frac{p^{(32)}}{p^{(12)}},\quad \tau_{21}=\frac{p^{(13)}}{p^{(12)}}=\frac{p^{(42)}}{p^{(12)}}=\tau_{12},\quad \tau_{22}=\frac{p^{(14)}}{p^{(12)}}.$$

Statt u_1, u_2 können dann auch v_1, v_2 als transcendente Parameter desjenigen Punktes der Kummer'schen Fläche betrachtet werden, dessen algebraische Parameter

$$\begin{Bmatrix} \lambda', & \sqrt{f(\lambda')} \\ \lambda'', & \sqrt{f(\lambda'')} \end{Bmatrix}$$

sind.

Die Grössen v_1, v_2 und τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} kann man als Variabeln und Moduln der bekannten 16 zum Geschlechte $p=2$ gehörigen *hyperelliptischen Thetafunctionen* $\vartheta(v\,|\,\tau_{ik})$ einführen. Denkt man sich in denselben die v und die τ_{ik} vermöge (10) und (11) durch die u und die $\omega^{(i)}$ ausgedrückt, so mögen sie mit $\vartheta(u\,|\,\omega^{(i)})$ bezeichnet werden; vermöge (10) und (11) soll also die Gleichung

$$(12)\qquad \vartheta\begin{pmatrix} v_1 & 1 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ v_2 & 0 & 1 & \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} = \vartheta\begin{pmatrix} u_1 & \omega_1' & \omega_1'' & \omega_1''' & \omega_1^{IV} \\ u_2 & \omega_2' & \omega_2'' & \omega_2''' & \omega_2^{IV} \end{pmatrix}$$

in eine Identität verwandelt werden.

Unterwirft man nun die Perioden $\omega^{(i)}$ irgend einer *quadratischen Transformation*

$$\left\{\begin{aligned} \omega' &= \sum_1^4 a^{(i)}\,\overline{\omega}^{(i)} \\ \omega'' &= \sum_1^4 b^{(i)}\,\overline{\omega}^{(i)} \\ \omega''' &= \sum_1^4 c^{(i)}\,\overline{\omega}^{(i)} \\ \omega^{IV} &= \sum_1^4 d^{(i)}\,\overline{\omega}^{(i)} \end{aligned}\right\},$$

wobei

$$[12]=a^{(1)}c^{(2)}-a^{(2)}c^{(1)}+b^{(1)}d^{(2)}-b^{(2)}d^{(1)}=0,$$

$$[23]=0,\quad [14]=0,\quad [34]=0,\quad [13]=2,\quad [24]=2,\text{*)}$$

und bildet man dann die 16 quadratisch transformirten Thetafunctionen

$$(13)\qquad \overline{\vartheta}=\vartheta(u\,|\,\overline{\omega}^{(i)}),$$

so befinden sich unter denselben, wie bekannt**), vier Functionen

*) Vergl. Hermite, Comptes rendus t. 40, p. 251.

**) Vergl. Königsberger, „*Ueber die Transformation des 2ten Grades für die Abel'schen Functionen erster Ordnung*" Borch. Journ. Bd. 67, p. 58.

$$\bar{\vartheta}_\alpha, \quad \bar{\vartheta}_\beta, \quad \bar{\vartheta}_\gamma, \quad \bar{\vartheta}_\delta,$$

die, wenn man sie noch mit einem geeigneten Exponentialfactor $e^{c_{11} u_1^2 + \cdots}$ versieht, Thetafunctionen 2^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ *) werden, und die sich also als Summe von 4 ursprünglichen Thetaquadraten darstellen lassen. Diese 4 Thetafunctionen bilden eines der 60 *Göpel'schen Quadrupel*, d. h. es besteht zwischen ihnen eine Göpel'sche biquadratische Relation, und zwar repräsentiren die genannten 4 Functionen insbesondere eines derjenigen 15 Göpel'schen Vierersysteme**), deren Functionen sämmtlich gerade sind. Setzt man nun

$$\begin{aligned} &y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \\ &= \bar{\vartheta}_\alpha(u) : \bar{\vartheta}_\beta(u) : \bar{\vartheta}_\gamma(u) : \bar{\vartheta}_\delta(u), \end{aligned}$$

so sind die so definirten Grössen identisch mit den Verhältnissen der Coordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 *eines Punktes der Kummer'schen Fläche in Bezug auf eines der* 15 *Fundamentaltetraeder, wie sie durch Gleichungen von der Form* (2) *festgelegt werden****). Da zum Anfangspunkte die Parameterwerthe $u_1, u_2 = 0, 0$ gehören, so erhält man insbesondere für die Coordinaten $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4$ des Anfangspunktes der Kummer'schen Fläche die folgende transcendente Definition

$$\begin{aligned} &\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 \\ &= \bar{c}_\alpha : \bar{c}_\beta : \bar{c}_\gamma : \bar{c}_\delta, \end{aligned}$$

wobei

$$\bar{c} = \bar{\vartheta}(0 \mid \bar{\omega}^{(0)}).$$

Diese Grössen $\bar{c}_\alpha : \bar{c}_\beta : \bar{c}_\gamma : \bar{c}_\delta$ sind es nun aber gerade, die Borchardt†) als Moduln in die Theorie der zum Falle $p = 2$ gehörigen hyperelliptischen Functionen einführt. Diese *„Borchardt'schen Moduln"* können also auch definirt werden als die Coordinaten

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4$$

eines Knotenpunktes der Kummer'schen Fläche in Bezug auf eines der 15 Fundamentaltetraeder.

---

*) Vergl. Weber, *„Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit"* Math. Annalen Bd. XIV, p. 174.

**) Vergl. Borchardt, *„Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche 4ter Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen 4 Thetafunctionen mit 2 Variablen"* Borch. Journ. Bd. 83, p. 240.

***) Vergl. Rohn, l. c., oder meine demnächst erscheinende Dissertation, *„Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen"* §§ 13 und 14.

†) Borchardt, *„Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques"* Comptes rendus t. 88, p. 834.

Nachdem man so zu einer Definition der Verhältnisse der durch die Formeln (2) algebraisch definirten Coordinaten y_i resp. η_i auf transcendentem Wege gelangt ist, soll es sich, wie schon oben angedeutet wurde, um eine solche *transcendente absolute Normirung dieser Coordinaten* handeln, dass sich dieselben bei Anwendung der 16 . 720 Operationen der Gruppe G mit rein numerischen Coefficienten substituiren. Wir führen diese Untersuchung durch unter Zugrundelegung der folgenden fundamentalen quadratischen Periodentransformation

$$F\begin{cases}\omega' = 2\bar{\omega}', \\ \omega'' = 2\bar{\omega}'', \\ \omega''' = \bar{\omega}''', \\ \omega^{IV} = \bar{\omega}^{IV};\end{cases}$$

wir werden demgemäss unter den Symbolen $\bar{\vartheta}$ fortan die folgenden Thetafunctionen verstehen

$$(14) \qquad \bar{\vartheta} = \vartheta\left(u \mid \tfrac{1}{2}\,\omega',\ \tfrac{1}{2}\,\omega'',\ \omega''',\ \omega^{IV}\right).$$

Zur Operation F gehören die 4 Functionen

$$\bar{\vartheta}_5,\ \bar{\vartheta}_4,\ \bar{\vartheta}_{23},\ \bar{\vartheta}_{01}\ ^*)$$

als Thetafunctionen 2ter Ordnung mit der Charakteristik $\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,0\end{Bmatrix}$ hinzu; denn dieselben lassen sich in der That als Aggregate von 4 Quadraten ursprünglicher Thetafunctionen darstellen**). Unsere allgemeine Fragestellung soll also in der Weise präcisirt werden, *dass wir nach den Nennern τ resp. τ_0 fragen, deren Zufügung zur Folge hat, dass sich die Grössen*

$$(15) \qquad y_1 = \frac{\bar{\vartheta}_5(u)}{\tau(u)},\quad y_2 = \frac{\bar{\vartheta}_4(u)}{\tau(u)},\quad y_3 = \frac{\bar{\vartheta}_{23}(u)}{\tau(u)},\quad y_4 = \frac{\bar{\vartheta}_{01}(u)}{\tau(u)},$$

resp.

$$(15') \qquad \eta_1 = \frac{\bar{c}_5}{\tau_0},\quad \eta_2 = \frac{\bar{c}_4}{\tau_0},\quad \eta_3 = \frac{\bar{c}_{23}}{\tau_0},\quad \eta_4 = \frac{\bar{c}_{01}}{\tau_0}$$

bei linearer Transformation der ursprünglichen Perioden — denn in der Auswahl bestimmter Perioden $\omega^{(i)}$ zur Definition der Grössen (15) und (15') besteht, wie man leicht übersieht, die einzige Willkürlichkeit, die bei dieser Definition stattfindet — *mit rein numerischen Coefficienten substituiren.*

---

*) Hier ist von der Weierstrass'schen Indicesbezeichnung Gebrauch gemacht.

**) Vergl. Königsberger: „*Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung*", Borch. Journ. Bd. 64, p. 38.

Es wird behauptet, dass den an τ und τ_0 gestellten Anforderungen genügt wird, wenn man setzt

$$\tau(u) = \sqrt{p^{(12)}}\, e^{\frac{i\pi}{5p^{(12)}}(A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2)}, \text{*)} \tag{16}$$

wobei

$$\begin{cases} A_{11} = \omega_2'' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1'''} - \omega_2' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1^{IV}}, \\ A_{12} = -\omega_1'' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1'''} + \omega_1'' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1^{IV}} = -\omega_2' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2^{IV}} + \omega_2'' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2'''}, \\ A_{22} = \qquad = \omega_1' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2^{IV}} - \omega_1'' \dfrac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2'''} \text{ **)} \end{cases}$$

und

$$\tau_0 = \sqrt{p^{(12)}}. \tag{16'}$$

Zum Beweise dieser Behauptung stützen wir uns auf ein Gleichungensystem, das mit Hülfe gewisser bei Rohn (Math. Annalen Bd. 15, p. 333) angegebener Formeln abgeleitet werden kann***), und das den Zusammenhang der 6 Producte

$$\vartheta(2u^{(1)}) \,.\, \vartheta(2u^{(2)})$$

(wo ϑ irgend eine der 6 ungeraden Thetafunctionen bedeutet) mit den durch die Operation F quadratisch transformirten Thetas angibt. Setzt man nämlich in Uebereinstimmung mit (15)

$$\left.\begin{aligned} \tau(u^{(1)} - u^{(2)}) \cdot y^{(1)} &= \bar{\vartheta}(u^{(1)} - u^{(2)}) \\ \tau(u^{(1)} + u^{(2)}) \cdot y^{(2)} &= \bar{\vartheta}(u^{(1)} + u^{(2)}) \end{aligned}\right\}$$

und

$$p_{ik} = y_i^{(1)} y_k^{(2)} - y_i^{(2)} y_k^{(1)},$$

so findet sich

$$\begin{cases} -\dfrac{\vartheta_{04}(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{04}(2u^{(2)})}{\tau(u^{(1)} - u^{(2)}) \cdot \tau(u^{(1)} + u^{(2)})} = p_{12} + p_{34}, \\ \dfrac{i\vartheta_3(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_3(2u^{(2)})}{\tau(u^{(1)} - u^{(2)}) \cdot \tau(u^{(1)} + u^{(2)})} = -i(p_{12} - p_{34}), \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases} \tag{17}$$

*) Bei Benutzung der Grössen $v \mid \tau_{ik}$ als Variablen und Moduln der Thetafunctionen treten an Stelle von (14) und (16) die folgenden beiden Formeln

$$\bar{\vartheta} = \vartheta(2v \mid 2\tau_{ik}),$$

$$\tau(v) = \sqrt{p^{(12)}}\, e^{\frac{i\pi p^{(12)}}{5}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial p^{(32)}} v_1^2 + 2\frac{\partial \log \Delta}{\partial p^{(13)}} v_1 v_2 + \frac{\partial \log \Delta}{\partial p^{(14)}} v_2^2\right)}.$$

**) Dabei ist vorausgesetzt, dass Δ als solche Function der $p^{(ik)}$ geschrieben ist, dass die Relation besteht

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p^{(13)}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p^{(42)}}.$$

***) Ueber die Ableitung dieses Formelsystems vergl. meine Dissertation. § 15.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind nach den oben gemachten Angaben proportional den Liniencoordinaten x_i. Unser Beweis aber wird erbracht sein, sobald wir gezeigt haben, dass, wenn man diese rechter Hand stehenden Ausdrücke *direct gleich* (ohne Proportionalitätsfactor) den Grössen x_i setzt, wenn man also schreibt:

$$
(18) \qquad \begin{cases}
x_1 = -\frac{1}{\varrho}\,\vartheta_{04}(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{04}(2u^{(2)}) = p_{12} + p_{34}, \\
x_2 = \frac{i}{\varrho}\,\vartheta_{3}\,(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{3}\,(2u^{(2)}) = -i(p_{12} - p_{34}), \\
x_3 = -\frac{1}{\varrho}\,\vartheta_{24}(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{24}(2u^{(2)}) = p_{13} + p_{42}, \\
x_4 = \frac{i}{\varrho}\,\vartheta_{13}(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{13}(2u^{(2)}) = -i(p_{13} - p_{42}), \\
x_5 = -\frac{1}{\varrho}\,\vartheta_{02}(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{02}(2u^{(2)}) = p_{14} + p_{23}, \\
x_6 = \frac{i}{\varrho}\,\vartheta_{1}\,(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{1}\,(2u^{(2)}) = -i(p_{14} - p_{23}),
\end{cases}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\varrho &= \tau(u^{(1)} - u^{(2)}) \cdot \tau(u^{(1)} + u^{(2)}) \\
&= p^{(12)}\, e^{\frac{2i\pi}{5p^{(12)}}\left[A_{11}\left(u_1^{(1)^2} + u_1^{(2)^2}\right) + A_{12}\left(u_1^{(1)} u_2^{(1)} + u_1^{(2)} u_2^{(2)}\right) + A_{22}\left(u_2^{(1)^2} + u_2^{(2)^2}\right)\right]},
\end{aligned}
$$

dass dann allen linearen Transformationen der ursprünglichen Perioden Substitutionen der x_i von der folgenden Form entsprechen:

$$
(19) \qquad x_i' = \pm f \cdot x_k \quad (i, k = 1, 2, \cdots, 6),
$$

wobei f einen rein numerischen Proportionalitätsfactor bedeutet. Denn da den Operationen

$$
x_i' = \pm x_k \quad (i, k = 1, 2, \cdots, 6)
$$

der Gruppe G Substitutionen der y_i resp. η_i mit rein numerischen Coefficienten entsprechen, so wird dasselbe auch von allen Operationen (19) gelten.

Nun lassen sich doch alle linearen Periodentransformationen, die es giebt, durch wiederholte Combination von 4 erzeugenden Operationen zusammensetzen*). Ein solches System von 4 *erzeugenden linearen Transformationen* wird beispielsweise gebildet von den folgenden 4 Operationen

---

*) Vergl. Kronecker: „*Ueber bilineare Formen*", Monatsber. der Berliner Acad. 1866, und Krazer; „*Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante Eins aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen.*" Annali di Matem. t. 12, p. 300.

$$
S \begin{cases} \omega' = \bar{\omega}', \\ \omega'' = \bar{\omega}'', \\ \omega''' = \bar{\omega}' + \bar{\omega}''', \\ \omega^{IV} = \bar{\omega}^{IV}, \end{cases}
\qquad
T \begin{cases} \omega' = \bar{\omega}''', \\ \omega'' = \bar{\omega}'', \\ \omega''' = -\bar{\omega}', \\ \omega^{IV} = \bar{\omega}^{IV}, \end{cases}
$$

$$
U \begin{cases} \omega' = \bar{\omega}', \\ \omega'' = \bar{\omega}'', \\ \omega''' = \bar{\omega}'' + \bar{\omega}''', \\ \omega^{IV} = \bar{\omega}' + \bar{\omega}^{IV}, \end{cases}
\qquad
V \begin{cases} \omega' = \bar{\omega}'', \\ \omega'' = \bar{\omega}', \\ \omega''' = \bar{\omega}^{IV}, \\ \omega^{IV} = \bar{\omega}'''. \end{cases}
$$

Es wird also gezeigt werden müssen, dass der Anwendung jeder dieser 4 linearen Transformationen S, T, U, V eine lineare Substitution der Liniencoordinaten x_i von der Form (19) entspricht. Dabei beachte man, dass man sich darauf beschränken kann, die Aenderung von x_1 bei diesen 4 linearen Periodentransformationen zu verfolgen, da ja f ein für alle 6 Liniencoordinaten x_i übereinstimmender Proportionalitätsfactor sein muss. Es wird also nur zu zeigen sein, dass

$$\frac{1}{\varrho}\, \vartheta_{04}(2u^{(1)}) \cdot \vartheta_{04}(2u^{(2)})$$

bei einer jeden der Operationen S, T, U, V in einen Ausdruck von der Form

$$\pm \frac{f}{\varrho}\, \vartheta(2u^{(1)}) \cdot \vartheta(2u^{(2)})$$

(f = numerischer Factor, ϑ = ungerade Thetafunction) übergeht. Hierzu aber ziehe man zunächst in Betracht, dass die 6 ungeraden *Sigmafunctionen*

$$\sigma(u \mid \omega^{(i)}) = \frac{\vartheta(u \mid \omega^{(i)})}{C}\, e^{-\frac{i\pi}{10 p^{(12)}}(A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2)}, \tag{20}$$

wobei

$$C = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u_1}\right)_{u=0},$$

die Eigenschaft haben, sich bei Anwendung linearer Periodentransformationen rein zu permutiren*). Unter Einführung dieser Sigmafunctionen und des Werthes von ϱ erhält man aber aus (18) die Formeln

$$
(21) \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{C_{04}^2 \cdot \sigma_{04}(2u^{(1)}) \cdot \sigma_{04}(2u^{(2)})}{p^{(12)}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{i C_3^2 \cdot \sigma_3(2u^{(1)}) \cdot \sigma_3(2u^{(2)})}{p^{(12)}}, \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}
$$

*) Vergl. Klein: „*Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen*“ §§ 1—6, Math. Annalen Bd. 27, p. 431—442.

Wegen der genannten Eigenschaft der Sigmafunctionen wird hiernach der verlangte Nachweis schon erbracht sein, wenn gezeigt ist, dass

$$\frac{C_{04}^2}{p^{(12)}}$$

bei jeder der linearen Periodentransformationen S, T, U, V in einen Ausdruck

$$f \cdot \frac{C^2}{p^{(12)}}$$

übergeht. Dieser Nachweis aber ist leicht zu erbringen. Man hat dazu nur zu beachten, dass die zu den Perioden $\bar{\omega}^{(i)}$ der genannten 4 linearen Transformationen gehörigen ungeraden Functionen ϑ' mit den für die ursprünglichen Perioden $\omega^{(i)}$ gebildeten Functionen ϑ so zusammenhängen, wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist, in der die gelegentlich noch zutretenden Exponentialfactoren $e^{c_{11}u_1^2+\cdots}$ unterdrückt sind:

(22)

	S	T	U	V
$\vartheta_{04}' =$	ϑ_3	$j\sqrt{\frac{p^{(23)}}{p^{(12)}}}\,\vartheta_{24}$	ϑ_3	ϑ_1
$\vartheta_3' =$	ϑ_{04}	$j\sqrt{\frac{p^{(23)}}{p^{(12)}}}\,\vartheta_3$	ϑ_{04}	ϑ_{02}
$\vartheta_{24}' =$	$j^7\,\vartheta_{24}$	$j\sqrt{\frac{p^{(23)}}{p^{(12)}}}\,\vartheta_{04}$	$-i\vartheta_{13}$	ϑ_{13}
$\vartheta_{13}' =$	$j^7\,\vartheta_{13}$	$-j^7\sqrt{\frac{p^{(23)}}{p^{(12)}}}\,\vartheta_{13}$	$-i\vartheta_{24}$	ϑ_{24}
$\vartheta_{02}' =$	$j^7\,\vartheta_{02}$	$-j^7\sqrt{\frac{p^{(23)}}{p^{(12)}}}\,\vartheta_{02}$	ϑ_1	ϑ_3
$\vartheta_1' =$	$j^7\,\vartheta_1$	$-j^7\sqrt{\frac{p^{(23)}}{p^{(12)}}}\,\vartheta_1$	ϑ_{02}	ϑ_{01}

Nun ist doch

$$C = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}\right)_{u=0}.$$

Es wird daher, wie die erste Zeile der Tabelle (22) lehrt, der Ausdruck $\left(\frac{C_{04}^2}{p^{(12)}}\right)^2$, gebildet für die Perioden $\bar{\omega}^{(i)}$ der Operationen

$$S, \qquad T, \qquad U, \qquad V,$$

resp. gleich werden

$$\frac{C_3^2}{p^{(12)}}, \qquad \frac{i\,C_{24}^2}{p^{(12)}}, \qquad \frac{C_3^2}{p^{(12)}}, \qquad \frac{C_1^2}{p^{(21)}},$$

womit der gewünschte Nachweis erbracht ist.

Man überzeugt sich bei ausführlicher Benutzung der Tabelle (22) und der Formeln (18) leicht, dass die Anwendung der Operationen S, T, U, V resp. äquivalent ist mit den folgenden linearen Substitutionen der Liniencoordinaten x_i:

	S	T	U	V
$x_1' =$	$+ix_2$	$+ix_3$	$+ix_2$	$-ix_6$
$x_2' =$	$-ix_1$	$+ix_2$	$-ix_1$	$+ix_5$
$x_3' =$	$-ix_3$	$+ix_1$	$-ix_4$	$-ix_4$
$x_4' =$	$-ix_4$	$-ix_4$	$+ix_3$	$+ix_3$
$x_5' =$	$-ix_5$	$-ix_5$	$+ix_6$	$-ix_2$
$x_6' =$	$-ix_6$	$-ix_6$	$-ix_5$	$+ix_1$

Hieraus ersieht man, dass die Formeln, nach denen sich die durch die Gleichungen (15) absolut normirten Coordinaten y_i, resp. die durch (15') absolut definirten Borchardt'schen Moduln, bei Anwendung linearer Transformationen der ursprünglichen Perioden linear substituiren, sich von denjenigen 2 . 16 . 720 linearen Substitutionen, welche die Grössen y_i resp. η_i der Formeln (2) bei den 16 . 720 Operationen der Gruppe G erfahren, nur um einen Proportionalitätsfactor unterscheiden können, der eine 8[te] Einheitswurzel ist. *Das zu den Grössen y_i resp. η_i der Formeln* (15) *resp.* (15') *gehörige Substitutionssystem kann also nicht mehr als* 8 . 2 . 16 . 720 *Substitutionen enthalten.*

Ob man durch Zufügung weiterer Factoren zu dem Nenner τ resp. τ_0 das zu den transcendent normirten Grössen y_i resp. η_i gehörige Substitutionssystem auf das algebraisch mögliche System von 2 . 16 . 720 *Substitutionen reduciren kann*, diess hängt vermuthlich von dem Verhalten von $\sqrt[8]{\Delta}$ ab, wo Δ wieder die Discriminante von $f(\lambda)$ bedeutet. Es ist diess nicht unmittelbar zu entscheiden, da man aus den Nullwerthen der ϑ nur Formeln für $\sqrt[2]{\Delta}$ erhält, wie beispielsweise die folgende:

$$(23)\qquad \sqrt{\Delta} = c\,\frac{\Pi\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}\right)_{u=0}}{(p^{(12)})^8}$$

(wo c ein Zahlenfactor ist, und wo das Product Π sich über die Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen erstreckt). Wenn aber $\sqrt[8]{\Delta}$ im hyperelliptischen Falle sich ähnlich verhält, wie im elliptischen, so ist vorauszusetzen, dass das zu den Grössen

(24) $$y_1 = \frac{\bar{\vartheta}_5}{\tau'}, \quad y_2 = \frac{\bar{\vartheta}_4}{\tau'}, \quad y_3 = \frac{\bar{\vartheta}_{23}}{\tau'}, \quad y_4 = \frac{\bar{\vartheta}_{01}}{\tau'}$$

resp.

(24') $$\eta_1 = \frac{\bar{c}_5}{\tau_0'}, \quad \eta_2 = \frac{\bar{c}_4}{\tau_0'}, \quad \eta_3 = \frac{\bar{c}_{23}}{\tau_0'}, \quad y_4 = \frac{\bar{c}_{01}}{\tau_0'},$$

wobei

(25) $$\tau' = \sqrt[8]{\Delta} \cdot \tau$$

und

(25') $$\tau_0' = \sqrt[8]{\Delta} \cdot \tau_0,$$

gehörige Substitutionssystem mit der soeben genannten Gruppe von 2 . 16 . 720 Substitutionen identisch sein wird.

Leipzig, im Juli 1886.

Ueber die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören.

(Mit einer Figurentafel.)

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Zufolge des allgemeinen Programms, welches Herr Klein über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen in Bd. 17 der Math. Annalen (pag. 62 ff.) entworfen hat, ist es eine erste und fundamentale Aufgabe, alle in der Gruppe der linearen ganzzahligen ω-Substitutionen:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

enthaltenen Untergruppen aufzuzählen und systematisch zu classificiren. Diese Aufgabe ist behandelt für diejenigen Untergruppen, deren arithmetische Eigenart sich durch Congruenzen darstellen lässt, welchen die Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ in Bezug auf einen festen Zahlmodul m unterworfen sind*). Für die übrigen ungleich zahlreicheren Untergruppen hingegen entbehrt man bislang noch eine directe arithmetische Definition durch zahlentheoretische Eigenschaften, die den Coefficienten α, β, γ, δ zukämen.

Um eine Lösung der oben gedachten Aufgabe anzubahnen, dürfte es sich unter diesen Umständen empfehlen, nicht direct die Coefficienten der Substitution in Betracht zu ziehen, sondern von folgender indirecten Methode vorerst Gebrauch zu machen.

Ich entwickle die lineare ω-Substitution in einen Kettenbruch:

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \cdots - \frac{1}{a_n + \omega}}},$$

---

*) Insbesondere gehören hierher die Untersuchungen von Gierster im 18. und 26. Bande der Mathem. Annalen.

wobei die Wahl der Theilnenner im Allgemeinen keinen beschränkenden Vorschriften unterliegt. Ebensowohl, wie die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für jede specielle Untergruppe auszeichnende zahlentheoretische Charaktere tragen, ebensogut müssen auch die Theilnenner a_i einer Substitution der Untergruppe in Ansehung ihrer Zahl, Reihenfolge und Grösse von den Theilnennern fremder Substitutionen arithmetisch unterschieden sein, da ja die Kettenbruchentwicklung einen adäquaten Ausdruck für die Substitution abgiebt und Zusammensetzung zweier Substitutionen Aneinanderreihung der bez. Kettenbrüche ist. Somit wird man Untergruppen auch dadurch fixiren können, dass man die auszeichnenden Bedingungen der Theilnenner a_i angiebt.

Ob diese Methode gegenwärtig weiter reicht, als die directe Betrachtung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, muss der Erfolg lehren. Ich habe dieselbe mit Nutzen angewandt auf die Untersuchung sämmtlicher ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlecht $p = 1$. Im Folgenden möchte ich an einem andern Beispiele, nämlich an dem der Wurzeln aus dem Integralmodul $k^2(\omega)$ diese Betrachtungsweise illustriren. Meine Darstellung gipfelt in dem Satze, dass von allen genannten Wurzeln nur die 2te, 4te und 8te Congruenzmoduln abgeben, d. h. dass nur die Gruppen von $k(\omega)$, $\sqrt{k(\omega)}$ und $\sqrt[4]{k(\omega)}$ sich *vollständig* durch Congruenzen darstellen lassen. Um dahin zu gelangen, definire ich eine zahlentheoretische Function von α und γ, des ersten und dritten Coefficienten der Substitution und stelle einige Eigenschaften dieser Function auf. Dieselbe ist geeignet eine unbegrenzte Reihe von ausgezeichneten Untergruppen zu definiren, von denen namentlich die letzte, die allen übrigen gemeinsam ist, weiterhin interessiren wird. Aus den Eigenschaften dieser Gruppe ergiebt sich das soeben mitgetheilte Schlussresultat ohne Weiteres.

---

§ 1.

Definition der Function (α, γ).

Bezeichnen α und γ zwei relative Primzahlen, so können wir uns die Kettenbruchentwicklung des Quotienten:

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\gamma} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cdots - \cfrac{1}{a_n}}}$$

insbesondere so fixirt denken, dass sämmtliche Theilnenner a_i, mit etwaiger Ausnahme des letzten a_n, positive oder negative *gerade* Zahlen werden. Bezüglich dieser *eindeutigen* Entwicklung gelten folgende Regeln:

1. Ist a_n ungerade, so ist α und γ ungerade.

2. Ist a_n gerade und der Index n ungerade, d. h. die Anzahl der Theilnenner gerade, so ist $\gamma \equiv 0 \pmod{2}$.

3. Ist a_n gerade und der Index n gerade, so ist $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$.

Man zeigt diese Sätze durch den Schluss der vollständigen Induction. Gelten sie für Kettenbrüche von ν Gliedern, so gelten sie auch für solche von $\nu + 1$ Gliedern. Denn wenn:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 2a - \frac{1}{\frac{\alpha_0}{\gamma_0}}$$

ist, so bestehen die folgenden Congruenzen:

$$(2) \qquad \alpha \equiv \gamma_0; \quad \gamma \equiv \alpha_0 \pmod{2}.$$

Für Kettenbrüche von einem oder zwei Gliedern gelten die Sätze in der That; vermöge der Congruenzen (2) gelten sie dann allgemein.

Für die Folge sei nun stets

$$\gamma \equiv 0 \pmod{2},$$

so dass wir späterhin α und γ als ersten und dritten Coefficienten einer Substitution annehmen können, die (mod. 2) der Identität congruent ist. Es folgt:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 2a_0 - \frac{1}{2a_1 - \ddots - \frac{1}{2a_{2n-1}}}.$$

Ich bezeichne die negative Summe der Theilnenner mit *ungeradem* Index durch das Symbol (α, γ)

$$(3) \qquad -(\alpha, \gamma) = 2a_1 + 2a_3 + \cdots + 2a_{2n-1}.$$

Die gerade Zahl (α, γ) ist eine eindeutige zahlentheoretische Function von α und γ.

§ 2.

Recursionsformeln für (α, γ).

Neben dieser independenten Darstellung der Zahlen (α, γ) kann man für die Berechnung derselben auch eine recurrirende Methode benutzen, welche sich auf drei Recursionsformeln stützt, denen die Zahlen (α, γ) genügen.* Sei, um dieselben zu entwickeln, wieder:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 2a_0 - \frac{1}{2a_1 - \ddots - \frac{1}{2a_{2n-1}}},$$

so folgt:

$$-\frac{\gamma}{\alpha} = -\cfrac{1}{2a_0 - \cfrac{1}{2a_1 - \cdots - \cfrac{1}{2a_{2n-1}}}}$$

und indem man auf beiden Seiten die gerade Zahl 2ν hinzusetzt:

$$\frac{\alpha}{\gamma - 2\nu\alpha} = -\cfrac{1}{2\nu - \cfrac{1}{2a_0 - \cdots - \cfrac{1}{2a_{2n-1}}}},$$

d. h. es ist:

$$(\alpha, \gamma - 2\nu\alpha) = -(2\nu + 2a_1 + 2a_3 + \cdots) = -2\nu + (\alpha, \gamma),$$

(1) $(\alpha, \gamma + 2\nu\alpha) = 2\nu + (\alpha, \gamma)$.

Im Weiteren bemerke man, dass ein Vorzeichenwechsel von α auch die Vorzeichen sämmtlicher Theilnenner $2a_i$ in die entgegengesetzten verwandelt, so dass:

(2) $$(-\alpha, \gamma) = -(\alpha, \gamma).$$

Ein simultaner Zeichenwechsel von α und γ ist selbstverständlich ohne Einfluss.

Eine dritte Recursionsformel ist die folgende:

(3a) $$(\alpha + \gamma, \gamma) = -(\alpha, \gamma).$$

Die Kettenbruchentwicklungen von $\frac{\alpha + \gamma}{\gamma}$ und $\frac{\alpha}{\gamma}$ stehen in keinem sofort übersehbaren Zusammenhange und ich stelle zum Beweise der Formel (3a) folgende indirecte Betrachtung an:

Es sei:

$$(\alpha + \gamma, \gamma) + (\alpha, \gamma) = [\alpha, \gamma],$$

so gilt für diese eindeutig von α und γ abhängige ganze Zahl Folgendes:

Da man sofort übersieht, dass:

$$(\alpha + 2\gamma, \gamma) = (\alpha, \gamma)$$

ist, so ist:

$$[\alpha + \gamma, \gamma] = [\alpha, \gamma],$$

oder allgemein

(A) $$[\alpha + \nu\gamma, \gamma] = [\alpha, \gamma].$$

Nun zeigt man durch Formel (1):

$$(\alpha, \gamma - 2\alpha) = -2 + (\alpha, \gamma),$$
$$(\gamma - \alpha, \gamma - 2\alpha) = 2 + (\alpha + \gamma, \gamma).$$

Die Addition dieser Gleichungen ergiebt:

$$(\gamma - \alpha, \gamma - 2\alpha) + (\alpha, \gamma - 2\alpha) = (\alpha + \gamma, \gamma) + (\alpha, \gamma), \quad \text{d. h.}$$

(B) $$[\alpha, \gamma - 2\alpha] = [\alpha, \gamma].$$

Endlich zeigt sich sofort:

(C) $$[-\alpha, \gamma] = -[\alpha, \gamma].$$

Es ist nun ersichtlich, dass man vermöge der Recursionsformeln (A), (B), (C) jedes beliebige Zahlenpaar α, γ auf die Combination 1, 0 zurückführen kann, also überhaupt jede Combination auf jede andere. Der Zahlwerth $[\alpha, \gamma]$ kann dabei nur einen Zeichenwechsel erleiden und ist somit im Ganzen höchstens zweier Werthe fähig, die man durch ein specielles Beispiel sofort bestimmt. Es findet sich so

$$[\alpha, \gamma] = 0,$$

d. h. unsere dritte Recursionsformel lautet:

$$(3) \qquad (\alpha + \nu\gamma, \gamma) = (-1)^\nu \cdot (\alpha, \gamma).$$

Die Formeln (1), (2), (3) gestatten für jedes Zahlenpaar α, γ den Werth von (α, γ) zu bestimmen, sobald derselbe für eines gegeben ist.

§ 3.

Ueber Congruenzen, denen (α, γ) in Bezug auf feste Moduln genügt.

Die Frage, welche ich in diesem Paragraphen beantworten möchte, ist die folgende: Gehören α und γ in Bezug auf einen Zahlmodul μ in zwei beliebige, aber festgewählte Zahlclassen, ist dann auch stets (α, γ) in Bezug auf denselben Modul einer einzigen bestimmten Zahlclasse angehörig; d. h. folgt aus:

$$(1) \qquad \alpha \equiv \alpha_0, \quad \gamma \equiv \gamma_0 \pmod{\mu}$$

stets, dass:

$$(2) \qquad (\alpha, \gamma) \equiv (\alpha_0, \gamma_0) \pmod{\mu}$$

ist?

Sei zuvörderst $\mu = 2^\nu \cdot m$

und m eine ungerade Zahl. Eine allgemein giltige Congruenz der gedachten Art muss auch in jedem speciellen Falle sich bewahrheiten und ich wähle als Probe einen speciellen Kettenbruch von 4 Gliedern. Es sei:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 2a_0 - \cfrac{1}{2a_1 - \cfrac{1}{2a_2 - \cfrac{1}{2a_3}}},$$

also:

$$\alpha = 16a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_1 - 4a_0a_3 - 4a_2a_3 + 1,$$
$$\gamma = 8a_1a_2a_3 - 2a_1 - 2a_3,$$

so ist:

$$(\alpha, \gamma) = -2a_1 - 2a_3.$$

Ich wähle

$$\frac{\gamma}{2} = 4a_1a_2a_3 - a_1 - a_3$$

relativ prim zum Modul $2^\nu \cdot m$; dann wird sich

$$\frac{\alpha - 1}{4} = a_0 \cdot \frac{\gamma}{2} - a_2a_3$$

durch passende Wahl von a_0 insbesondere so bestimmen lassen, dass

$$\frac{\alpha-1}{4} \equiv 0 \quad \text{d. h.} \quad \alpha \equiv 1 \pmod{2^\nu \cdot m}$$

wird. Nun ist;

$$(1, \gamma) = \gamma.$$

Nach der hypothetischen Congruenz ist daher stets:

$$(\alpha, \gamma) \equiv \gamma \pmod{2^\nu \cdot m},$$

falls

$$\alpha \equiv 1 \pmod{2^\nu \cdot m}$$

ist.

Bei der von uns getroffenen Wahl müsste somit:

$$-2a_1 - 2a_3 \equiv 8a_1a_2a_3 - 2a_1 - 2a_3,$$

d. h. es müsste allgemein aus der Bedingung, dass $4a_1a_2a_3 - a_1 - a_3$ relative Primzahl zu $2^\nu \cdot m$ ist, die Congruenz

$$8a_1a_2a_3 \equiv 0 \pmod{2^\nu \cdot m}$$

folgen. Sobald m von 1 verschieden ist, ist dieses eine offenbare Unmöglichkeit und somit ist nur noch darüber zu entscheiden, ob die fragliche Congruenz (mod. 2^ν) besteht oder nicht. Falls sie existirt, gestattet folgendes Beispiel sofort ihre explicite Form kennen zu lernen:

Da $(1, 2) = 2$ ist, so zieht die Voraussetzung:

$$\alpha \equiv 1, \quad \gamma \equiv 2 \pmod{2^\nu}$$

die Folgerung nach sich:

$$(\alpha, \gamma) \equiv 2 \pmod{2^\nu}.$$

Nach Formel (3) § 2 würde folgen:

$$(2n+1, 2) \equiv (-1)^n \cdot 2 \pmod{2^\nu}$$

und da $2n+1$ jeder ungeraden Zahl congruent werden kann, lässt sich die letzte Congruenz auch so schreiben:

$$(\alpha, 2) \equiv (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot 2 \pmod{2^\nu}.$$

Nun folgt weiter aus (1) § 2, wenn man sich zugleich rechter Hand des Legendre-Jacobischen Zeichens bedient:

$$(\alpha, 2+2n\alpha) \equiv 2n + \left(\frac{-1}{\alpha}\right) \cdot 2 \pmod{2^\nu}.$$

$2+2n\alpha$ kann jeder geraden Zahl (mod. 2^ν) congruent werden.

Es ist somit allgemein:

$$(3) \qquad (\alpha, \gamma) \equiv \frac{\gamma-2}{\alpha} + \left(\frac{-1}{\alpha}\right) \cdot 2 \pmod{2_\nu},$$

wo $\frac{\gamma-2}{\alpha}$ die Wurzel der Congruenz:

$$\alpha x \equiv \gamma - 2 \pmod{2^\nu}$$

ist.

Ich recurrire nun wieder auf das oben gebrauchte Beispiel des viergliedrigen Kettenbruchs. Damit $\frac{\gamma}{2}$ relative Primzahl zum Modul werde, ist jetzt nur erforderlich, dass eine der Zahlen a_1, a_3 gerade, die andere ungerade sei. Uebrigens bleiben sie, ebenso wie die Zahl a_2, völlig willkürlich. Da $\alpha - 1$ durch 2^ν theilbar angenommen wurde, so ist auch hier zufolge (3):

$$(\alpha, \gamma) \equiv \gamma \quad (\text{mod. } 2^\nu).$$

Andererseits ist direct:

$$\gamma - (\alpha, \gamma) = 8 a_1 a_2 a_3$$

und die rechte Seite ist im Allgemeinen nur durch 16 theilbar. Somit kann ν die Zahl 4 nicht überschreiten und es restirt, über die Existenz der Congruenz

$$(4) \qquad (\alpha, \gamma) \equiv \frac{\gamma - 2}{\alpha} + \left(\frac{-1}{\alpha}\right) \cdot 2 \quad (\text{mod. } 16)$$

zu entscheiden.

Eine etwas andere Schreibart resultirt aus folgender Congruenz:

$$(5) \qquad \frac{\gamma - 2}{\alpha} \equiv \alpha \cdot \gamma + 4 - 4\left(\frac{2}{\alpha}\right) - 2\left(\frac{-1}{\alpha}\right) \quad (\text{mod. } 16).$$

Man findet durch ihre Vermittlung:

$$(6) \qquad (\alpha, \gamma) \equiv \alpha \cdot \gamma + 4 - 4\left(\frac{2}{\alpha}\right) \quad (\text{mod. } 16).$$

Diese Congruenz besteht in der That, wie man sich durch den Schluss der vollständigen Induction von n- auf $(n+2)$-gliedrige Kettenbrüche überzeugt. Für zweigliedrige Kettenbrüche ist sie durch sofortige Ausrechnung bestätigt.

Der Ausdruck:

$$(7) \qquad \frac{(\alpha, \gamma) - \alpha \cdot \gamma - 4 + 4\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{16} = \psi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

ist eine eindeutig von α und γ abhängige ganze Zahl und ihr Wesen birgt die tiefer liegenden Gesetze der Zahlen (α, γ). Es sei gestattet, wenigstens die Recursionsformeln noch anzuführen, durch die sich ψ für jede Zahlcombination α, γ berechnen lässt:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \psi\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) &= -\psi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) + \frac{\left(\frac{2}{\alpha}\right) - 1}{2}, \\ \psi\left(\frac{\alpha}{\gamma + 2\alpha}\right) &= \psi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \frac{\alpha^2 - 1}{8}, \\ \psi\left(\frac{\alpha + \gamma}{\gamma}\right) &= -\psi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \frac{2\alpha\gamma + \gamma^2 + 8}{16} + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \left(\frac{2}{\alpha + \gamma}\right)\right]. \end{aligned}$$

Zugleich gelten die Anfangsbedingungen $\psi\left(\frac{1}{\gamma}\right) = 0$.

§ 4.

Die Gleichung $(\alpha, \gamma) = 0$.

Besonders möchte ich noch auf diejenigen Zahlenpaare aufmerksam machen, denen ein $(\alpha, \gamma) = 0$ entspricht. Nach (1) § 2 ist:

$$(\alpha, \gamma + 2n\alpha) = 2n + (\alpha, \gamma).$$

Lassen wir somit bei festgewähltem α die gerade Zahl γ eine arithmetische Reihe mit der Differenz 2α durchlaufen, so durchläuft (α, γ) seinerseits eine ebensolche mit der Differenz 2. Es ist also in jeder zu α primen Zahlclasse (mod. α) ein und nur ein γ enthalten so, dass $(\alpha, \gamma) = 0$ wird. Da $(\alpha, -\gamma)$ mit (α, γ) verschwindet, so giebt es nach gewähltem α im Ganzen $\varphi(\alpha)$ zulässige Zahlen γ, die sich in Paare einander entgegengesetzter ordnen. Anders, wenn wir γ zuvor wählen: Mit (α, γ) verschwindet auch $(\pm\alpha + n\gamma, \gamma)$, so dass für α sämmtliche Individuen mehrerer Zahlclassen (mod. γ) zugleich zugänglich sind.

Nach dem Satze des vorigen Paragraphen muss ein Zahlenpaar α, γ, für welches $(\alpha, \gamma) = 0$ ist, stets der Congruenz genügen:

$$\alpha \cdot \gamma + 4 - 4\left(\frac{2}{\alpha}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 16). \tag{1}$$

Somit ist für:

$$\begin{cases} \alpha = 8h \pm 1, & \gamma \equiv 0 \\ \alpha = 8h \pm 3, & \gamma \equiv 8 \end{cases} \quad (\text{mod. } 16). \tag{2}$$

Es lässt sich überdies leicht zeigen, dass, wenn γ durch 8 theilbar ist, dann auch immer Zahlen α bestimmt werden können, denen

$$(\alpha, \gamma) = 0$$

entspricht. Bezüglich des Moduls 32 liegt eine *weitere* Congruenz nicht mehr vor; denn aus dem Bestehen der speciellen Congruenz

$$\frac{\gamma - 2}{\alpha} + \left(\frac{-1}{\alpha}\right) \cdot 2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 32)$$

für die Zahlenpaare $(\alpha, \gamma) = 0$ würde sofort wieder die allgemeine:

$$(\alpha, \gamma) \equiv \frac{\gamma - 2}{\alpha} + \left(\frac{-1}{\alpha}\right) \cdot 2 \quad (\text{mod. } 32)$$

folgen. Ein Gleiches gilt auch für höhere Potenzen von 2. Vielmehr sind die Zahlwerthe γ immer in den niedersten geraden bez. ungeraden Vielfachen von 8 enthalten. Der grösste vorkommende Werth für γ ist $\alpha^2 - 1$. Die Vertheilung der $\varphi(\alpha)$ Zahlen γ in dem Intervall

$-(\alpha^2-1)$ und α^2-1 hängt durchaus von der individuellen Natur von α ab und lässt sich nur insoweit durch Congruenzen angeben, als es oben geschehen ist.

Ich präcisire diese Schlüsse noch etwas genauer, da ich dieselben später verwerthen will. Ich betrachte die Zahlenpaare α, γ, die $(\alpha,\gamma)=0$ geben, in Bezug auf den Zahlmodul p^n, unter p eine ungerade Primzahl verstanden. Die Zahl aller incongruenten zu einander relativ primen Zahlenpaare (mod. p^n) ist:

$$N=\frac{1}{2}\cdot p^{2n-2}(p^2-1). \tag{3}$$

Nun sei $\alpha=p^n$. Die zulässigen Werthe γ bilden dann ein System incongruenter zu α relativ primer Zahlen. Ihre Anzahl ist $p^{n-1}(p-1)$. Da mit (α,γ) auch $(\alpha+\nu\gamma,\gamma)$ verschwindet und für die gekennzeichneten γ $\alpha+\nu\gamma$ in jede Zahlclasse (mod. p^n) gelangen kann, so ist für beliebiges α die Anzahl der zugehörigen γ stets wenigstens gleich $p^{n-1}(p-1)$. Aber von den so entstehenden $p^{2n-1}(p-1)$ Zahlenpaaren sind je zwei einander congruent (mod. p^n), da ein simultaner Zeichenwechsel ohne Einfluss ist, so dass wir bestimmt $\frac{1}{2}\cdot p^{2n-1}(p-1)$ von den $\frac{1}{2}p^{2n-2}(p^2-1)$ incongruenten Zahlenpaaren in dem System unserer Zahlen α,γ nachgewiesen haben. Es zeigt sich später, dass auch die rückständigen $\frac{1}{2}\cdot p^{2n-2}(p-1)$ Paare sich darunter finden. Für jetzt mag es genügen bewiesen zu haben:

Reducirt man die Zahlenpaare α,γ, für welche $(\alpha,\gamma)=0$ ist, in Bezug auf die Primzahlpotenz p^n, so ist die Anzahl der so entstehenden Zahlenpaare grösser als die Hälfte der Zahl aller (mod. p^n) incongruenter Zahlenpaare.

Reduciren wir nunmehr bezüglich des Moduls 2^4, so ergeben sich die 4 Zahlenpaare, die der Congruenz:

$$\alpha\cdot\gamma+4-4\left(\frac{2}{\alpha}\right)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } 16) \tag{1}$$

genügen. (mod. 32) reducirt finden sich ebenfalls alle der Congruenz (1) genügende Zahlenpaare und es ist gar nicht schwierig, sich davon zu überzeugen, dass auch für den Modul 2^n die Zahl unserer Paare α,γ jedenfalls die Hälfte der Anzahl derjenigen Paare überschreitet, die (mod. 2^n) incongruent sind und zugleich der Congruenz (1) genügen.

§ 5.

Definition ausgezeichneter Untergruppen.

Bezeichnet nunmehr $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ eine Substitution der elementaren Congruenzgruppe zweiter Stufe, so denke ich die Substitution so in einen Kettenbruch entwickelt, dass alle Theilnenner positive oder negative *gerade* Zahlen sind. Diese *eindeutige* Entwicklung heisse:

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=2a_0-\frac{1}{2a_1}-\cdots-\frac{1}{2a_{2n}+\omega}. \tag{1}$$

Die Anzahl der Theilnenner ist ungerade. Eine zweite Substitution derselben Congruenzgruppe möge entsprechend ergeben:

$$\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}=2b_0-\frac{1}{2b_1}-\cdots-\frac{1}{2b_{2m}+\omega}. \tag{2}$$

Für die aus (1) und (2) zusammengesetzte Substitution gilt demnach die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}&\frac{(\alpha\alpha'+\beta\gamma')\,\omega+(\alpha\beta'+\beta\delta')}{(\gamma\alpha'+\delta\gamma')\,\omega+(\gamma\beta'+\delta\delta')}\\ &=2a_0-\frac{1}{2a_1}-\cdots-\frac{1}{2a_{2n}+2b_0}-\cdots-\frac{1}{2b_{2m}+\omega},\end{aligned} \tag{3}$$

welche ihrer Art nach den obigen ganz analog ist. Falls $2a_{2n}+2b_0$ verschwindet, reducirt sich die Anzahl der Theilnenner um 2.

Anknüpfend an diese Darstellung sieht man sofort, dass sich in folgender Weise eine unbegrenzte Reihe von Untergruppen der Congruenzgruppe zweiter Stufe darstellen lässt.

Es sei:

$$\frac{1}{2}(\alpha,\gamma)\equiv 0,\quad \frac{1}{2}(\alpha',\gamma')\equiv 0 \pmod{s}$$

wenn s eine beliebige ganze Zahl ist. Dann ist für die erzeugte Substitution ebenfalls:

$$\frac{1}{2}(\alpha\alpha'+\beta\gamma',\gamma\alpha'+\delta\gamma')\equiv 0 \pmod{s},$$

da:

$$\frac{1}{2}(\alpha\alpha'+\beta\gamma',\gamma\alpha'+\delta\gamma')=\frac{1}{2}(\alpha,\gamma)+\frac{1}{2}(\alpha',\gamma')$$

ist. *Also bilden alle Substitutionen, für welche:*

$$(4) \qquad \frac{1}{2}(\alpha, \gamma) \equiv 0 \pmod{s}$$

ist, eine Untergruppe. Um die dieser Bedingung entsprechenden Zahlenpaare etwas näher zu charakterisiren, so können wir zuvörderst für α wieder eine beliebige ungerade Zahl wählen. Die zulässigen Werthe γ sind dann gebildet durch die sämmtlichen Individuen von $\varphi(\alpha)$ Zahlclassen (mod. $2s\alpha$), die zugleich (mod. α) ein volles Restsystem zu α relativ primer Zahlen bilden. Bezüglich γ sind die zulässigen Zahlen α die Individuen mehrerer Zahlclassen (mod. γ).

Ich will insbesondere noch die Bedingung angeben, welche zu (4) hinzukommen muss, damit die dann definirte Untergruppe eine ausgezeichnete ist. Bedeutet $U = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ eine beliebige Substitution derselben, so ist zu dem Ende dieses erforderlich, dass $S^{-1}US$ und TUT in der Gruppe ebenfalls enthalten sind. S und T sind dabei in der gewohnten Bedeutung gebraucht:

$$S = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Aber es ist:

$$S^{-1}US = \begin{pmatrix}\alpha-\gamma, & \alpha+\beta-\gamma-\delta \\ \gamma\ , & \gamma+\delta\end{pmatrix}, \quad TUT = \begin{pmatrix}-\delta, & \gamma \\ \beta, & -\alpha\end{pmatrix}.$$

Es müssen demnach neben der obigen Congruenz (4) *noch die beiden andern erfüllt sein:*

$$(5) \qquad \frac{1}{2}(\alpha-\gamma, \gamma) \equiv 0, \quad \frac{1}{2}(\delta, \beta) \equiv 0 \pmod{s}.$$

Von diesen interessirt nur die zweite, da die erste ohne Weiteres erfüllt ist. Wir bilden nun die sämmtlichen am rationalen Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ gelegenen und der Congruenzgruppe 2[ter] Stufe angehörigen Dreiecke der ω-Figur, indem wir in (1) a_{2n} alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Wenn wir fordern, es sei:

$$-\frac{1}{2}(\delta, \beta) = a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n} \equiv 0 \pmod{s},$$

schränken wir a_{2n} auf eine einzige Zahlclasse (mod. s) ein. Indem wir die nun gewonnenen ausgezeichneten Untergruppen gemäss der Zahl s numeriren, folgt der Satz:

In dem Fundamentalpolygon unserer s^{ten} *ausgezeichneten Untergruppe hängen bei* $J = \infty$ *jedesmal* $2s$ *Doppeldreiecke zusammen, entsprechend bei* $J = 0$ *drei, bei* $J = 1$ *zwei.*

Der Index S unserer Untergruppe ist

$$S = 6s^2,$$

wie man leicht aus dem Satze findet, dass zwei Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$ der Congruenzgruppe 2ter Stufe immer und nur dann auch bezüglich der definirten Untergruppe äquivalent sind, wenn:

$$\frac{1}{2}(\alpha, \gamma) \equiv \frac{1}{2}(\alpha', \gamma'), \quad \frac{1}{2}(\delta, \beta) \equiv \frac{1}{2}(\delta', \beta') \pmod{s}$$

ist.

Die s^2 Repräsentanten, die (mod. 2) der Identität congruent sind, wählt man am passendsten so:

$$\begin{pmatrix}4\mu\nu+1, & 2\nu\\ 2\mu, & 1\end{pmatrix}; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2 \ldots (s-1).$$

Was das Fundamentalpolygon dieser s^{ten} Untergruppe angeht, so berufe ich mich auf die im folgenden Paragraphen beigegebene und ausführlich besprochene Zeichnung. Man wird dort nachträglich ohne Mühe im Stande sein, für irgend ein s Gestalt und Eigenart des Polygons der s^{ten} ausgezeichneten Untergruppe zu erkennen.

§ 6.

Eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index ∞.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine unbegrenzte Reihe von ausgezeichneten Untergruppen kennen gelernt, die sich nach der ganzen Zahl s in eine Reihe ordneten. Sie alle waren Untergruppen der ausgezeichneten Congruenzgruppe zweiter Stufe vom Index 6, welche zugleich dem einfachsten Falle $s = 1$ entsprach. Andrerseits bilden alle diejenigen Substitutionen, welche in jeder einzelnen von den unendlich vielen Untergruppen zugleich enthalten sind, ebenfalls eine ausgezeichnete Untergruppe, welche ich G nennen will. Der Index dieser Untergruppe ist nicht mehr endlich, wie man denn auch sagen könnte, G entspräche dem Falle $s = \infty$.

Es ist wichtig, dass wir für G eine fassbare arithmetische Definition gewinnen können. G besteht offenbar aus allen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, für welche zugleich:

$$(1) \qquad (\alpha, \gamma) = 0, \qquad (\delta, \beta) = 0$$

ist. Dass diese Forderung gruppendefinirend ist, ist wieder a priori klar. Nach Früheren können wir die Substitutionen von G folgendermassen näher charakterisiren:

Für α ist es erlaubt, jede ungerade Zahl zu nehmen, γ nimmt dann im Ganzen noch $\varphi(\alpha)$ Werthe an, die sich in Paare einander entgegengesetzter Zahlen einordnen. Ist α, γ eine vorkommende Combination, so finden sich auch die Werthepaare $\pm\alpha + n\gamma, \gamma$. Ist α und γ bestimmt, so giebt es nur eine dazugehörige Combination β, δ,

welche eine Substitution der Untergruppe giebt; d. h. von dem ganzen Cyklus der unendlich vielen Doppeldreiecke, die am Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ zusammenhängen, gehört nur eins zur Untergruppe. Somit hängen im Polygone unserer Untergruppe bei $J=\infty$ stets unendlich viele Doppeldreiecke zusammen, bei $J=0$, wie gewohnt, drei, bei $J=1$ zwei. Als Repräsentantensystem innerhalb der Congruenzgruppe zweiter Stufe empfiehlt es sich, folgendes zu nehmen:

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} 4\mu\nu+1, & 2\nu \\ 2\mu, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, \ldots \infty.$$

Dem entspricht folgende Form des Fundamentalpolygons: Man wählt im ersten Parallelstreifen der ω-Figur (d. h. in dem Flächenbande der Halbebene, das links durch die imaginäre Axe, rechts durch die Gerade begrenzt ist, die von $\omega=\frac{1}{2}$ mit der eben genannten Axe parallel läuft) die den folgenden Substitutionen zugehörigen Dreiecke:

$$(3)\qquad \omega' = \frac{-1}{\omega-\nu}, \quad \omega' = \frac{\omega}{2\mu\omega+1}; \qquad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, \infty.$$

Die dieser Wahl entsprechende Figur bildet man in jedem mit dem ersten Parallelstreifen symmetrischen bez. congruenten, um das vollständige Polygon zu erhalten. Dasselbe besteht aus unendlich vielen Dreiecken, hat aber nirgends irrationale Oeffnungspunkte. Auf der beigegebenen Tafel ist die Form des Polygons angedeutet. Ich bezeichne die freien Kreiskanten, wie in der Fig. angegeben, mit $r_1^0, r_2^0, \ldots$. In dem symmetrischen Streifen, der sich links an die imaginäre Axe lagert, mögen die entsprechenden Kanten mit $l_1^0, l_2^0 \ldots l_n^0 \ldots$ bezeichnet sein. Für die congruente Configuration, welche sich neben die jetzt bezeichnete nach rechts hin lagert, wachse der obere Index um eine Einheit; nach links hin nehme er entsprechend ab. Je zwei freie Grenzkreise der Figur werden dann in einander übergeführt durch Substitutionen unserer Gruppe G und zwar ist die so gemeinte Zuordnung der Kreise angegeben durch:

$$r_n^{(i)} - l_n^{(i+2n+1)}$$

und hieraus endlich entspringt folgendes System von Erzeugenden:

$$(4)\qquad \omega' = \frac{(8n^3+12n^2+2n-1+4n^2i+4ni)\omega - 4n(n+1)(i^2+2ni+i+1)}{4n(n+1)\omega-(4n^2i+4ni+2n+1)}.$$

Hierbei durchläuft i alle ganzen Zahlen, n nur die positiven.

Es kommt mir vor allen Dingen noch darauf an, folgenden Satz darzuthun: „*Die Gruppe G ist Untergruppe einer gewissen, sogleich näher zu beschreibenden Congruenzgruppe 48^{ter} Stufe; aber sie ist nicht Untergruppe irgend einer andern Congruenzgruppe*“.

Der Beweis dieser Behauptung lässt sich folgendermassen führen: Gesetzt G sei Untergruppe einer Congruenzgruppe der Stufe

$$m = 2^n \,.\, p^r \,.\, q^s \ldots,$$

wo p und q etc. von einander verschiedene Primzahlen sind, so können wir zuvörderst die fragliche Congruenzgruppe als ausgezeichnet annehmen, da G selbst ausgezeichnet ist. Da ferner p^r relative Primzahl zu 2^n, q^s etc. ist, so ist G sowohl in einer ausgezeichneten Congruenzgruppe der Stufe 2^n, als in einer ebensolchen der Stufe p^r u. s. w. enthalten. Ich trenne nun gerade und ungerade Primzahlen.

Sei demnach p eine beliebige ungerade Primzahl und G Untergruppe einer ausgezeichneten Congruenzgruppe der Stufe p^r. Es giebt im Ganzen:

$$N = \frac{1}{2}\, p^{3r-3}(p^2 - 1)$$

(mod. p^r) incongruente Substitutionen und die ihnen entsprechenden Dreiecke bilden das Fundamentalpolygon der kleinsten ausgezeichneten Congruenzgruppe $p^{r\,\text{ter}}$ Stufe. In demselben sind

$$M = \frac{1}{2}\, p^{2r-2}(p^2 - 1)$$

Windungspunkte für $J = \infty$ enthalten; d. h. in andern Worten: Es giebt M (mod. p^r) incongruente Paare von gegen einander relativ primen Zahlen α, γ. Die N incongruenten Substitutionen bilden, wofern man sie immer nur (mod. p^r) betrachtet, eine Gruppe der Ordnung N. Jede ausgezeichnete Gruppe Γ der Stufe p^r ist, wenn man sie (mod. p^r) reducirt denkt, in dieser endlichen Gruppe der Ordnung N ausgezeichnet. Die Anzahl der Windungspunkte bei $J = \infty$, welche im Polygon einer solchen Gruppe Γ enthalten sind, sei M'. Der Quotient $\frac{M}{M'} = z$ ist eine ganze Zahl und bedeutet die Anzahl (mod. p^r) incongruenter Paare relativer Primzahlen α, γ, welche als zusammengehörige erste und dritte Coefficienten in den Substitutionen der ausgezeichneten Congruenzgruppe Γ der Stufe p^r vorkommen. Es ist somit auch:

$$\frac{M}{z} = M'$$

d. h. z ist ein Theiler von M und falls $z > \frac{M}{2}$, so ist:

$$z = M.$$

Uebersteigt somit die Anzahl z die Hälfte der Zahl M, der überhaupt (mod. p^r) incongruenten Paare relativer Primzahlen, so kommt z dieser Anzahl M gleich.

Von diesem Princip mache ich in folgender Weise Gebrauch: Gesetzt, unsere oben mit G bezeichnete Gruppe sei Untergruppe einer Congruenzgruppe Γ der Stufe p^r, so müsste für die Gruppe Γ nach

den Angaben des § 4 die Zahl z der vorkommenden incongruenten Combinationen α, γ die Hälfte aller überhaupt möglichen Combinationen M überschreiten, d. h. es wäre $z = M$. Dieses aber heisst: In der Congruenzgruppe Γ kommen, wenn wir sie (mod. p^r) reduciren, alle incongruenten Zahlenpaare α, γ vor und, wenn wir sie somit absolut betrachten, so finden sich an jedem rationalen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ der reellen ω-Axe Dreiecke, die der Gruppe Γ angehören. Es giebt nur drei ausgezeichnete Untergruppen dieser Art. Eine gehört der zweiten, eine der dritten und endlich die beiden gemeinsame Untergruppe der sechsten Stufe an. Diese letztere ist definirt durch die Bedingung:

$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 6). \tag{5}$$

Und nun ist in der That G in dieser Gruppe der 6^{ten} Stufe enthalten, wie man am leichtesten aus dem System der Erzeugenden von G entnimmt. Eine andere Gruppe Γ der geforderten Eigenschaft existirt nicht. Reducirt man also G bezüglich der ungeraden nicht durch 3 theilbaren Zahl m, so entsteht die Gesammtheit der incongruenten Substitutionen; nur bezüglich $3^n \cdot m$ ($m \equiv 1$ mod. 2) reducirt, entstehen nicht alle, sondern nur die Substitutionen, welche der Congruenz genügen:

$$\alpha\beta + \gamma\delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3).$$

Es restirt die Betrachtung der Potenzen der Zahl 2. Für die Substitutionen von G besteht nach § 4 die Congruenz:

$$\alpha \cdot \gamma + 4 - 4\left(\frac{2}{\alpha}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 16). \tag{6}$$

Aber G ist ausgezeichnet; somit ist auch:

$$\delta \cdot \beta + 4 - 4\left(\frac{2}{\delta}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 16). \tag{7}$$

Also ist G Untergruppe der ausgezeichneten Congruenzgruppe 16^{ter} Stufe, welche durch folgende Congruenzen definirt ist:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 8\\ 8 & 11\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5 & 8\\ 8 & 13\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\end{cases} \quad (\text{mod. } 16). \tag{8}$$

Bezüglich der Zahl 32 reducirt sich G, wie eine kurze Rechnung

beweist, auf die nämliche Congruenzgruppe *sechszehnter* Stufe, so dass *keine* weitern Congruenzbedingungen hinzukommen.

Ein Gleiches gilt auch für 64 und es gelingt wieder durch den Schluss der vollständigen Induction dieses Resultat zu verallgemeinern. Innerhalb des Systems (mod. 2^n) incongruenter Substitutionen*) giebt es 2^{3n-10} Substitutionen U, die die Congruenzen (8) erfüllen. Gesetzt G reducire sich (mod. 2^{n-1}) auf die Gesammtheit der 2^{3n-13} (mod. 2^{n-1}) incongruenter Substitutionen U, so findet sich Folgendes. Jede von diesen 2^{3n-13} Substitutionen spaltet sich beim Fortgang zum Modul 2^n in 8 verschiedene, welche an vier incongruenten rationalen Punkten $\frac{\alpha}{\gamma}$ liegen. Wir schliessen, wie oben, dass an jedem dieser 4 Punkte Dreiecke der Gruppe G liegen. Demnach sind in G mindestens 2^{3n-11} von den 2^{3n-10} (mod. 2^n) incongruenten U enthalten. Fänden sich in G keine weitern Substitutionen, als diese 2^{3n-11}, so müssten dieselben eine ausgezeichnete Untergruppe innerhalb der Gesammtheit der 2^{3n-10} U bilden. Die Gruppentheorie zeigt, dass keine Untergruppe der hier geforderten Eigenschaft existirt und dass sich also G in Bezug auf den Modul 2^n auf die durch (8) angegebene Gruppe reducirt.

Es ist somit G als Untergruppe in folgender Congruenzgruppe 48^{ter} Stufe enthalten:

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned} \alpha\,.\,\gamma + 4 - 4\left(\tfrac{2}{\alpha}\right) &\equiv 0\\ \delta\,.\,\beta + 4 - 4\left(\tfrac{2}{\delta}\right) &\equiv 0 \end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 16)$$
$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 6)$$

*G ist **nicht** Untergruppe irgend einer andern Congruenzgruppe.*

§ 7.

Functionentheoretische Bedeutung der gewonnenen ausgezeichneten Untergruppen.

Der Modul des elliptischen Integrals erster Gattung, den man gewöhnlich mit k^2 bezeichnet, ist für den Standpunkt der elliptischen Modulfunctionen der Hauptmodul zweiter Stufe. Ich bezeichne denselben, um mich des Exponenten 2 zu entledigen, mit $\lambda(\omega)$ und fixire

---

*) Ich bemerke hierbei, dass ich zwei Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ im Text auch in Bezug auf den Modul 2^n nur dann als congruent ansehe, wenn entweder:
$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha', & \beta &\equiv \beta' \text{ etc.}\\ \text{oder:}\quad \alpha &\equiv -\alpha', & \beta &\equiv -\beta' \text{ etc.}\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 2^n)$$
ist.

ihn durch die von der gewöhnlichen Auffassung in etwas abweichenden Bedingungen:

$$(1)\qquad \lambda(0)=0,\quad \lambda(1)=1,\quad \lambda(i\infty)=\infty.$$

Die s^{te} Wurzel aus λ heisse $\Phi(\omega)$:

$$(2)\qquad \Phi(\omega)=\sqrt[s]{\lambda(\omega)}.$$

Dieselbe ist, wie man weiss, eine eindeutige elliptische Modulfunction, welche durch die Festsetzung:

$$(2\text{a})\qquad \Phi(1)=1$$

des Näheren fixirt sei. Unter diesen Umständen überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit der Gleichungen:

$$(3)\qquad \Phi(\omega+2a)=e^{-\frac{2ai\pi}{s}}\cdot\Phi(\omega),\quad \Phi\left(\frac{-1}{\omega}\right)=\frac{e^{\frac{2i\pi}{s}}}{\Phi(\omega)}.$$

Ist eine beliebige Substitution der Congruenzgruppe 2^{ter} Stufe durch $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ dargestellt, so findet man deren Wirkung auf $\Phi(\omega)$ sofort auf Grund der Formeln (3). Es zeigt sich:

$$\Phi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\frac{e^{(\alpha,\gamma)\frac{\pi i}{s}}}{e^{(\delta,\beta)\frac{\pi i}{s}}}\cdot\Phi(\omega).$$

Ist daher:

$$\frac{1}{2}(\alpha,\gamma)\equiv 0,\qquad \frac{1}{2}(\delta,\beta)\equiv 0\qquad (\text{mod. } s),$$

so ist:

$$\Phi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\Phi(\omega).$$

Die s^{te} Wurzel aus $\lambda(\omega)$ bleibt bei den Substitutionen der s^{ten} obigen ausgezeichneten Untergruppe invariant.

Aber die Gruppe ist ausgezeichnet. Es muss demnach auch:

$$\Phi(\omega+1)=\sqrt[s]{1-\lambda}$$

bei derselben erhalten bleiben. Somit können wir auch $\sqrt[s]{\lambda}$ und $\sqrt[s]{1-\lambda}$ simultan betrachten und wissen, dass in der dadurch definirten Untergruppe unsere s^{te} Gruppe enthalten sein muss. Zwischen beiden Grössen besteht dann die selbstverständliche Relation:

$$(\sqrt[s]{\lambda})^s+(\sqrt[s]{1-\lambda})^s=1$$

oder homogen geschrieben:

$$x_1^s + x_2^s + x_3^s = 0. \tag{4}$$

Diese Curve s^{ter} Ordnung lässt aber $6s^2$ sofort angebbare Collineationen in sich zu und ist somit ein *eindeutiges* Bild des Polygons unserer s^{ten} ausgezeichneten Untergruppe.

Die in § 5 *gewonnenen Gruppen sind functionentheoretisch durch Simultanstellung von* $\sqrt[s]{\lambda}$, $\sqrt[s]{1-\lambda}$ *definirt.*

Ich ziehe nun eine bemerkenswerthe Folgerung aus den Sätzen des vorigen Paragraphen. Man weiss, dass $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[8]{\lambda}$ Congruenzmoduln sind. In der That ist die Gruppe von $(\sqrt[8]{\lambda}, \sqrt[8]{1-\lambda})$ angegeben durch die beiden Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\,.\,\gamma + 4 - 4\left(\tfrac{2}{\alpha}\right) \equiv 0 \\ \delta\,.\,\beta + 4 - 4\left(\tfrac{2}{\delta}\right) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } 16)\,. \tag{5}$$

Ich setze hinzu, dass auch die Gruppe von $(\sqrt[3]{\lambda}, \sqrt[3]{1-\lambda})$ *zum Theil* durch Congruenzen zu definiren ist. Sie ist nämlich eine Untergruppe der genannten Congruenzgruppe 6^{ter} Stufe:

$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 6). \tag{6}$$

Aber Congruenzen genügen für $(\sqrt[3]{\lambda}, \sqrt[3]{1-\lambda})$ nicht mehr allein; wie denn auch die Congruenz (6) nicht der 3^{ten} Wurzel aus λ einzeln anhaftet, sondern nur eine Folge der Simultanstellung von $\sqrt[3]{\lambda}$ und $\sqrt[3]{1-\lambda}$ ist. Ist s durch 2 oder 3 theilbar, so ist die Gruppe von $(\sqrt[s]{\lambda}, \sqrt[s]{1-\lambda})$ an die Congruenzen (5) und (6) gebunden, aber *nicht* an weitere. Ist s relativ prim zu 6, so ist die Gruppe von $(\sqrt[s]{\lambda}, \sqrt[s]{1-\lambda})$ abgesehen davon, dass sie Untergruppe der Congruenzgruppe zweiter Stufe ist, an gar keine Congruenzen gebunden. Denn die functionentheoretische Bedeutung der Congruenzen (5), (6) ist durch $\sqrt[8]{\lambda}$ und $\sqrt[3]{\lambda}$ erschöpft und etwa hierüber hinaus noch bestehende Congruenzen für irgend eine $\sqrt[s]{\lambda}$ würden für die Gruppe G des vorigen Paragraphen gelten müssen, die jede Wurzel aus λ und $1-\lambda$ invariant lässt. Das Bestehen weiterer Congruenzen für G hat sich aber als unmöglich herausgestellt.

Man pflegte mit der somit erledigten Frage immer noch die andere zu verknüpfen:

„*Für welche Zahlen* s *ist* $\sqrt[s]{\lambda(1-\lambda)}$ *Congruenzmodul?*“

Diese Frage erledige ich so: Es bleibe

$$\psi(\omega) = \sqrt[s]{\lambda(1-\lambda)}$$

bei einer Congruenzgruppe invariant, so gilt ein Gleiches für:

$$\chi(\omega) = \psi\left(\frac{-1}{\omega}\right).$$

Aber es ist vermöge der Relation:

$$\lambda\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \frac{1}{\lambda(\omega)}$$

der Quotient

$$\frac{\psi(\omega)}{\chi(\omega)} = \lambda^{\frac{3}{s}}.$$

Derselbe ist Congruenzmodul, so dass $\frac{s}{3}$ eingeschränkt ist auf die Werthe 1, 2, 4, 8. In der That sind

$$s = 3, 6, 12, 24$$

zulässige Werthe für s. Die Gruppe von $\sqrt[24]{\lambda(1-\lambda)}$ ist von der 48ten Stufe und, wofern man noch $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$ hinzustellt, definirt durch:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \cdot \gamma + 4 - 4\left(\frac{2}{\alpha}\right) &\equiv 0 \\ \delta \cdot \beta + 4 - 4\left(\frac{2}{\delta}\right) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } 16),$$

$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 6).$$

Die andern 3 Gruppen für

$$\sqrt[12]{\lambda(1-\lambda)}, \quad \sqrt[6]{\lambda(1-\lambda)}, \quad \sqrt[3]{\lambda(1-\lambda)}$$

leitet man ohne Mühe hieraus ab.

Anmerkung: Die ersten Untersuchungen über das Verhalten der Wurzeln aus k^2 bei Annäherung des Periodenverhältnisses an einen reellen rationalen Werth sind von Riemann ausgeführt. Man sehe die „Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen.“ Für die im Texte eingehaltene Methodik vergleiche man die Entwicklungen, welche Herr Dedekind über die fundamentalere Function $\log \eta(\omega)$ in den „Erläuterungen zu den Riemann'schen Fragmenten“ ausgeführt hat.

Dass von allen Wurzeln aus k^2 nur k^2, k, $\sqrt{k}$, $\sqrt[4]{k}$, desgl. von allen Wurzeln aus $k^2 . k'^2$ nur $k^2 . k'^2$, $k . k'$, $\sqrt{k.k'}$, $\sqrt[4]{k.k'}$, $\sqrt[3]{k^2.k'^2}$, $\sqrt[3]{k.k'}$, $\sqrt[6]{k.k'}$, $\sqrt[12]{k.k'}$ Congruenzmoduln sind, theilte Herr Klein in der am Eingang bereits citirten Abhandlung „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen“ ohne Beweis mit. Einen Beweis dieser

Mittheilung hat in neuester Zeit auch Herr Pick entwickelt*). Zufolge einer brieflichen Mittheilung von Herrn Pick erfahre ich, dass unsere Beweise namentlich insofern einander gleichen, als in beiden die Gruppe derjenigen Substitutionen in die Discussion gezogen ist, welche sämmtliche Wurzeln aus k^2 ungeändert lassen.

Braunschweig, den 28. Juli 1886.

---

*) Vergl. die hier nachfolgende Arbeit.

Ich möchte hier vor allem hinzufügen, dass die Untersuchungen der Herren Fricke und Pick, über die ich durch persönliche Bezugnahme fortlaufend unterrichtet war, durchaus gleichzeitige gewesen sind und dass die Darstellung des Herrn Fricke hier nur darum vorangestellt wurde, weil das ausgeführte Manuscript einen Tag früher bei der Redaction einlief als das des Herrn Pick.

Was meinen eigenen Beweis des in Rede stehenden Theorems angeht, so beruhte derselbe auf einem Vergleich der gruppentheoretischen Eigenschaften, welche einerseits den zu $\sqrt[8]{k^2}$ gehörigen Substitutionen, andererseits irgendwelcher zu einem Zahlenmodul m gehörigen Untergruppe zukommen. Durch die Betrachtungen der Herren Fricke und Pick ist die Beweisführung wesentlich einfacher und durchsichtiger geworden.

F. Klein.

Ueber gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen*).

Von

Georg Pick in Prag.

Die von Herrn Hermite**) mit $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ bezeichneten eindeutigen Functionen des Periodenquotienten ω eines elliptischen Integrals, also die Grössen $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$, $\sqrt[24]{\lambda(1-\lambda)}$, wenn λ das sogenannte Doppelverhältniss des Integrals bedeutet, sind bekanntlich Congruenzmoduln,***) das heisst: es lassen sich diejenigen linearen Substitutionen

$$R(\omega) = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

bei welchen eine derselben ungeändert bleibt, durch Congruenzen charakterisiren, denen α, β, γ, δ nach gewissen Zahlenmoduln unterworfen werden. Diese Zahlenmoduln, die „Stufen" nach der von Herrn Klein eingeführten Bezeichnungsweise, sind in den in Rede stehenden Fällen bezw. 16, 16, 48. Alles dies ist unmittelbar an den von Herrn Hermite für jene Functionen gegebenen Verwandlungstabellen abzulesen.

Es lag nun die Frage nahe, ob ausser den genannten Wurzeln aus λ (resp. $1-\lambda$) und $\lambda(1-\lambda)$ noch andere existiren, welche Congruenzmoduln sind, da ja bekanntlich alle solchen Wurzeln in eindeutiger Weise von ω abhängen. Sieht man von den selbstverständlichen Fällen ab, welche durch Potenzirung der oben angegebenen Moduln erhalten werden, so lautet die Antwort auf die Frage verneinend. Der hierin enthaltene Satz ist vor 7 Jahren von Herrn Klein aufgestellt aber ohne Beweis veröffentlicht worden†). Ich selbst

---

*) Man vergl. die vorstehende Arbeit des Herrn Fricke, insbesondere die von mir hinzugefügte Schlussbemerkung. F. Klein.

**) Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859.

***) Vergl. Klein, diese Annalen Bd. XVII, p. 63, 65.

†) Vergl. die schon citirte Stelle in Bd. 17 der Annalen.

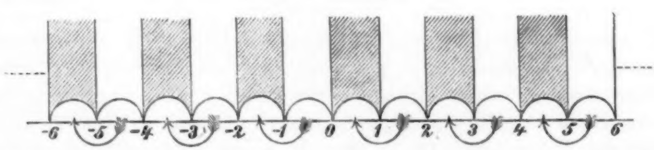
beabsichtige hier einen Beweis zu geben, der ausser der wünschenswerthen Kürze noch den Vorzug zu besitzen scheint, dass er den Antheil genau feststellt, welchen algebraische Congruenzen bei der Charakterisirung der Gruppen jener Moduln $\sqrt[n]{\lambda}$ etc. haben können. Die Methode meiner Untersuchung beruht in letzter Linie auf der Heranziehung einer Gruppe, welche in Bezug auf die Gesammtgruppe der linearen ganzzahligen Substitutionen von unendlich hohem Index ist, nämlich der Gruppe Γ_∞ von $\log \lambda$. Ich schicke die Untersuchung dieser Gruppe voraus, um später die Beantwortung unserer ursprünglichen Frage auf dieselbe zurückzuführen.

1.

Unter den sechs möglichen Bestimmungen für λ soll im folgenden stets diejenige festgehalten werden, welche durch die Festsetzungen

$$\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \omega = 0,$$
$$\lambda = \infty \quad \text{für} \quad \omega = \infty,$$
$$\lambda = 1 \quad \text{für} \quad \omega = 1$$

charakterisirt ist. Unter dieser Voraussetzung kann als „Fundamentalpolygon“ von $\log \lambda$ der folgende Complex von unendlich vielen λ-Dreiecken der ω-Ebene angesehen werden:



welchen man sich nach beiden Seiten (congruent dem in der Figur ausgeführten Theile) in's Unendliche erstreckt vorzustellen hat. Die beigesetzten Pfeile versinnlichen die Zusammengehörigkeit der Randkanten, und ihr Richtungssinn bezeichnet jedesmal diejenige von zwei entgegengesetzten „erzeugenden“ Substitutionen, welche sogleich explicite angegeben werden soll. Man findet als erzeugende Substitutionen leicht:

$$\omega' = R_h(\omega) = \frac{2h^2 + (1-2h)\omega}{(1+2h) - 2\omega} \tag{1}$$

wo h jede ungerade Zahl bedeutet. Werden, wie üblich, die Substitutionen

$$\omega' = 1 + \omega, \quad \omega' = \frac{-1}{\omega}$$

mit bezw. S und T bezeichnet, so kann (1) in die Form

$$R_h = S^{-h} T S^2 T S^h \tag{2}$$

gesetzt werden.

Von der solchergestalt definirten Gruppe Γ_∞ von $\log \lambda$ suchen wir nun erstens das Verhalten in Beziehung auf einen beliebigen ungeraden Zahlenmodul m in Erfahrung zu bringen. Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass selbstverständlich allemal

$$S^{r+m} \equiv S^r \pmod{m},$$

wobei r ganz beliebig ist. Es ist deshalb

$$R_m \equiv TS^2T \pmod{m},$$

$$R_m^{\frac{m+1}{2}} \equiv TST \pmod{m};$$

und ferner

$$(R_1 \,.\, R_m)^{\frac{m-1}{2}} \equiv (S^{-2})^{\frac{m-1}{2}} \equiv S \pmod{m},$$

mit Benutzung der bekannten Identität

$$TSTSTS = 1.$$

Sodann folgt

$$(R_1 R_m)^{\frac{m-1}{2}} \cdot R_m^{\frac{m+1}{2}} \cdot (R_1 R_m)^{\frac{m-1}{2}} \equiv S \,.\, TST \,.\, S \equiv T \pmod{m}.$$

Man sieht also, dass die Gruppe von $\log \lambda$ immer zwei Substitutionen enthält, welche bezw. congruent sind S und T nach dem beliebig vorgelegten ungeraden Zahlenmodul m. Hieraus geht hervor, *dass die Gruppe von $\log \lambda$ Substitutionen von jedem möglichen Typus modulo m enthält.*

Etwas complicirter gestaltet sich die Beschaffenheit der Gruppe nach Moduln, welche Potenzen der Zahl 2 sind. Wir überzeugen uns zunächst durch wirkliche Ausrechnung ohne Schwierigkeit, dass die Congruenz

$$R_3^{3 \cdot 2^{\nu-4} + 2^{2\nu-7}} \,.\, R_5^{2^{\nu-5}} \,.\, R_1^{9 \cdot 2^{\nu-5}} \equiv S^{2^{\nu-1}} \pmod{2^\nu}$$

für jedes $\nu \geqq 5$ richtig ist. Es enthält Γ_∞ also jedenfalls eine Substitution, welche modulo 2^ν zu $S^{2^{\nu-1}}$ congruent ist, sobald $\nu \geqq 5$. Nehmen wir die Substitutionen

$$R_1^{2^{\nu-2}} = S^{-1} T S^{2^{\nu-1}} TS \equiv \frac{2^{\nu-1} + (1 + 2^{\nu-1})\,\omega}{(1 + 2^{\nu-1}) + 2^{\nu-1}\omega} \pmod{2^\nu},$$

$$R_1^{2^{\nu-3}} \,.\, R_3^{2^{\nu-3}} = S^{-1} TS^{2^{\nu-2}} TS^{-2} TS^{2^{\nu-2}} TS^3 \equiv \frac{2^{\nu-1} + \omega}{1 + 2^{\nu-1}\omega} \pmod{2^\nu}$$

hinzu, welche gleichfalls der Gruppe angehören, so haben wir drei Substitutionen, von welchen jede modulo $2^{\nu-1}$ der Identität congruent ist, und die, wie man sich leicht überzeugt, modulo 2^ν *sämmtliche acht Typen* von Substitutionen erzeugen, welche modulo $2^{\nu-1}$ der Identität congruent sind. Hieraus schliesst man sofort, dass die Gruppe Γ_∞ keine charakteristische Eigenschaft modulo 2^ν besitzt, wenn $\nu \geqq 5$

ist. *Der höchste Modul, der somit für* Γ_∞ *überhaupt in Betracht kommen kann, ist* 16.

Wir untersuchen nun die Gruppe successive nach den Moduln 2, 4, 8, 16. Modulo 2 reducirt sich dieselbe, wie der blosse Anblick der erzeugenden Substitutionen lehrt, auf die Identität. Modulo 4 reduciren sich die Erzeugenden zunächst auf R_1 und R_3, welche aber untereinander modulo 4 übereinstimmen, wie denn leicht einzusehen ist, dass immer

$$R_h^k \equiv R_{h'}^k \text{ (mod. } 2^\nu)$$

gleichzeitig mit

$$kh \equiv kh' \text{ (mod. } 2^{\nu-1})$$

besteht. Da ferner

$$R_1^4 \equiv 1 \text{ (mod. 4)}$$

ist, so enthält Γ_∞ nur zwei von den vier Typen, in welche die der Identität modulo 2 congruenten Substitutionen modulo 4 zerfallen.

Einer der fehlenden Typen ist offenbar der von S^2; durch Hinzufügung der erzeugenden Substitution S^2 würde die Zahl der Typen auf 4 vervollständigt werden.

Modulo 8 reduciren sich die erzeugenden Substitutionen auf R_1 und R_3. Wollen wir indess nur solche Substitutionen bilden, welche modulo 4 der Identität congruent sind, so ist von diesen Erzeugenden jedesmal nur eine gerade Zahl zu nehmen, oder, anders ausgedrückt, es sind R_1^2 und $R_1 R_3$ als Erzeugende anzusehen (weil $R_3^2 \equiv R_1^2$ (mod. 8)). Im Ganzen erhalten wir so ausser der Identität noch drei Typen von Substitutionen modulo 8:

$$R_1^2, \; R_1 R_3, \; R_1^3 R_3.$$

Denn man bemerke, dass überhaupt jede modulo $2^{\nu-1}$ der Identität congruente Substitution höchstens die Periode Zwei modulo 2^ν besitzen kann.

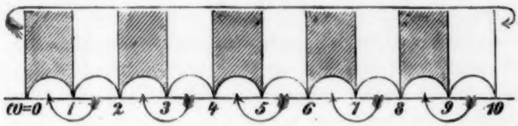
Von den acht modulo 8 verschiedenen Typen überhaupt, die modulo 4 mit der Identität übereinstimmen, existiren in Γ_∞ nur 4; die volle Zahl würde hergestellt durch Hinzufügung der erzeugenden Substitution S^4.

In ähnlicher Weise kann die Untersuchung, die ja hier immer nur auf eine geringe Zahl von Möglichkeiten auszudehnen ist, auch für den Modul 16 geführt werden. Es ergiebt sich auch da, dass nur die Hälfte der modulo 8 der Identität congruenten acht Typen auftritt, und dass S^8 einer der fehlenden Typen ist. Von 32 angefangen jedoch tritt das andere früher festgestellte Verhalten auf.

Wir erhalten also im Ganzen das Resultat: *Die Gruppe von* $\log \lambda$ *besitzt charakteristische Eigenschaften nur in Bezug auf jene Zahlenmoduln, welche Theiler von* 16 *sind.*

2.

Gehen wir nun zur Untersuchung der Gruppe Γ_n von $\sqrt[n]{\lambda}$ über. Das Fundamentalpolygon von $\sqrt[n]{\lambda}$ ist (im Beispiele $n=5$) das folgende:



Erzeugende Substitutionen sind

$$S^{2n};$$

$$S^{-h}TS^2TS^h \qquad (h=1,3,\ldots,2n-1).$$

Offenbar können wir sagen, dass Γ_n aus Γ_∞ durch Hinzunahme der erzeugenden Substitution S^{2n} hervorgeht.

Beachten wir, dass jedenfalls $\sqrt[n]{\lambda}$ eine Werthänderung erfährt, wenn ω einer Substitution S^r unterworfen wird, in welcher $r<2n$ ist. Soll nun $\sqrt[n]{\lambda}$ Congruenzmodul sein, und zwar von der N^{ten} Stufe, so muss die Gruppe Γ_n jedenfalls die Substitution S^N enthalten; das heisst, es muss N durch $2n$ theilbar sein. Dies mit dem Resultat des vorigen Paragraphen zusammengehalten, wornach N ein Theiler von 16 sein muss, giebt für n die Möglichkeiten 1, 2, 4, 8. Wir überzeugen uns nun leicht von der Richtigkeit des übrigens, wie Eingangs bemerkt, aus den Hermite'schen Untersuchungen bekannten Resultats, dass λ, $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[8]{\lambda}$ Congruenzmoduln von bezw. der 2^{ten}, 4^{ten}, 8^{ten}, 16^{ten} Stufe sind. Von λ ist dies auch in diesem Zusammenhange leicht durch Betrachtung der Erzeugenden einzusehen. Für die übrigen beachte man, dass die Gruppe jedes folgenden in der des Vorhergehenden als Untergruppe vom Index Zwei enthalten ist. Andrerseits enthält die Gruppe jedes folgenden Moduls in Bezug auf die ihr eben zugesprochene Stufenzahl als Modul nur halb so viel Typen als die des vorhergehenden. Offenbar folgt hieraus, dass, wenn einer von den vier angegebenen Moduln Congruenzmodul von der behaupteten Stufe ist, dies auch für den nächstfolgenden gilt; *wodurch dann die gesammte Frage hinsichtlich $\sqrt[n]{\lambda}$ erledigt ist.*

Anhangsweise sei gezeigt, wie man nun die entsprechende Frage für $\sqrt[n]{\lambda(1-\lambda)}$ auf das eben für $\sqrt[n]{\lambda}$ Bewiesene zurückführen kann. Soll $\sqrt[n]{\lambda(1-\lambda)}$ Congruenzmodul sein, so gilt jedenfalls dasselbe von

$\sqrt[n]{\frac{\lambda-1}{\lambda^2}}$, in welche Grösse ja $\sqrt[n]{\lambda(1-\lambda)}$ durch die Substitution T übergeht; also auch von den Quotienten beider, d. i.

$$\sqrt[n]{\lambda^3}.$$

Hieraus wird offenbar, dass nur

$$\sqrt[2]{\lambda(1-\lambda)}$$

und Potenzen dieser Grösse Congruenzmoduln sein können. Dass sie es wirklich sind, und welches die zugehörigen Stufenzahlen werden, könnte auch leicht wieder ohne Bezugnahme auf die Hermite'schen Tafeln dargethan werden, was indess hier unterbleiben mag.

Neuberg in Steiermark, im Juli 1886.

Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln.

Von

Adolf Kneser in Marburg.

---

1. Ist durch die irreducibele Gleichung $F(s, z) = 0$ die Grösse s als algebraische Function von z definirt, so soll das Verhalten der Monodromiegruppe dieser Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln untersucht werden; mit andern Worten, wenn a, b, c, d Constante, S und Z Variabele sind, soll die Gruppe der Gleichung $F(aS + bZ, cS + dZ) = 0$ mit der Unbekannten S bei Adjunction aller Constanten, d. h. aller von Z nicht irrational abhängigen Grössen bestimmt werden. Diese Gruppe ist im Allgemeinen die symmetrische, d. h. die Gruppe aller möglichen Substitutionen, wie man auf Grund der bekannten functionentheoretischen Bedeutung der Monodromiegruppe*) durch Verzweigungsbetrachtungen nachweisen kann**); in den folgenden Zeilen soll dieses algebraische Resultat auf einem algebraischen Wege abgeleitet werden.

2. Setzt man $S_1 = aS + bZ$, sodass die algebraischen Functionen S und S_1 derselben Gattung angehören, also dieselbe Gruppe besitzen, so ergiebt sich, unter C und D neue Constante verstanden, die Gleichung $F(S_1, CS_1 + DZ) = 0$, deren Gruppe sich offenbar nicht ändert, wenn man nicht Z, sondern das Product DZ als unabhängige Variabele betrachtet; das Ziel der Untersuchung, die Bestimmung der Monodromiegruppe von S, wird demnach erreicht sein, wenn man — bei anderer Bezeichnung — erstens die Monodromiegruppe der durch die Gleichung

$$F(x, ux + v) = 0 \tag{1}$$

definirten algebraischen Function x der beiden unabhängigen Variabeln u und v bestimmt, und zweitens die Modification dieser Gruppe unter-

---

*) Vgl. Jordan, traité des substitutions, Art. 390, S. 277.

**) Vgl. die Inauguraldissertation des Verfassers: Irreductibilität und Monodromiegruppe algebraischer Gleichungen (Berlin 1885), § 5, S. 31.

sucht, die entsteht, wenn man u einer Constanten gleichsetzt. Dabei soll sich die Bestimmung der Gruppe und der Irreducibilität einer Gleichung, wo nicht ausdrücklich etwas anderes festgesetzt wird, stets auf den Rationalitätsbereich aller Constanten beziehen, statt dessen man übrigens in jedem einzelnen Falle einen gewöhnlichen, durch Adjunction einer endlichen Anzahl constanter Irrationalitäten definirten Gattungsbereich zu Grunde legen kann.*)

3. Sind nun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung (1), und $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad F(x', u'x' + v) = 0,$$

so lehrt die Gestalt der Gleichung (2) sofort, dass der Coefficient der höchsten Potenz von x', wenn u' eine von Null verschiedene Constante bedeutet, von v unabhängig, dass also x' eine ganze algebraische Function von v ist; dasselbe gilt dann offenbar von den Wurzeln $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_r'$ der Galois'schen Resolvente der Gleichung (2), d. h. der irreducibeln Gleichung, welcher irgend eine Grösse ξ' der mit unbestimmten Coefficienten α gebildeten Gattung $\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n'$ genügt. Diese Grösse ξ' kann man sich in ihrer Gattung so gewählt denken, dass kein ausserwesentlicher Factor ihrer Discriminante mit einem wesentlichen identisch ist**). Dann können die Ausdrücke aller unter der Gattung ξ' enthaltenen ganzen algebraischen Functionen von v, also insbesondere die rationalen Ausdrücke der Grössen x_ν' durch ξ' und der verschiedenen conjugirten Werthe ξ_ϱ' durch einander dargestellt werden als Quotienten, deren Zähler ganze rationale Functionen von v und der betreffenden Grösse ξ', und deren Nenner nur aus ausserwesentlichen Factoren der Discriminante von ξ' zusammengesetzt sind.

4. Man wähle nun die Constante u' so, dass die Gleichung $y = u'x + v'$, wenn man x und y als Cartesische Coordinaten ansieht, eine eigentliche Tangente der Curve $F(x, y) = 0$ darstellt, welche die Curve ausser in dem Berührungspunkte noch in $n - 2$ andern getrennten Punkten schneidet; dann ist die Differenz $v - v'$ nur ein einfacher wesentlicher Factor der Discriminante der Gleichung (2); denn wäre sie ein ausserwesentlicher Factor, so hätte die Curve auf der Geraden $y = u'x + v'$ einen singulären Punkt, entgegen der betreffs dieser Geraden gemachten Voraussetzung. Ebenso muss $v - v'$ ein wesentlicher Factor der Discriminante von ξ' sein; denn andernfalls gäbe es eine Grösse η' der Gattung ξ', die für $v = v'$ lauter ver-

*) Vgl. die citirte Dissertation, §§ 2 und 3.

**) Die im Folgenden benutzten Bezeichnungen und Sätze über die Discriminante sind einer Abhandlung von Kronecker entnommen: Ueber die Discriminante etc. Journal f. Math. Bd. 91, S. 302.

schiedene conjugirte Werthe η_ϱ' besitzt. Dann würden auch in jeder durch eine gewisse Substitutionengruppe charakterisirten Gattung von rationalen Functionen der Grössen η_ϱ' Functionen existiren, deren sämmtliche conjugirten Werthe für $v = v'$ verschieden sind; da man aber auch x_ν' als rationale Function der Grössen η_ϱ' betrachten kann, so gäbe es auch in der Gattung x_ν' Grössen, deren conjugirte Werthe für $v = v'$ sämmtlich von einander verschieden sind; das ist aber unmöglich, weil $v - v'$ ein wesentlicher Factor der Discriminante der Grössen x_ν' ist.

5. Geht nun x_ν' in x_ν'', ξ_ϱ' in ξ_ϱ'' über für $v = v'$, und hat man, wenn ξ_1' eine beliebige der Wurzeln ξ_ϱ' bedeutet, die rationalen Ausdrücke

$$\xi_\varrho' = \vartheta_\varrho(\xi_1', v) \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, r,$$

so wird nach Art. 3 keiner der Ausdrücke ϑ_ϱ für $v = v'$ illusorisch, da $v - v'$ nur ein wesentlicher Factor der Discriminante von ξ_1' ist; es besteht also mindestens *eine* Gleichung von folgender Gestalt:

$$\xi_\alpha'' = \vartheta_\alpha(\xi_1'', v') = \xi_\beta'' = \vartheta_\beta(x_1'', v').$$

Sind ferner die Grössen x_ν' vermöge der Gleichungen

$$x_\nu' = \psi_\nu(\xi_\alpha')$$

rational durch ξ_α' ausgedrückt, so kann man

$$x_{i_\nu}' = \psi_\nu(\xi_\beta')$$

setzen, und die Substitution $\begin{pmatrix} \nu \\ i_\nu \end{pmatrix}$ ist nach der Galoisschen Theorie in der Gruppe der Gleichung (2) enthalten*); ist also z. B. $x_1'' = x_2''$, so ergeben die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{i_\nu}'' &= \psi_\nu(\xi_\beta'') = \psi_\nu(\vartheta_\beta(\xi_1'', v')) \\ &= \psi_\nu(\xi_\alpha'') = \psi_\nu(\vartheta_\alpha(\xi_1'', v')) \end{aligned}$$

das Resultat, dass $i_3 = 3$, $i_4 = 4, \ldots, i_n = n$ sein muss; denn alle Grössen $x_2'', x_3'', \ldots, x_n''$ sind von einander und von x_1'' verschieden. Irgend eine Umstellung der Grössen x_ν' muss aber durch die Ersetzung von ξ_α' durch ξ_β' in den Ausdrücken ψ_ν bewirkt werden; somit kann nur $i_2 = 1$, $i_1 = 2$ sein. Die Gruppe der Gleichung (2) enthält also mindestens *eine* Vertauschung zweier Elemente; da nun die Gruppe der Gleichung (1) durch die Specialisirung $u = u'$ höchstens Substitutionen verlieren kann, so muss auch sie mindestens eine Vertauschung zweier Elemente enthalten.

Beiläufig bemerkt kann man die ganze Schlussreihe von Art. 3 an als die algebraische Uebersetzung der einfachen functionentheoretischen Bemerkung ansehen, dass das Vorhandensein eines einfachen

*) Vgl. die ursprüngliche Darstellung von Galois, Journal de math. (sér. 1) t. 11.

Windungspunktes auf der Riemann'schen Fläche der algebraischen Function x' die Anwesenheit einer Vertauschung von zwei Elementen in der Monodromiegruppe bedingt.

6. Jetzt soll die zweite Eigenschaft der Gruppe von x nachgewiesen werden, dass sie mindestens zweifach transitiv ist; bei Adjunction von x_1 ist nämlich die Gleichung mit den Wurzeln $x_2, x_3, \ldots, x_n$ irreducibel. Zum Beweis dieser Behauptung leitet die Erwägung, dass die Gleichung, welche die $n-1$ beweglichen Schnittpunkte einer um einen festen Punkt der Curve $F(x, y) = 0$ rotirenden Geraden bestimmt, irreducibel sein muss, in Verbindung mit der schon früher benutzten Bemerkung, dass die Gruppe der Function x durch Specialisirung von u und v sich höchstens reduciren kann. Man setze speziell

$$v = Y - uX,$$

sodass die Gerade $y = ux + v$ durch den festen Punkt (X, Y) hindurchgeht, und untersuche, in welcher Weise das Polynom

$$F(x, ux + v) = F(x, u(x - X) + Y) = \Phi_1(x, u)\, \Phi_2 .(x, u)$$

in ganze Functionen von x und u zerfallen kann; dabei sei der Factor Φ_1 irreducibel und von u wirklich abhängig. Setzt man nun

$$u(x - X) + Y = w,$$

so folgt

$$F(x, w) = \Phi_1\left(x, \frac{w - Y}{x - X}\right) \cdot \Phi_2\left(x, \frac{w - Y}{x - X}\right)$$
$$= \frac{\Psi_1(x, w)}{(x - X)^\lambda} \cdot \frac{\Psi_2(x, w)}{(x - X)^\mu},$$

wo die ganzen Functionen Ψ durch $x - X$ nicht mehr theilbar sind und Ψ_1 die Grösse w wirklich enthält; dann ergiebt die Irreducibilität des Polynoms $F(x, w)$, dass Ψ_1 und F — abgesehen natürlich von constanten Factoren — gleich sein müssen, dass ferner $\mu = 0$ und $\Psi_2 = (x - X)^\lambda$ ist; also

$$(3) \qquad \begin{aligned} F(x, w) &= (x - X)^\lambda\, \Phi_1\left(x, \frac{w - Y}{x - X}\right), \\ F(x, u(x - X) + Y) &= (x - X)^\lambda\, \Phi_1(x, u). \end{aligned}$$

Setzt man in (3) speciell $x = X$, so folgt für $\lambda \geqq 1$

$$F(X, Y) = 0;$$

überhaupt müssen, wenn man in (3) die linke Seite nach Potenzen von u ordnet, alle Coefficienten derselben durch $(x - X)^\lambda$ theilbar sein. Differenzirt man also in (3) nach x, und setzt

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = F_1(x, y), \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_2(x, y),$$

so ergiebt sich für $\lambda > 1$, wenn man $x = X$ setzt, das Resultat

$$F_1(X, Y) + uF_2(X, Y) = 0.$$

Verschwinden also nicht beide Grössen $F_1(X, Y)$ und $F_2(X, Y)$, so ist $\lambda \leqq 1$. Ist aber dabei $F(X, Y) = 0$, so kann λ nicht gleich Null sein; denn dann gäbe die Gleichung (3), wenn man $x = X$ setzt,

$$\Phi_1(X, u) = 0$$

für jedes u; es könnte also nicht, wie vorausgesetzt wurde, $\Phi_1(x, u)$ irreducibel sein. Ist also (X, Y) ein nicht singulärer Punkt der Curve $F(x, y) = 0$, so ist $\lambda = 1$ und

$$F(x, u(x - X) + Y) = (x - X)\,\Phi_1(x, u)$$

und die Gleichung $\Phi_1 = 0$, welche die von X verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$F(x, u(x - X) + Y) = 0$$

liefert, ist irreducibel.

7. Bei der in Art. 6 gemachten Specialisirung von v ist also die eine Wurzel der Gleichung (1) als die Constante X bekannt; die übrigen sind die Wurzeln einer irreducibeln Gleichung. Die Gruppe der Gleichung (1) enthält also sicher eine $n - 1$ Elemente transitiv verbindende Untergruppe, welche das n^{te} Element an der Stelle lässt; da diese Gruppe ferner transitiv ist, so giebt es stets eine Untergruppe, welche ein beliebiges Element an der Stelle lässt und die übrigen $n - 1$ Elemente transitiv verbindet, die Gruppe der Function x ist also mindestens zweifach transitiv. Nun ist gezeigt, dass dieselbe eine Vertauschung zweier Elemente enthält, die durch $(x_1 x_2)$ bezeichnet werden mag; unter den die Wurzel x_1 an der Stelle lassenden Substitutionen seien $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ solche, welche x_2 beziehentlich durch $x_3, x_4, \ldots, x_n$ ersetzen; dann enthält die Gruppe auch die Substitutionen

$$S_\alpha^{-1}\cdot(x_1 x_2)\cdot S_\alpha = (x_1 x_\alpha), \qquad \alpha = 3, 4, \ldots, n,$$

besteht also*) aus allen möglichen $n!$ Substitutionen. Damit ist die erste der beiden in Art. 2 gestellten Aufgaben erledigt:

Die Gruppe der Gleichung (1) *mit der Unbekannten x ist die symmetrische.*

8. Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie sich diese Gruppe, also die Monodromiegruppe der Grösse x als algebraischer Function der beiden Variabeln u und v ändert, wenn man der Grösse u einen constanten Werth beilegt, oder mit andern Worten, welches die Monodromiegruppe der Grösse x' als algebraischer Function von v allein ist. Soll diese Gruppe Γ von der symmetrischen verschieden sein, so muss eine entsprechende Gattung nicht symmetrischer rationaler Functionen der Wurzeln x_ν' rational, d. h. bei Adjunction aller Constanten rational in v sein. Man bilde nun zunächst eine bei den Substitu-

*) Vgl. Netto, Substitutionentheorie § 34, S. 33.

tionen von Γ und nur bei diesen ihren Werth nicht ändernde rationale Function η der Grössen x_ν, welche eine ganze algebraische Function von u und v ist, mithin wenn rational in v, eine ganze rationale Function von v sein muss. Die irreducibele Gleichung, der die Grösse η vor der Adjunction algebraischer Functionen von u und v genügt, sei

$$G(\eta, u, v) = 0; \tag{4}$$

soll dann η eine ganze rationale Function von v sein, so ergiebt das Polynom G sofort eine obere Grenze γ, welche der Grad dieser ganzen Function nicht erreichen kann; dann ist nothwendig

$$\frac{\partial^\gamma \eta}{\partial v^\gamma} = 0, \tag{5}$$

und umgekehrt, wenn diese Gleichung besteht, ist η sicher eine ganze rationale Function von v. Schreibt man nun die Gleichung (5) mit Hülfe der Gleichung (4) rational in η, u und v, und eliminirt η, so ist das Resultat eine Gleichung zwischen u und v, deren Bestehen bei unbestimmten Werthen von v eine hinreichende und nothwendige Bedingung dafür ist, dass η als ganze rationale Function von v geschrieben werden kann; ordnet man also in dem Eliminationsresultat nach Potenzen von v, und setzt die Coefficienten derselben einzeln gleich Null, so erhält man ein System von Gleichungen, denen u genügen muss, wenn η in v rational sein soll.

Hier können nun zwei Fälle eintreten. Entweder ist das erhaltene Gleichungssystem nicht für jedes u erfüllt; dann kann die Gleichung (2) nur für eine endliche Anzahl bestimmter Werthe von u' die Gruppe Γ besitzen; oder die erhaltenen Gleichungen sind identisch erfüllt; dann gäbe es unsymmetrische rationale Functionen der Grössen x_ν, welche rational von v, aber irrational von u abhängen, welche also durch Adjunction algebraischer Functionen von u allein rational gemacht werden können.

9. Um über die Möglichkeit des letzteren Falles zu entscheiden nehme man an, die Grösse η werde bei Adjunction einer algebraischen Function t von u allein rational; es sei dabei

$$K(t, u) = 0 \tag{6}$$

die irreducibele Gleichung, welche t definirt. Dann kann man annehmen die Grade der Gleichung (6) in t und der Gleichung (4) in η seien dieselben; denn andernfalls wäre die letztere Gradzahl ein Theiler der ersteren, und η schon bei Adjunction einer unter der Gattung t enthaltenen Gattung geringerer Ordnung rational. Nun sei v_0 ein beliebiger Werth, der für v gesetzt die Discriminante $D(u, v)$ der Gleichung (4) nicht gleich Null macht; dann ist auch die durch die Gleichung

$$G(\eta_0, u, v_0) = 0 \tag{7}$$

definirte Grösse η_0 in der Gattung t enthalten und gleichvielwerthig mit t; also ist auch umgekehrt t durch η_0 rational ausdrückbar, und demnach η bei Adjunction von η_0 rational. Dabei kann die ganze algebraische Function η dargestellt werden als Quotient, dessen Zähler eine ganze rationale Function von η_0, u, v, und dessen Nenner aus den ausserwesentlichen Factoren von $D(u, v_0)$ zusammengesetzt, also von v unabhängig ist; es sei etwa

$$\eta = \chi(\eta_0, u, v). \tag{8}$$

Diese Gleichung führt aber zu einem Widerspruch. Denn ist zunächst $D(u, v)$ von v wirklich abhängig, so kann einem beliebigen Werthe von u, für welchen $D(u, v_0)$ nicht verschwindet, stets ein Werth v zugeordnet werden, für welchen $D(u, v) = 0$ ist; dann sind die conjugirten Werthe der rechten Seite von (8) alle verschieden, diejenigen der linken aber nicht.

Eine etwas längere Schlussreihe ist nöthig, wenn $D(u, v)$ von v unabhängig, also $= D(u, v_0)$ ist. Betrachtet man dann v als Constante und η als algebraische Function von u allein, und adjungirt dem entsprechend alle algebraischen Functionen von v allein, so ist infolge der Gleichung (8) jeder wesentliche Factor $u - u_0$ von $D(u, v_0)$ betrachtet als Discriminante von η_0 zugleich ein wesentlicher Factor von $D(u, v_0)$ betrachtet als Discriminante von η; dabei ist u_0 offenbar von v unabhängig. — Sind nun bei Adjunction aller algebraischen Functionen von v etwa $\Phi(\xi, u) = 0$ und $\Psi(\zeta, u) = 0$ die Galois'schen Resolventen von (1) und (4), so ist, da η eine rationale Function der Grössen x_ν ist, die Gattung ζ mit der Gattung ξ identisch oder unter ihr enthalten, sodass jedenfalls die Gattung ζ als eine durch eine gewisse Substitutionengruppe charakterisirte rationale Function der conjugirten Werthe von ξ betrachtet werden kann; daraus aber folgt durch die Schlussreihe des Art. 4, dass jeder wesentliche Linienfactor $u - U$ der Discriminante von ζ auch als wesentlicher Factor in der Discriminante von ξ vorkommen muss*); ebenso ergeben die Entwicklungen des Art. 4 sofort, dass $u - u_0$ ein wesentlicher Factor der Discriminante von ζ sein muss, weil $\Psi = 0$ die Galois'sche Resolvente von (4) ist. Nun ist die lineare Verbindung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ eine Grösse der Gattung ξ; also kommen für $u = u_0$, da $u - u_0$ ein wesentlicher Factor der Discriminante von ξ ist, mindestens zwei gleiche unter den Werthen $\alpha_1 x_{i_1} + \alpha_2 x_{i_2} + \cdots + \alpha_n x_{i_n}$ vor; demnach müssen für $u = u_0$ mindestens zwei Werthe x_ν gleich werden, also $u - u_0$ ein Factor der Discriminante von (1) sein. Nun kann diese Discriminante aber keinen solchen von v unabhängigen Factor be-

*) Vgl. die umfassenderen Sätze bei Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie etc. § 9; Journal f. Math. Bd. 92, S. 26.

sitzen; denn sonst würde keine Gerade des Parallelstrahlenbüschels $y = u_0 x + v$ die Curve $F(x, y) = 0$ in getrennten Punkten schneiden, was offenbar unmöglich ist.

10. Damit ist gezeigt, dass η nicht durch Adjunction algebraischer Functionen von u allein rational gemacht werden kann, dass also das aus (4) und (5) folgende System von Bedingungsgleichungen für u nicht identisch erfüllt sein kann. Diesen Gleichungen kann also höchstens durch eine endliche Anzahl constanter Werthe von u genügt werden; nur der erste der beiden Fälle des Art. 8 ist möglich, d. h. die Gruppe der Gleichung (1) kann nicht durch Adjunction algebraischer Functionen von u allein, sondern, solange man algebraische Functionen von u *und* v ausschliesst, höchstens durch eine endliche Anzahl bestimmter Specialisirungen von u reducirt werden. Zieht man also die Entwicklungen des Art. 2 in Betracht, so ergiebt sich das folgende definitive Resultat:

Genügt eine algebraische Function s der unabhängigen Variabeln z mit beliebiger Monodromiegruppe der irreducibeln Gleichung $F(s, z) = 0$, so definirt die Gleichung $F(as' + bz', cs' + dz') = 0$ stets eine algebraische Function s' der unabhängigen Variabeln z', deren Monodromiegruppe die symmetrische, d. h. die Gruppe aller möglichen Substitutionen ist; dabei sind unter a, b, c, d willkürliche Constante zu verstehen mit der einzigen Beschränkung, dass der Quotient $c : d$ eine endliche Anzahl bestimmter Werthe, darunter den Werth Null, vermeiden muss.

Betreffs der geometrischen und algebraischen Consequenzen dieses Resultats mag auf die §§ 5 und 6 der citirten Dissertation verwiesen werden.

Marburg, Juli 1886.

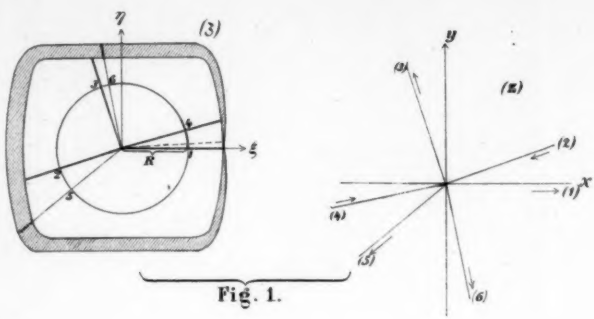


Fig. 1.

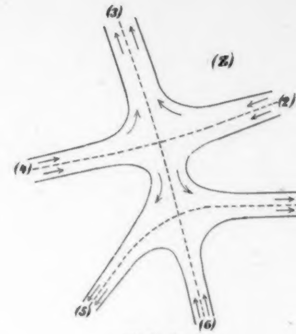


Fig. 2.

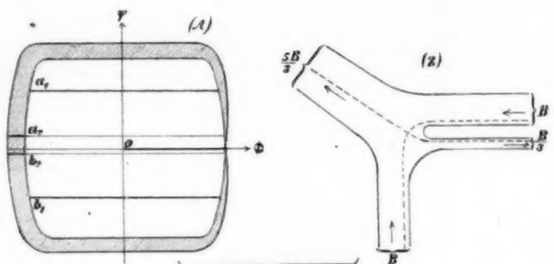


Fig. 4.

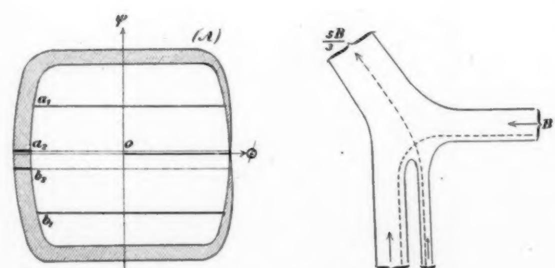
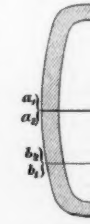
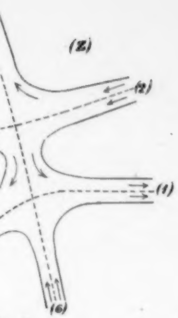


Fig. 6.



Zu W. Voigt, Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

LITH. ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.



...g. 2.

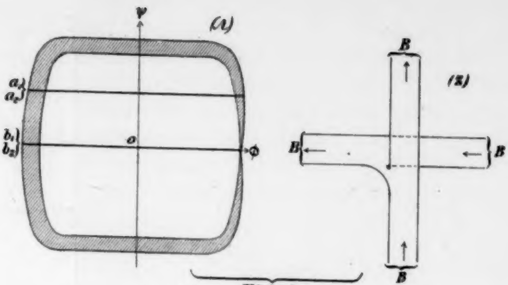


Fig. 3.

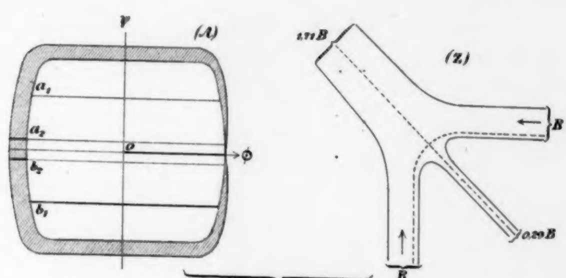


Fig. 5.

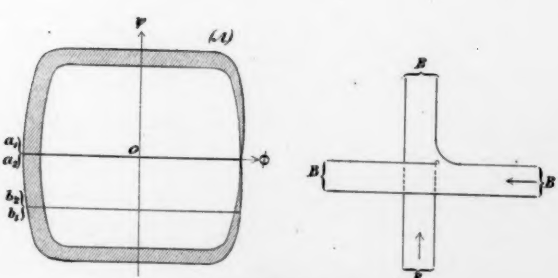
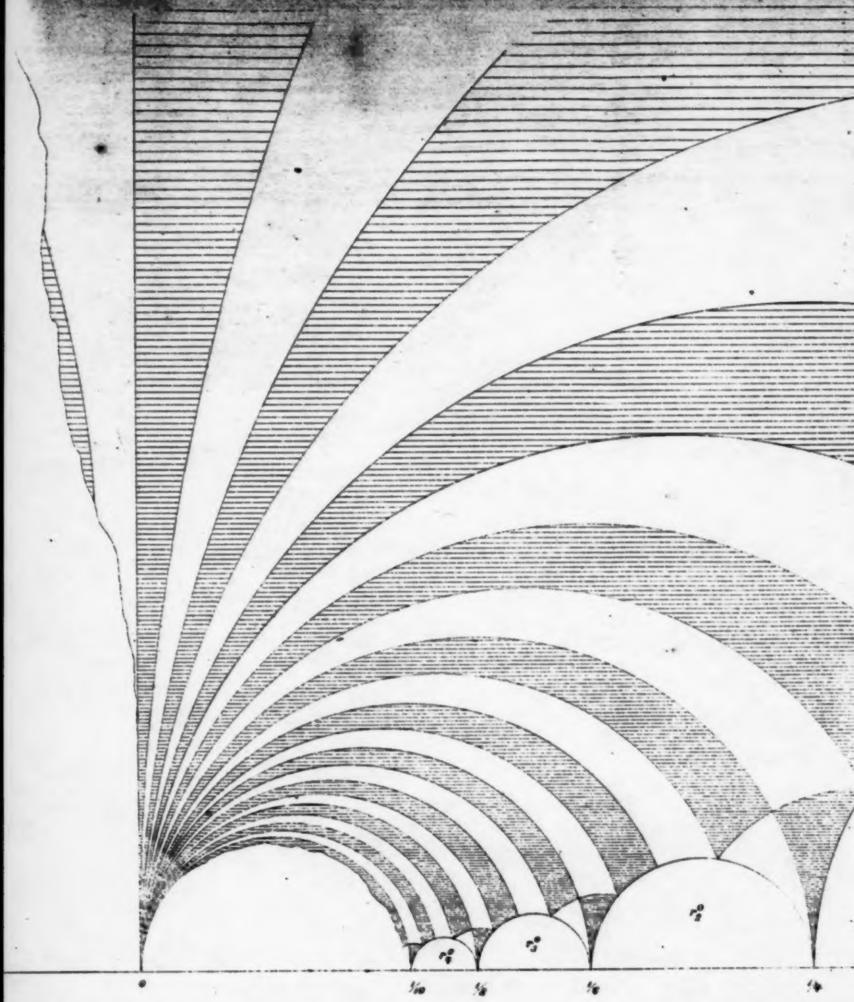


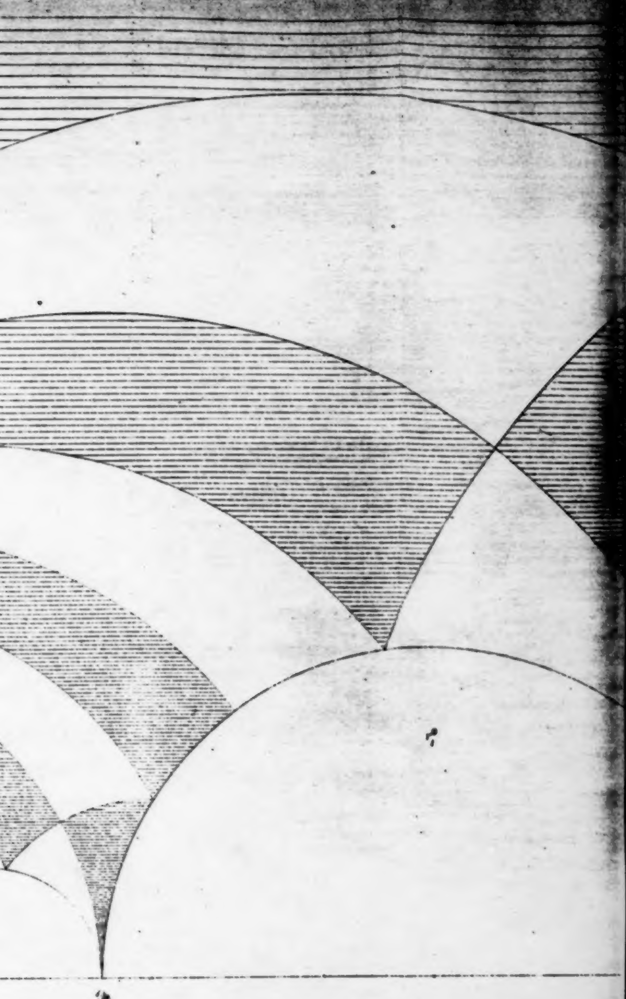
Fig. 7.

...ACHER, LEIPZIG.



R. Fricke, Gruppen für die aus k^2 gezogenen Wurzeln.

LITH. ESCHEBACH & SCHAEF

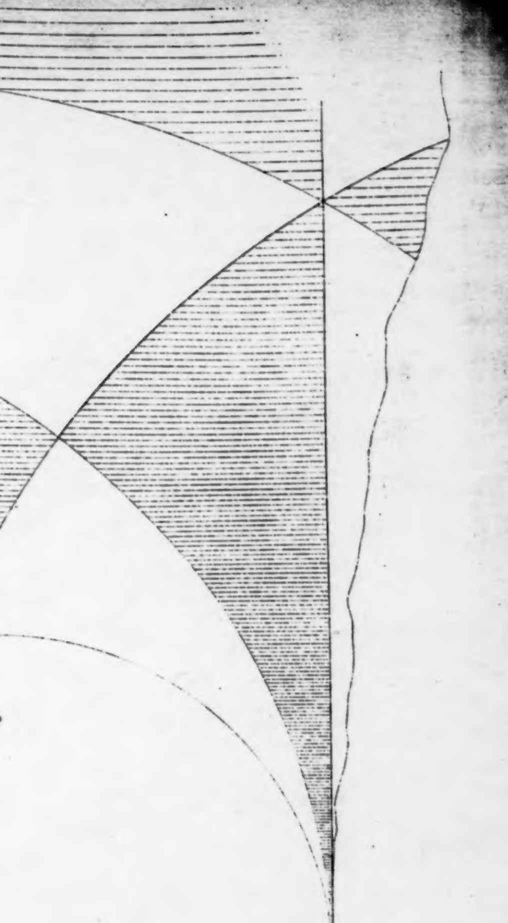


Mathemati

LITH. ESCHEBACH & SCHAEFER LEIPZIG.

zeln. *Mathem*

LITH. ESCHEBACH & SCHAEFER LEIPZIG.



Die Flächen 3. O. als Ordnungsflächen von Polarsystemen.

Von

H. Thieme in Posen.

In der Arbeit „*Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme*"*) habe ich auf rein-geometrischem Wege das System der ersten Polaren einer Fläche $(n+1)$. O. und beliebiger Mannichfaltigkeiten von Flächen $(n+1)$. O. construirt unter der alleinigen Voraussetzung, dass die entsprechenden Constructionen für Flächen n. O. schon geleistet sind. Die dort angegebenen Methoden verdienen wohl durch ihre Allgemeingültigkeit einige Beachtung; ihre Anwendbarkeit ist unabhängig von der Ordnung und von der Zahl der Dimensionen der betrachteten Gebilde; sie gelten in gleicher Weise auch für *ebene Curven* und für *binäre Formen*. Die angegebenen Constructionen stellen gleichzeitig die einzige bis jetzt bekannte, wirklich rein-geometrische Definition der geometrischen Gebilde beliebiger Dimension und Ordnung dar.

Die damals von mir gewählte Form der Darstellung macht dem Leser das Verständniss der Arbeit nicht leicht. Deshalb folge ich gern einer an mich ergangenen Aufforderung, die Entwicklungen in etwas anderer Form zunächst für einen Specialfall zur Darstellung zu bringen.

Unter Zugrundelegung der Construction der Polarsysteme ist bisher nur die Theorie der Flächen 2. O. entwickelt worden. Im Anschluss hieran sollen nun im Folgenden *die Flächen* 3. *O.* einer analogen Behandlung unterzogen werden.

Es handelt sich hierbei zunächst darum, den Punkten des Raumes die Elemente eines Gebüsches von Flächen 2. O. projectiv so zuzuordnen, dass die Polare eines Punktes für die einem zweiten Punkte zugeordnete Fläche mit der Polare des zweiten Punktes für die dem ersten zugeordnete Fläche identisch ist, dass — kürzer ausgedrückt — *der Bedingung der gemischten Polare genügt ist.* Diese Aufgabe wird

*) 1878. Zeitschrift für Mathem. und Phys. XXIV.

in § 1 gelöst. Damit ist das Polarsystem einer Fläche 3. O. construirt und somit zugleich eine von den Punkten der Fläche unabhängige Definition der Flächen 3. O. gegeben.

Soll diese Definition wieder die Grundlage für eine analoge Definition der Flächen 4. O. bilden, so müssen wir nicht nur im Stande sein, einzelne Flächen 3. O. zu construiren, sondern *beliebige Mannichfaltigkeiten* derselben. Demgemäss werden wir in § 2 aus zwei Flächen 3. O. das durch sie bestimmte Büschel, in § 3 aus 3 Flächen das Bündel, in § 4 aus 4 Flächen das Gebüsch und allgemein aus $r+1$ Flächen 3. O. die r-fache lineare Mannichfaltigkeit construiren. § 5 enthält den Nachweis, dass *die Gesammtheit der Flächen* 3. *O. eine lineare* 19-*fache Mannichfaltigkeit bildet*, § 6 die *Construction der Fläche* 3. *O. aus* 19 *Punkten.*

Vorausgesetzt wird für die vorliegende Frage die Lösung der entsprechenden Aufgaben aus der Theorie der Flächen 2. O. und zwar die Construction einer einzelnen Fläche 2. O., eines Büschels, eines Bündels, einer beliebigen Mannichfaltigkeit von Flächen 2. O. aus zwei, drei ... gegebenen Flächen, die Construction derjenigen Fläche eines Büschels, welche durch einen gegebenen Punkt geht, die projective Zuordnung der Punkte einer Geraden, einer Ebene, des Raumes auf die Elemente des Büschels, des Bündels, des Gebüsches.

Bezeichnungen. Im Folgenden bezeichnen kleine Buchstaben $a, b, c \dots x$ Punkte, grosse $A, B, C \dots X$ Flächen; R_p^2 bedeutet eine Fläche 2. O., welche dem Punkte p zugeordnet ist, Rpq die Polare von q für R_p^2; (ab) bedeutet die auf der Verbindungslinie von a und b liegende Punktreihe, (a, b, c) das auf der Verbindungsebene von a, b und c liegende Punktfeld, (R_p^2, S_q^2) das durch R_p^2 und S_q^2 bestimmte Büschel, (R_p^2, S_q^2, T_0^2) das durch R_p^2, S_q^2 und T_0^2 bestimmte Bündel etc.

§ 1.

Construction des Polarsystems 3. O.

Unsere erste Aufgabe ist: *Den Punkten des Raumes ein Gebüsch von Flächen* 2. *O. polar* zuzuordnen d. h. projectiv und so, dass der Bedingung der gemischten Polare genügt ist.

I. Einem Punkte a ordnen wir eine beliebige Fläche 2. O. — sie heisse A_a^2 — zu; einem Punkte b darf man nun nicht mehr eine beliebige Fläche zuordnen, sondern eine der Flächen 2. O., für welche a und die Polare von b für A_a^2, also nach unserer Bezeichnung A_{ab}, Pol und Polare sind. Wird eine dieser Flächen — sie sei A_b^2 — dem Punkte b zugeordnet, so ist $A_{ab} \equiv A_{ba}$, d. h. A_a^2 und A_b^2 genügen für b und a der Bedingung der gemischten Polare.

Welche Flächen sind nun den Punkten von (a, b), der Verbindungslinie von a und b, zuzuordnen?

Da die Beziehung eine projective sein soll, so müssen die zuzuordnenden Flächen dem Büschel (A_a^2, A_b^2) angehören. Da ferner der Bedingung der gemischten Polare genügt sein soll, so ist einem beliebigen Punkte x immer die Fläche von (A_a^2, A_b^2) zuzuordnen, für welche a und A_{ax} (die Polare von x für A_a^2) Pol und Polare sind.

Es fragt sich nun allerdings, ob es stets eine solche und nur eine solche Fläche in (A_a^2, A_b^2) giebt, ob diese Art der Zuordnung wirklich eine projective ist, und ob damit auch für zwei *beliebige dieser* Flächen der Bedingung der gemischten Polare genügt ist.

Es zeigt sich, dass diese 3 Fragen zu bejahen sind.

Das Büschel von Polaren der Punkte auf (a, b) für A_a^2 hat dieselbe Achse wie das Büschel der Polaren von a für (A_a^2, A_b^2), weil beide Büschel zwei Elemente gemeinsam haben, nämlich A_{aa} (die Polare von a für A_a^2) und $A_{ab} \equiv A_{ba}$. Die Polare eines Punktes x für A_a^2 ist deshalb zugleich die Polare von a für eine Fläche aus (A_a^2, A_b^2); ordnen wir diese Fläche — sie heisse A_x^2 — dem Punkte x zu, so erhalten wir zu jedem Punkte auf (a, b) eine Fläche, welche mit A_a^2 der Bedingung der gemischten Polare genügt.

Die Zuordnung ist zweitens eine *projective.* Denn die Punktreihe (a, b) ist zu dem Büschel ihrer Polaren für A_a^2 projectiv, dies Polarenbüschel ist nach Obigem mit dem Polarenbüschel von a für (A_a^2, A_b^2) identisch, und (A_a^2, A_b^2) ist zu jedem seiner Polarenbüschel projectiv.

Schliesslich *genügen auch zwei beliebige Flächen A_x^2 und A_y^2 aus (A_a^2, A_b^2) der Bedingung der gemischten Polare.*

Setzen wir zunächst voraus, dass die Polarenbüschel von x und y für (A_a^2, A_b^2) nicht dieselbe Achse haben, so gilt Folgendes: A_{xy}, die Polare von y für A_x^2, gehört zunächst zu (A_{ay}, A_{by}), dem Polarenbüschel von y für (A_a^2, A_b^2). Da nun zu (A_{ay}, A_{by}) auch A_{yy} und $A_{ay} \equiv A_{ya}$ gehören, so erhält man (A_{ay}, A_{by}) auch, wenn man zu den Punkten von (a, b) die Polaren für A_y^2 sucht, also gehört auch A_{yx}, die Polare von x für A_y^2, zu (A_{ay}, A_{by}). Ebenso lässt sich zeigen, dass A_{xy} und A_{yx} auch zu (A_{ax}, A_{bx}) gehören. Die Büschel (A_{ax}, A_{bx}) und (A_{ay}, A_{by}) können nicht zwei verschiedene Ebenen gemeinsam haben, also müssen die beiden zu ihnen gehörenden Ebenen A_{xy} und A_{yx} identisch sein.

Haben die Büschel (A_{ax}, A_{bx}) und (A_{ay}, A_{by}) dieselbe Achse, so ist (a, b) eine Kante und diese Achse die Gegenkante des zu (A_a^2, A_b^2) gehörigen gemeinsamen Polartetraeders. Zunächst lässt sich zeigen, was übrigens auch im allgemeinen Falle gilt, dass (a, b) *mit dem Büschel der Polaren eines beliebigen Punktes u auf* (a, b) *involutorisch liegt.*

Das Büschel (A_{aa}, A_{ba}) der Polarebenen von a für (A_a^2, A_b^2) liegt mit (a, b) involutorisch, denn diese sind ja gleichzeitig die Polaren der Punkte von (a, b) für A_a^2. Trifft nun $A_{as} \equiv A_{sa}$ die Punktreihe (a, b) in u, so sind u und a conjugirt für A_s^2, u und s für A_a^2. Es geht also die Polare von u für A_s^2, also A_{su}, durch a und die Polare von u für A_a^2, also A_{au} durch s, d. h. es fällt ein Paar von (A_{au}, A_{bu}) verkehrt in das entsprechende Paar von (a, b). Alo liegen (A_{au}, A_{bu}) und (a, b) involutorisch.

Daraus ergiebt sich nun aber weiter Folgendes. Geht A_{xu}, die Polare von u für A_x^2, durch y, so muss umgekehrt A_{yu}, die Polare von u für A_y^2, durch x gehen. Daraus folgt aber, dass A_{xy}, die Polare von y für A_x^2, und A_{yx}, die Polare von x für A_y^2, beide durch u in (a, b) gehen. Da beide nun schon eine Gerade, die Gegenkante von (a, b), gemeinsam haben, so müssen sie identisch sein. Es ist also allgemein

$$A_{xy} \equiv A_{yx}.$$

II. Nachdem wir so in der verlangten Weise den Punkten von (a, b) die Elemente des Büschels (A_a^2, A_b^2) zugeordnet haben, gehen wir dazu über, *zu einem beliebigen Punkte c ausserhalb* (a, b) eine Fläche A_c^2 von der verlangten Eigenschaft zu suchen; A_c^2 soll mit jedem Elemente von (A_a^2, A_b^2) der Bedingung der gemischten Polare genügen.

In I ist bewiesen worden, dass die Polaren eines Punktes u in (a, b) für (A_a^2, A_b^2) ein Büschel bilden, welches zu der Punktreihe (a, b) involutorisch liegt. Diese Eigenschaft gilt auch *für jeden beliebigen Punkt c des Raumes.*

Geht nämlich A_{yx}, die Polare von x in (a, b) für A_y^2 aus (A_a^2, A_b^2), durch c, so geht A_{yc}, die Polare von c für A_y^2, durch x, und, da $A_{yx} \equiv A_{xy}$ ist, also die Polare von y für A_x^2 auch durch c geht, so geht A_{xc}, die Polare von c für A_x^2, durch y. Das Büschel (A_{ac}, A_{bc}) hat demnach die Eigenschaft, dass, wenn A_{yc} durch x geht, dann A_{xc} durch y geht, d. h. es liegt mit (a, b) involutorisch. Also:

1. *Die Polaren eines Punktes für ein Büschel von Flächen* 2. O., *welches einer Punktreihe polar zugeordnet ist, bilden ein Büschel, welches mit der Punktreihe involutorisch liegt.*

Auf Grund dieser Eigenschaft ist es möglich, die Punkte von (a, b) und die Polaren von c für die zugehörigen Flächen aus (A_a^2, A_b^2) als Pole und Polaren von Flächen 2. O. aufzufassen. Ordnen wir eine dieser Flächen, sie heisse A_c^2, dem Punkte c zu, so genügt diese von selbst, allein auf Grund der Construction, mit allen Flächen von (A_a^2, A_b^2) der Bedingung der gemischten Polare.

Da übrigens die involutorische Zuordnung von (a,b) und (A_{ac}, A_{bc}) durch zwei Paar entsprechender Elemente bestimmt ist, so folgt noch der wichtige Satz:

2. *Wenn drei Flächen A_a^2, A_b^2, A_c^2 drei Punkten a, b, c so zugeordnet sind, dass je zwei der Bedingung der gemischten Polare genügen, so genügt jede derselben mit dem ganzen durch die beiden anderen bestimmten Büschel der Bedingung der gemischten Polare.*

Verbinden wir nun einen beliebigen Punkt x auf (a, b) mit c durch eine Gerade und ordnen wir, wenn A_x^2 die x zugehörige Fläche aus (A_a^2, A_b^2) bedeutet, jedem Punkte aus (x, c) immer diejenige Fläche aus dem Büschel (A_x^2, A_c^2) zu, welche mit A_c^2 der Bedingung der gemischten Polare genügt, so genügt zunächst nach den Betrachtungen von I jede Fläche A_y^2 aus (A_x^2, A_c^2) mit jeder anderen Fläche dieses Büschels dieser Bedingung. Aber noch mehr; *es genügt A_y^2 auch mit jedem Element aus (A_a^2, A_b^2) dieser Bedingung der gemischten Polare;* denn eine beliebige Eläche A_z^2 aus (A_a^2, A_b^2) genügt dieser Bedingung mit A_x^2 und mit A_c^2, also nach dem letzten Satze mit dem ganzen Büschel (A_x^2, A_c^2).

Verbinden wir c mit sämmtlichen Punkten von (a, b) durch Geraden A_c^2, mit sämmtlichen Flächen aus (A_a^2, A_b^2) durch Büschel und ordnen wir die Punkte der Geraden den Elementen der Büschel immer polar zu, *so werden das Punktfeld (a, b, c) und das Flächenbündel (A_a^2, A_b^2, A_c^2) projectiv und so auf einander bezogen, dass je zwei Punkte aus (a, b, c) mit den zugehörigen Flächen aus (A_a^2, A_b^2, A_c^2) der Bedingung der gemischten Polare genügen.*

Die Zuordnung ist projectiv; denn (A_a^2, A_b^2, A_c^2) ist zu dem Polarenbündel von c projectiv; dies Polarenbündel ist identisch mit dem Bündel der Polaren von (a, b, c) für A_c^2, also wieder zu (a, b, c) projectiv.

Eine beliebige Fläche A_u^2 aus (A_x^2, A_c^2) genügt mit einer Fläche A_v^2 aus (A_y^2, A_c^2) der Bedingung der gemischten Polare [A_x^2 und A_y^2 seien beliebige Flächen aus (A_a^2, A_b^2)]; denn A_u^2 genügt mit A_c^2 und A_y^2 dieser Bedingung, also auch mit dem ganzen Büschel (A_c^2, A_y^2).

III. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, *einem weiteren Punkte d ausserhalb (a, b, c) eine Fläche A_d^2 zuzuordnen, welche mit jedem Element aus (A_a^2, A_b^2, A_c^2) der Bedingung der gemischten Polare genügt.*

Die Polaren von d für (A_a^2, A_b^2, A_c^2) bilden ein zu (a, b, c) projectives Ebenenbündel (A_{ad}, A_{bd}, A_{cd}). Dies befindet sich mit (a, b, c) nach II, Satz 1, in der eigenthümlichen Lagenbeziehung, dass jede Punktreihe aus (a, b, c) mit dem zugehörigen Büschel aus (A_{ad}, A_{bd}, A_{cd}) involutorisch liegt. Also lassen sich Flächen 2. O. construiren, für welche (a, b, c) und (A_{ad}, A_{bd}, A_{cd}) zu einander Pole und Polaren sind. Eine solche werde dem Punkte d zugeordnet und mit A_d^2 bezeichnet. *A_d^2 genügt gemäss seiner Construction mit allen Elementen von (A_a^2, A_b^2, A_c^2) der Bedingung der gemischten Polare.*

Wie wir nun in II den Verbindungslinien von c und (a, b) die Büschel, die sich aus A_c^2 und den Elementen von (A_a^2, A_b^2) construiren

liessen, polar zuordneten, so ordnen wir jetzt den Verbindungslinien von d mit den Punkten von (a, b, c) die Büschel polar zu, die sich aus A_d^2 und den entsprechenden Elementen von (A_a^2, A_b^2, A_c^2) construiren lassen. *Auf diese Weise werden die Elemente des Gebüsches* $(A_a^2, A_b^2, A_c^2, A_d^2)$ *den Punkten des Raumes projectiv und so zugeordnet, dass je zwei der Bedingung der gemischten Polare genügen.*

Der Beweis für diese Eigenschaften ist dem in II völlig analog.

Die auf diese Weise hergestellte Beziehung der Punkte des Raumes zu den Elementen des Flächengebüsches $(A_a^2, A_b^2, A_c^2, A_d^2)$ nennen wir ein *Polarsystem* 3. *O.* oder auch kürzer aus Gründen, die sich aus weiteren Untersuchungen ergeben, eine *Fläche* 3. *O.* Dieses Polarsystem 3. O. werde mit A^3 bezeichnet. Die einem Punkte x zugeordnete Fläche A_x^2 heisst die *erste Polare von x für* A^3, die Polare A_{xx} von x für A_x^2 heisst die *zweite Polare von x für* A^3, die Polare A_{xy} von y für A_x^2 oder, was dasselbe ist, die Polare A_{yx} von x für A_y^2 tionen, heisst die *gemischte Polare von x und y für* A^3.

IV. Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgen mehrere Sätze über Kegelschnitte, Regelflächen 2. O., Raumcurven 3. O. und Collineadie im Folgenden angegeben werden mögen.

1. *Wenn die Punkte eines Kegelschnitts auf die Punkte einer Geraden projectiv bezogen sind, und wenn zwei Punkte des Kegelschnitts, mit den übrigen verbunden, Strahlenbüschel liefern, welche mit der Punktreihe involutorisch liegen, so ist dies mit allen Punkten des Kegelschnitts der Fall.*

2. *Wenn die Geraden einer Regelschaar auf die Punkte einer Geraden projectiv bezogen sind, und wenn zwei Geraden der anderen Schaar der Regelfläche, mit den Geraden der ersten Schaar verbunden, Ebenenbüschel liefern, welche mit der Punktreihe involutorisch liegen, so ist dies mit allen Geraden der zweiten Schaar der Fall.*

3. *Wenn die Punkte einer Raumcurve 3. O. auf die Punkte einer Geraden projectiv bezogen sind, und wenn zwei Secanten der Raumcurve, mit den Punkten derselben verbunden, Ebenenbüschel liefern, welche mit der Punktreihe der Geraden involutorisch liegen, so ist dies mit allen Secanten der Raumcurve der Fall.*

4. Die Polarebenen der Punkte des Raumes für (A_a^2, A_b^2) bilden eine einfache Unendlichkeit, *ein Büschel von Collineationen.*

Einer Ebene aus einer Collineation ist aus jeder anderen eine Ebene zugeordnet; diese unendlich vielen Ebenen bilden ein Büschel. Es gilt somit der Satz:

Wenn die Punkte einer Geraden auf ein Büschel von Collineationen projectiv bezogen sind, und wenn die Punktreihe zu zwei Büscheln zusammengehöriger Ebenen involutorisch liegt, so liegt sie zu allen Büscheln dieser Art involutorisch.

5. Die Achsen der Büschel zusammengehöriger Ebenen bilden einen Reye'schen Complex. Also:

Wenn vier Punkte einer Geraden mit den vier Ebenen, welche eine zweite Gerade mit den Ecken eines Tetraeders verbinden, in Involution liegen, so liegen sie mit den Verbindungsebenen aller der Geraden in Involution, welche von dem Tetraeder in demselben Doppelverhältniss geschnitten werden wie diese zweite Gerade.

6. *Die vier Ebenen eines Tetraeders und die vier Ebenen, welche eine Gerade mit den Tetraederecken verbinden, treffen jede Gerade, welche von dem Tetraeder in demselben Doppelverhältniss wie die erste Gerade geschnitten wird, in vier Paaren einer Involution; einander zugeordnet sind dabei die Schnittpunkte einer Tetraederebene und der Verbindungsebene mit der Gegenecke.*

(Analogon des planimetrischen Satzes: Jede Gerade wird von den Seiten eines Vierecks in 3 Paaren einer Involution geschnitten.)

7. *Sind die Punkte einer Ebene projectiv auf die Secanten einer Raumcurve 3. O. bezogen, und liefern drei Punkte der Raumcurve, mit ihren Secanten verbunden, Ebenenbündel, deren Ebenenbüschel mit den entsprechenden Punktreihen involutorisch liegen, so gilt dies von den Bündeln sämmtlicher Punkte der Raumcurve.*

8. Die Polarebenen der Punkte des Raumes für (A_a^2, A_b^2, A_c^2) bilden ein Bündel von Collineationen; wählt man aus einer Collineation eine Ebene, so bildet die Gesammtheit der in allen Collineationen entsprechenden Ebenen mit ihr ein Ebenenbündel. Also:

Wenn ein Bündel von Collineationen so projectiv auf ein Punktfeld bezogen ist, dass drei Bündel zusammengehöriger Ebenen zu dem Punktfeld involutorisch liegen, so ist dies mit allen Bündeln zusammengehöriger Ebenen der Fall.

8. Die Polarebenen für $(A_a^2, A_b^2, A_c^2, A_d^2)$ bilden ein Gebüsch von Collineationen; die einer Ebene in den Collineationen entsprechenden Ebenen bilden ein Ebenengebüsch (sämmtliche Ebenen des Raumes). Also:

Wenn ein Gebüsch von Collineationen so auf die Punkte des Raumes bezogen ist, dass vier Gebüsche zusammengehöriger Ebenen mit den zugehörigen Punkten involutorisch liegen, so gilt dies von allen Gebüschen zusammengehöriger Ebenen.

§ 2.

Construction eines Büschels von Flächen 3. O.

Jetzt seien zwei Polarsysteme 3. O. A^3 und B^3 gegeben.

Die ersten Polaren A_a^2 und B_a^2 von a für A^3 und B^3 bestimmen das Büschel (A_a^2, B_a^2), ebenso A_x^2 und B_x^2, die Polaren von x, das

Büschel (A_x^2, B_x^2). Eine Fläche aus (A_a^2, B_a^2) sei Z_a^2. Die Ebenenbüschel (A_{ax}, B_{ax}) und (A_{xa}, B_{xa}) haben zwei Elemente, $A_{xa} \equiv A_{ax}$ und $B_{xa} \equiv B_{ax}$ gemeinsam, besitzen also dieselbe Achse. Es giebt demnach in (A_x^2, B_x^2) eine Fläche, sie heisse Z_x^2, für welche a und Z_{ax} (die Polare von x für Z_a^2) Pol und Polare sind, welche, wie wir sagen, mit Z_a^2 der Bedingung der gemischten Polare genügt. Ordnen wir so jedem Punkte x des Raumes die Fläche Z_x^2 aus dem zugehörigen Büschel (A_x^2, B_x^2) zu, welche mit Z_a^2 der Bedingung der gemischten Polare genügt, so werden die Punkte des Raumes auf eine neue vierfach unendliche Reihe von Flächen 2. O. bezogen.

Wir werden zeigen, *dass auch diese Flächen 2. O. ein Gebüsch bilden, dass die Zuordnung eine projective ist, dass durch sie ein weiteres Polarsystem 3. O. — Z^3 — bestimmt ist.*

Zu diesem Zwecke haben wir hauptsächlich nachzuweisen, *dass die Fläche Z_x^2 ein Büschel durchläuft, wenn x eine Gerade beschreibt;* das Weitere folgt dann leicht aus § 1.

I. Durchläuft x die Gerade (a, b), so bilden die Polaren für A^3 und B^3 zwei projective Flächenbüschel (A_a^2, A_b^2) und (B_a^2, B_b^2).

Für das Folgende ist nun das Erzeugniss dieser beiden Büschel von Wichtigkeit, das man erhält, wenn man aus je zwei entsprechenden Flächen das durch bestimmte Büschel: (A_a^2, B_a^2), (A_b^2, B_b^2), (A_x^2, B_x^2) etc. construirt. Diese doppelte Unendlichkeit von Flächen 2. O. ist das Analogon zu dem Erzeugniss zweier Punktreihen der Punktgeometrie, zu der Regelfläche 2. O. oder deren Entartungen, zu dem Tangentenbüschel des Kegelschnitts oder zwei Strahlenbüscheln.

Wir wollen dies aus Flächen 2. O. bestehende Gebilde Σ^2 nennen.

Wie sich aus den Eigenschaften der Regelfläche und deren Entartungen ergiebt, gehört jede Fläche von Σ^2 zu zwei Flächenbüscheln von Σ^2, wie jeder Punkt einer Regelfläche 2. O. auf zwei Geraden, jeder Punkt einer Kegelschnitttangente noch auf einer zweiten Tangente liegt etc.

Die Polaren von a für die Flächen von Σ^2 constituiren ein analoges Gebilde — es heisse Σ_a — aus Ebenen, also eine Regelfläche 2. O. oder deren Entartungen, Kegel 2. O., Ebenenpaar. Auch jede Ebene aus Σ_a gehört zu zwei Büscheln von Σ_a.

Erzeugt wird die Regelfläche Σ_a z. B. durch die Büschel (A_{aa}, A_{ba}) und (B_{aa}, B_{ba}). Durch die Schnittlinie irgend zweier entsprechenden Flächen dieser Büschel, A_{xa} und B_{xa}, gehen auch die Polaren von a für das ganze Büschel (A_x^2, B_x^2).

Die eine Reihe von Büscheln von Σ_a erhält man, wenn man von a für die Reihe von Büscheln (A_a^2, B_a^2), (A_b^2, B_b^2), (A_x^2, B_x^2) aus Σ^2 die Polaren sucht, die zweite Reihe von Büscheln von Σ_a, wenn

man für die zweite Reihe von Büscheln aus Σ^2, für (A_a^2, A_b^2), (B_a^2, B_b^2) etc. die Polaren sucht.

Σ_a lässt sich aber noch auf eine zweite Weise construiren. Da für jeden Punkt x $A_{xa} \equiv A_{ax}$ und $B_{xa} \equiv B_{ax}$ ist, so erhält man auch die erste Reihe von Büscheln, wenn man zu x für (A_a^2, B_a^2) die Polaren sucht, dagegen die zweite Reihe, wenn man zu den Punkten von (a, b) für je eine Fläche Z_a^2 aus (A_a^2, B_a^2) die Polaren sucht.

Aus dieser doppelten Erzeugung der beiden Reihen von Büscheln ergiebt sich nun Folgendes:

Eine beliebige Fläche Z_{ax}, die Polare von x für Z_a^2 aus (A_a^2, B_a^2), gehört ausser dem Büschel $(A_{ax}, B_{ax}) \equiv (A_{xa}, B_{xa})$ noch dem Büschel (Z_{aa}, Z_{ab}) der Polaren von (a, b) für Z_a^2 an. Da so Z_{ax} zu Σ_a gehört, so muss es auch Polare von a für eine Fläche von Σ^2 sein. Diese Fläche muss, da Z_{ax} zu (A_{xa}, B_{xa}) gehört, dem Büschel (A_x^2, B_x^2) angehören; ferner muss sie, da Z_{ax} zu (Z_{aa}, Z_{ab}) gehört, demjenigen Büschel 2. Art von Σ^2 angehören, welches Z_a^2 enthält, da eben Z_{aa} zu (Z_{aa}, Z_{ab}) gehört. Also muss diese Fläche die gemeinsame Fläche des Büschels (A_x^2, B_x^2) und des Büschels 2. Art von Σ^2 sein, welches Z_a^2 enthält. Nennen wir diese Fläche Z_x^2, so ist für sie a und Z_{ax} Pol und Polare, d. h. sie ist die Fläche, welche mit Z_a^2 der Bedingung der gemischten Polare genügt. Also:

Sucht man in dem einem beliebigen Punkte x von (a, b) zugehörigen Büschel (A_x^2, B_x^2) die Fläche Z_x^2, welche mit einer beliebigen Fläche Z_a^2 aus (A_a^2, B_a^2) der Bedingung der gemischten Polare genügt, so gehören Z_a^2 und Z_x^2 zu einem Büschel 2. Art des durch die projectiven Büschel (A_a^2, A_b^2) und (B_a^2, B_b^2) erzeugten Gebildes Σ^2, wenn (A_a^2, B_a^2), (A_b^2, B_b^2), (A_x^2, B_x^2) etc. als Büschel 1. Art bezeichnet werden.

Da nun Z_a^2 nur zu einem Büschel 2. Art von Σ^2 gehört, so erhält man, wenn man jedem Punkte x von (a, b) die Fläche Z_x^2 aus (A_x^2, B_x^2) zuordnet, welche mit Z_a^2 der Bedingung der gemischten Polare genügt, *ein Büschel von Flächen* 2. O. (Z_a^2, Z_b^2).

Dieses Büschel ist zu (a, b) *projectiv*, weil $(Z_a^2, Z_b^2) \triangleq (Z_{aa}, Z_{ba})$, $(Z_{aa}, Z_{ba}) \equiv (Z_{aa}, Z_{ab}) \triangleq (a, b)$ ist (Vergl. § 1, I).

Die gegenseitige Zuordnung von (a, b) und (Z_a^2, Z_b^2) ist also eine polare. Das Gleiche gilt ebenso für die Punkte jeder durch a gehenden Geraden und die zugeordneten Flächen.

II. Die einem Punkte c ausserhalb (a, b) zugeordnete Fläche Z_c^2 genügt mit Z_a^2 und nach I mit allen Elementen von (Z_a^2, Z_c^2) der Bedingung der gemischten Polare. Es fragt sich aber, ob Z_c^2 auch *mit allen Elementen von* (Z_a^2, Z_b^2) dieser Bedingung genügt.

Die Polaren von c für Σ^2 bilden eine Regelfläche (resp. deren Entartungen) Σ_c. Σ_c besitzt zwei Arten von Ebenenbüscheln ganz wie Σ_a. Da nun $A_{ac} \equiv A_{ca}$, $B_{ac} \equiv B_{ca}$, $A_{bc} \equiv A_{cb}$, $B_{bc} \equiv B_{cb}$ ist, so

kann man auch Σ_c noch auf eine zweite Weise erhalten. Man erhält die Büschel 1. Art, wenn man zu jedem Punkte von (a, b) die Polaren für das Büschel (A_c^2, B_c^2) sucht; man erhält die Büschel 2. Art, wenn man zu den Punkten von (a, b) die Polaren für jede der Flächen aus (A_c^2, B_c^2) sucht.

Eine beliebige Ebene Z_{cx}, die Polare für Z_c^2 aus (A_c^2, B_c^2), gehört ausser dem Büschel 1. Art $(A_{cx}, B_{cx}) \equiv (A_{xc}, B_{xc})$ noch einem Büschel 2. Art (Z_{ca}, Z_{cb}) der Polaren von (a, b) für Z_c^2 an. Da so Z_{cx} zu Σ_c gehört, muss es auch Polare von c für eine Fläche von Σ^2 sein. Diese Fläche muss, da Z_{cx} zu (A_{xc}, B_{xc}) gehört, dem Büschel (A_x^2, B_x^2) angehören; ferner muss sie, da Z_{cx} zu (Z_{ca}, Z_{cb}) gehört, demjenigen Büschel 2. Art von Σ^2 angehören, welches Z_a^2 enthält, da eben Z_{ca} zu (Z_{ca}, Z_{cb}) gehört.

Daher muss diese Fläche die gemeinsame Fläche von (Z_a^2, Z_b^2) und (A_x^2, B_x^2), d. h. Z_x^2 sein. Also Z_{cx} muss auch die Polare von c für Z_x^2 d. h. identisch mit Z_{xc} sein.

Mithin genügt Z_c^2 mit jeder Fläche aus (Z_a^2, Z_b^2) der Bedingung der gemischten Polare.

Die vorhergehenden Betrachtungen bleiben unverändert richtig, wenn wir (a, b) durch eine beliebige andere durch a gehende Gerade und c durch einen beliebigen anderen Punkt des Raumes ersetzen. Da die Flächen 2. O., die den Punkten einer *beliebigen* Geraden zugeordnet werden, ein Büschel bilden, so bilden die Flächen, welche den Punkten einer Ebene zugeordnet werden, ein Bündel und die Flächen, welche den Punkten des Raumes zugeordnet werden, ein Gebüsch. Also:

1. *Ordnet man in den durch zwei Flächen* 3. *O.* A^3 *und* B^3 *bestimmten, den Punkten des Raumes zugehörigen Büscheln jedem Punkte* x *des Raumes die Fläche aus dem Büschel* (A_x^2, B_x^2) *zu, welche mit einer dem Punkte* a *zugeordneten Fläche* Z_a^2 *aus* (A_a^2, B_a^2) *der Bedingung der gemischten Polare genügt, so wird den Punkten des Raumes ein Gebüsch von Flächen* 2. *O. polar zugeordnet* (d. h. projectiv und so, dass zwei beliebige Flächen der Bedingung der gemischten Polare genügen).

Auf diese Weise ist mit den beiden Polarsystemen A^3, B^3 noch ein drittes Polarsystem Z^3 gegeben. Lässt man Z_a^2 das Büschel (A_a^2, B_a^2) durchlaufen, so erhält man eine einfache Unendlichkeit von Flächen 3. O. Diese nennen wir *ein Büschel von Flächen* 3. *O.* und bezeichnen dies mit (A^3, B^3).

Die Büschel erster Polaren von zwei beliebigen Punkten x und y für (A^3, B^3) sind projectiv $(A_x^2, B_x^2) \barwedge (A_y^2, B_y^2)$, denn beide sind zu $(A_{xy}, B_{xy}) \equiv (A_{yx}, B_{yx})$ projectiv. Auf Grund dieser Eigenschaft kann man wieder (A^3, B^3) auf eine Punktreihe oder ein Büschel von Flächen

projectiv beziehen. Ein Büschel (A^3, B^3) ist projectiv zu einer Punktreihe oder einem Flächenbüschel, wenn eins seiner Polarenbüschel zu diesen projectiv ist.

2. *Ein Individuum von* (A^3, B^3) *ist bestimmt, wenn man zu einem Punkte die* (übrigens nicht beliebig wählbare) *Polare* z. B. a und Z_a^2 *giebt.*

Im Allgemeinen hat jeder Punkt des Raumes für A^3 und B^3 verschiedene erste Polaren.

3. *Hat ein Punkt x für zwei Flächen A^3 und B^3 dieselbe erste Polare, so hat er auch für alle Flächen von (A^3, B^3) diese Fläche als erste Polare.*

Diese Fläche $A_x^2 \equiv B_x^2$ genügt nämlich mit zwei Flächen A_y^2 und B_y^2 eines beliebigen Büschels (A_y^2, B_y^2) der Bedingung der gemischten Polare, mithin auch mit allen Flächen von (A_y^2, B_y^2). Da $A_{xy} \equiv B_{xy}$ ist, so ist auch $A_{yx} \equiv B_{yx}$, also x eine Ecke des gemeinsamen Polartetraeders von (A_y^2, B_y^2). Infolgedessen ist auch $Z_{yx} \equiv A_{yx}$, also auch $Z_{xy} \equiv A_{xy}$, d. h. die gesuchte Fläche Z_x^2 hat für alle Punkte des Raumes dieselbe Polare wie A_x^2, ist demnach mit A_x^2 identisch.

§ 3.

Construction eines Bündels von Flächen 3. O.

Jetzt seien 3 Polarsysteme 3. O. A^3, B^3, C^3 gegeben. Aus zwei derselben, z. B. aus A^3 und B^3, lässt sich ein Büschel (A^3, B^3) construiren, dann aus C^3 und jedem Element von (A^3, B^3) wieder ein Büschel. Diese zweifach unendliche Mannichfaltigkeit von Flächen 3. O. nennt man *ein Bündel von Flächen 3. O.* (A^3, B^3, C^3); sie soll im Folgenden auf ihre einfachsten Eigenschaften untersucht werden.

Eine Fläche aus (A^3, B^3) sei X^3, eine Fläche aus (X^3, C^3) sei Y^3. Zunächst lässt sich zeigen, dass *auch jede Fläche Z^3 des Büschels* (A^3, Y^3), *das sich aus A^3 und Y^3 construiren lässt, in* (A^3, B^3, C^3) *enthalten ist.* Dazu hat man nur zu beweisen, dass (C^3, Z^3) eine Fläche mit (A^3, B^3) gemeinsam hat, also in einem der Büschel liegt, welche sich aus C^3 und den Elementen von (A^3, B^3) construiren lassen.

Die Polaren eines Punktes x für (A^3, B^3, C^3) bilden das Bündel (A_x^2, B_x^2, C_x^2). Zu diesem gehören auch X_x^2, Y_x^2, Z_x^2, wie aus den Fundamentaleigenschaften des Bündels von Flächen 2. O. bekannt ist. Ebenso folgt aus diesen Eigenschaften, dass (C_x^2, Z_x^2) und (A_x^2, B_x^2) eine Fläche, sie sei U_x^2, gemeinsam haben. Dieser Fläche U_x^2 muss in (C^3, Z^3) und in (A^3, B^3) je eine Fläche zugehören. Fraglich ist, ob diese Flächen 3. O. identisch sind.

Nehmen wir zunächst das Gegentheil an, und nennen wir die Fläche aus (A^3, B^3) U^3, die Fläche aus (C^3, Z^3) V^3.

Suchen wir nun zu einem Punkte y die Polaren für (A^3, B^3, C^3), so erhalten wir ein Bündel (A_y^2, B_y^2, C_y^2), welches zu (A_x^2, B_x^2, C_x^2) projectiv ist, wenn wir den 4 Flächen A_x^2, B_x^2, C_x^2, Y_x^2 resp. die Flächen $A_y^2, B_y^2, C_y^2, Y_y^2$ zuordnen; dabei entspricht dann auch X_y^2 der Fläche X_x^2, $U_y^2 \dots U_x^2$, $Z_y^2 \dots Z_x^2$. Da nun (A_x^2, B_x^2) auch zu (A_y^2, B_y^2) und beide zu (A^3, B^3) projectiv sind, so muss auch der Fläche U_y^2 dieselbe Fläche U^3 in (A^3, B^3) entsprechen wie vorhin der Fläche U_x^2. Ebenso ist (C^3, Z^3) zu (C_x^2, Z_x^2) und (C_y^2, Z_y^2) projectiv, also muss in (C^3, Z^3) auch den beiden Flächen U_x^2 und U_y^2 dieselbe Fläche V^3 entsprechen. Die beiden Flächen U^3 und V^3 haben also für die beiden Punkte x und y dieselben ersten Polaren. Was aber für y gilt, gilt für alle Punkte des Raumes. Da mithin U^3 und V^3 für alle Punkte des Raumes dieselbe erste Polare haben, sind sie identisch. Folglich liegt Z^3 in einem Büschel, das sich aus C^3 und einer Fläche von (A^3, B^3) construiren lässt, gehört also zu (A^3, B^3, C^3).

Nebenbei ergiebt sich noch der Satz:

1) *Die ersten Polaren zweier beliebigen Punkte des Raumes für* (A^3, B^3, C^3) *bilden zwei projective Bündel von Flächen* 2. *O.*

Da A^3 durch ein beliebiges Individuum aus (A^3, B^3) vertreten werden kann, so gilt der Satz:

2) *Das Büschel von Flächen, welches aus einer Fläche von* (A^3, B^3) *und einer beliebigen Fläche von* (A^3, B^3, C^3) *construirt werden kann, gehört ganz zu* (A^3, B^3, C^3).

Da nach den vorhergehenden Betrachtungen jedes Büschel, das sich aus C^3 und einer Fläche von (A^3, Y^3) construiren lässt, mit (A^3, B^3) eine Fläche gemeinsam hat, und da nach analogen Betrachtungen auch jedes Büschel, das sich aus C^3 und einer Fläche von (A^3, B^3) construiren lässt, mit (A^3, Y^3) eine Fläche gemeinsam hat, so kann man das Büschel (A^3, B^3) durch (A^3, Y^3) für die Construction von (A^3, B^3, C^3) ersetzen. Also gehören auch sämmtliche Elemente der Büschel, welche sich aus einer Fläche von (A^3, Y^3) und einer anderen Fläche von (A^3, B^3, C^3) construiren lassen, zu (A^3, B^3, C^3). Daraus folgt:

3) *Jedes Büschel von Flächen* 3. *O., welches mit* (A^3, B^3, C^3) *zwei Elemente gemeinsam hat, gehört ganz zu* (A^3, B^3, C^3).

Vorhin haben wir gesehen, dass (C^3, Z^3) mit (A^3, B^3) eine Fläche gemeinsam hat. Dasselbe gilt für zwei beliebige Büschel (X^3, Y^3) und (U^3, V^3), wenn X^3, Y^3, U^3, V^3 beliebige Elemente von (A^3, B^3, C^3) sind. Der folgende Beweis ist dem obigen analog.

Die Polarenbüschel (X_x^2, Y_x^2) und (U_x^2, V_x^2) haben eine Fläche Z_x^2 gemeinsam. Nehmen wir an, die entsprechenden Flächen aus (X^3, Y^3) und (U^3, V^3) seien verschieden, nämlich Z^3 und W^3. Dann

sind wieder die Polarenbüschel (X_y^2, Y_y^2) und (U_y^2, V_y^2) projectiv zu (X_x^2, Y_x^2) und (U_x^2, V_x^2), und der gemeinsamen Fläche Z_x^2 entspricht eine gemeinsame Fläche Z_y^2. Da nun zu jenen Büscheln auch (X^3, Y^3) und (U^3, V^3) projectiv sind, so muss Z_y^2 Polare von y für Z^3 und für W^3 sein. Also haben Z^3 und W^3 für alle Punkte des Raumes dieselbe Polare, mithin so müssen sie identisch sein. Es gilt demnach der Satz:

4) *Irgend zwei Büschel aus (A^3, B^3, C^3) haben ein Element gemeinsam.*

Daraus folgt aber weiter, dass man auch sämmtliche Elemente von (A^3, B^3, C^3) erhalten kann, wenn man aus zwei beliebigen Flächen X^3 und Y^3 das Büschel (X^3, Y^3) und aus einer nicht zu (X^3, Y^3) gehörigen Fläche U^3 und den Elementen von (X^3, Y^3) Büschel construirt. Z. B. gehört ja nach 4 eine beliebige Fläche V^3 zu einem Büschel, welches U^3 und eine Fläche von (X^3, Y^3) enthält. Also:

5) *Die drei Flächen A^3, B^3, C^3 können für die Construction des Bündels durch drei beliebige andere, nicht zu demselben Büschel gehörige Flächen des Bündels ersetzt werden.*

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man (A^3, B^3, C^3) wieder projectiv auf ein Punktfeld oder ein Bündel beziehen kann:

6) *Man nennt ein Bündel von Flächen* 3. *O. projectiv zu einem Punktfeld oder einem Bündel von Ebenen oder von Flächen* 2. *O., wenn das Polarenbündel eines (und damit aller) Punktes zu dem Punktfeld oder Bündel projectiv ist.*

§ 4.

Das Gebüsch; die p-fache Mannichfaltigkeit von Flächen 3. O.

Sind vier Polarsysteme A^3, B^3, C^3, D^3, welche nicht demselben Bündel angehören, gegeben, so kann man aus A^3, B^3, C^3 das Bündel (A^3, B^3, C^3) und aus jeder Fläche von (A^3, B^3, C^3) und aus D^3 wieder ein neues Büschel construiren. Die Gesammtheit der so construirten Flächen nennt man ein *Gebüsch*; es werde mit (A^3, B^3, C^3, D^3) bezeichnet.

Das Gebüsch von Flächen 3. O. besitzt eine Reihe einfacher, leicht erweisbarer Eigenschaften.

I. *Jedes Büschel von Flächen* 3. *O., welches mit dem Gebüsch zwei Flächen X^3 und Y^3 gemeinsam hat, gehört ganz dem Gebüsch an.*

Denn nach der Construction von (A^3, B^3, C^3, D^3) hat (D^3, X^3) mit (A^3, B^3, C^3) eine Fläche, sie sei U^3, gemeinsam, ebenso (D^3, Y^3) eine Fläche V^3; (D^3, U^3, V^3) gehört nach Construction ganz zu (A^3, B^3, C^3, D^3), also auch (X^3, Y^3), da es mit (D^3, U^3, V^3) zwei Elemente gemeinsam hat, also ganz zu diesem gehört.

II. *Jedes Bündel von Flächen 3. O., welches mit dem Gebüsch drei nicht zu demselben Büschel gehörige Flächen* X^3, Y^3, Z^3 *gemeinsam hat, gehört ganz dem Gebüsch an.*

Denn nach I. gehört (X^3, Y^3) ganz zu (A^3, B^3, C^3, D^3), damit wieder jedes Büschel, das sich aus Z^3 und einer Fläche von (X^3, Y^3) construiren lässt, d. h. nach § 3 alle Elemente von (X^3, Y^3, Z^3).

III. *Die Fundamentalelemente* A^3, B^3, C^3, D^3 *kann man durch vier beliebige andere nicht einem Bündel angehörige Elemente von* (A^3, B^3, C^3, D^3) *ersetzen.*

Construiren wir nämlich aus D^3 und drei beliebigen Elementen X^3, Y^3, Z^3, zu deren Bündel D^3 nicht gehört, das Gebüsch (X^3, Y^3, Z^3, D^3), so enthält dies alle Elemente von (A^3, B^3, C^3, D^3). Denn (A^3, B^3, C^3) hat mit (X^3, Y^3, Z^3, D^3) drei Elemente, die gemeinsamen Elemente von (A^3, B^3, C^3) mit den Büscheln (D^3, X^3), (D^3, Y^3), (D^3, Z^3), gemeinsam, also gehört es nach II. ganz zu (X^3, Y^3, Z^3, D^3); dann hat aber jedes der Büschel, die sich aus D^3 und einem Element von (A^3, B^3, C^3) construiren lassen, mit (X^3, Y^3, Z^3, D^3) zwei Elemente gemeinsam, gehört ihm mithin ganz an. In gleicher Weise kann man zeigen, dass auch umgekehrt jedes Element von (X^3, Y^3, Z^3, D^3) zu (A^3, B^3, C^3, D^3) gehört.

Ebenso lässt sich D^3 durch eine nicht zu (A^3, B^3, C^3) gehörige Fläche U^3 aus (A^3, B^3, C^3, D^3) ersetzen. Denn D^3 gehört mit U^3 und einer Fläche aus (A^3, B^3, C^3) zu einem Büschel, gehört also zu (A^3, B^3, C^3, U^3), damit aber nach I. auch jedes der durch D^3 und die Elemente von (A^3, B^3, C^3) bestimmten Büschel; ebenso umgekehrt.

Ersetzt man nach einander A^3, B^3, C^3 durch X^3, Y^3, Z^3 und D^3 durch U^3, so erhält man (A^3, B^3, C^3, D^3) durch vier beliebige nicht einem Bündel angehörige seiner Flächen.

IV. *Ein Bündel und ein Büschel eines Gebüsches haben stets mindestens eine Fläche gemeinsam.*

Ist nämlich (X^3, Y^3, Z^3) das Bündel, (U^3, V^3) das Büschel, so gehört V^3 nach III. zu dem Gebüsch (X^3, Y^3, Z^3, U^3), liegt also in einem der durch U^3 und die Elemente von (X^3, Y^3, Z^3) bestimmten Büschel.

V. *Zwei Bündel eines Gebüsches haben stets ein Büschel gemeinsam.*

Sind (X^3, Y^3, Z^3) und (U^3, V^3, W^3) die Bündel, M^3 die nach IV. gemeinsame Fläche von (X^3, Y^3, Z^3) und (U^3, V^3), N^3 die gemeinsame Fläche von (X^3, Y^3, Z^3) und (U^3, W^3), so gehört (M^3, N^3) nach I. ganz zu (X^3, Y^3, Z^3) und zu (U^3, V^3, W^3).

Wie wir aus vier Elementen A^3, B^3, C^3, D^3 die dreifach unendliche lineare Mannichfaltigkeit, das Gebüsch, construirt haben, so

können wir aus 5, 6, ..., $r+1$ Elementen die 4-, 5-, ..., *r-fache lineare Mannichfaltigkeit* construiren.

Unter der Voraussetzung, dass die linearen Mannichfaltigkeiten bis zur $(r-1)$-fachen construirt sind, gestaltet sich die Construction der r-fachen folgendermassen. Sind $(r+1)$ nicht einer $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit angehörige Flächen $A^3, B^3 \dots R^3, S^3$ gegeben, so construire man die $(r-1)$-fache Mannichfaltigkeit $(A^3, B^3 \dots R^3)$ und aus S^3 und jedem Elemente von $(A^3, B^3 \dots R^3)$ ein Büschel. Die Gesammtheit der in diesen Büscheln enthaltenen Elemente nennen wir die *lineare r-fache Mannichfaltigkeit von Flächen* 3. *O.* $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$.

Für diese Mannichfaltigkeit gilt eine Reihe einfacher Sätze, deren Beweis dem der entsprechenden Sätze des Gebüsches völlig analog ist.

VI. *Jedes Büschel, welches mit* $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ *zwei Elemente gemeinsam hat, gehört ganz zu* $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ (cf. I.)

VII. *Jede* p $(p < r)$*-fache Mannichfaltigkeit, welche mit der r-fachen Mannichfaltigkeit* $p+1$ *nicht einer* $(p-1)$*-fachen Mannichfaltigkeit angehörige Elemente gemeinsam hat, gehört ihr ganz an.* (cf. II.)

VIII. *Die constituirenden Elemente* $A^3, B^3 \dots R^3, S^3$ *können durch* $r+1$ *andere, nicht einer* $(r-1)$*-fachen Mannichfaltigkeit angehörige Elemente von* $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ *ersetzt werden.* (cf. III.)

IX. *Ein Büschel und eine* $(r-1)$*-fache Mannichfaltigkeit von* $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ *haben mindestens eine Fläche gemeinsam.* (cf. IV.)

X. *Eine* $(r-1)$*-fache und eine* $p\,(p < r)$*-fache Mannichfaltigkeit von* $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ *haben mindestens eine* $(p-1)$*-fache Mannichfaltigkeit gemeinsam.* (cf. V.)

XI. *Eine p-fache und eine q-fache Mannichfaltigkeit haben, wenn* $p+q > r$ *ist, mindestens eine* $(p+q-r)$*-fache Mannichfaltigkeit gemeinsam.*

Unter der zunächst für $r=5$ erfüllten Voraussetzung, dass dieser Satz für $(r-1)$-fache Mannichfaltigkeiten gilt, lässt sich der Beweis hierfür folgendermassen führen.

Die p-fache Mannichfaltigkeit ergänze man durch Hinzufügung weiterer Bestimmungselemente zu einer, $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ angehörigen, $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit. Nach X hat diese mit der q-fachen Mannichfaltigkeit eine $(q-1)$-fache Mannichfaltigkeit gemeinsam. Diese $(q-1)$-fache und die p-fache Mannichfaltigkeit der $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit haben nun, wie soeben als schon bewiesen angenommen wurde, eine $\{p+(q-1)-(r-1)\}$ $=(p+q-r)$-fache Mannichfaltigkeit gemeinsam. Alle gemeinsamen Elemente der p-fachen und der q-fachen Mannichfaltigkeit von $(A^3, B^3 \dots R^3, S^3)$ sind aber in der $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit

enthalten, bilden also gerade jene $(p + q - r)$-fache Mannichfaltigkeit.

XII. *Die Polaren eines Punktes für die r-fache Mannichfaltigkeit von Flächen 3. O. bilden, so lange $r < 9$ ist, eine projective r-fache Mannichfaltigkeit von Flächen 2. O.*

Denn die Polaren eines Punktes für ein Büschel von Flächen 3. O. bilden ein Büschel von Flächen 2. O., und die Mannichfaltigkeiten der Flächen 2. O. entstehen in derselben Weise durch Büschelconstructionen wie die Mannichfaltigkeiten der Flächen 3. O. Ferner ist jedes Polarenbüschel zu dem Büschel zugehöriger Flächen 3. O. projectiv.

§ 5.

Die Gesammtheit der Flächen 3. O.

Es fragt sich nun, bis zu welchem Grade der Vielfachheit sich die Construction von Mannichfaltigkeiten fortsetzen lässt.

Aus der Construction von A^3 in § 1 lässt sich zunächst die Zahl der Bestimmungselemente einer Fläche 3. O. ableiten. Dem Punkte a wurde eine beliebige Fläche A_a^2 zugeordnet; sie ist durch 9 unabhängige einfache Bedingungen, z. B. durch 9 Paar conjugirter Punkte bestimmt. Mit A_a^2 kennt man für A_b^2 schon die Polare des Punktes a, nämlich A_{ab}, A_b^2 ist daher durch 6 weitere Bedingungen gegeben. Für A_c^2 kennt man das Polarenbüschel (A_{ac}, A_{bc}), demnach ist A_c^2 durch 3 weitere Bedingungen bestimmt. Von A_d^2 ist schon das Polarenbündel (A_{ad}, A_{bd}, A_{cd}) bekannt, mithin ist A_d^2 durch ein weiteres Bestimmungsstück bestimmt. Also:

I. *Eine Fläche 3. O. ist durch* 19 *Bedingungen bestimmt.*

Da diese 19 Bestimmungselemente von einander unabhängig sind, so erhält man durch Variation der einzelnen *mindestens* eine 19-*fache* Mannichfaltigkeit von Flächen 3. O.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Gesammtheit der Flächen 3. O. *nicht eine höhere als* 19-*fache* Mannichfaltigkeit bilden, und dass diese Mannichfaltigkeit eine *lineare* ist.

Da die Flächen 2. O. eine 9-fache Mannichfaltigkeit bilden, so lässt sich eine 9-fache Mannichfaltigkeit von Flächen 3. O. construiren, wenn man dem Punkte a nach und nach alle Flächen 2. O. zuordnet und dann diese Zuordnung zu einer Fläche 3. O. ergänzt. Diese 9-fache Mannichfaltigkeit sei $(A^3, B^3 \ldots P^3)$. Die Polaren irgend eines anderen Punktes bilden dann nach § 4, XII im Allgemeinen ebenfalls eine 9-fache Mannichfaltigkeit, d. h. alle Flächen 2. O.

In $(A^3, B^3 \ldots P^3)$ giebt es demnach eine Fläche X^3, für welche ein beliebiges Paar von Punkt und Fläche 2. O., x und X_x^2, Pol und Polare sind.

Giebt man nun noch eine nicht zu $(A^3, B^3 \dots P^3)$ gehörige Fläche Q^3, so bestimmt diese mit 8 Elementen von $(A^3, B^3 \dots P^3)$ auch eine 9-fache lineare Mannichfaltigkeit; auch in dieser giebt es eine Fläche X'^3, für welche x und X_x^2 Pol und Polare sind. Nach § 2, II, 2 sind x und X_x^2 Pol und Polare für das ganze Büschel (X^3, X'^3). Da nun (X^3, X'^3) nach § 4, VI ganz zu $(A^3, B^3 \dots P^3, Q^3)$ gehört, so gilt der Satz:

II. *In einer* 10-*fachen Mannichfaltigkeit von Flächen* 3. *O. giebt es ein Büschel von Flächen, für welche ein beliebiger Punkt und eine beliebige Fläche* 2. *O. Pol und Polare sind.*

Giebt man p Flächen 3. O. $(9 < p \leq 19)$, so kann man aus 8 derselben und je einer der übrigen $p - 8$ Flächen eine 9-fache Mannichfaltigkeit construiren; in jeder von ihnen giebt es eine Fläche X^3, für welche ein beliebiger Punkt x und eine beliebige Fläche 2. O. X_x^2 Pol und Polare sind. x und X_x^2 sind auch Pol und Polare für die ganze aus diesen $p - 8$ Flächen X^3 construirbare $(p - 9)$-fache Mannichfaltigkeit. Also:

III. *In einer* $p(9 < p < 19)$-*fachen linearen Mannichfaltigkeit von Flächen* 3. *O. giebt es eine* $(p - 9)$-*fache lineare Mannichfaltigkeit, für welche ein beliebiger Punkt und eine beliebige Fläche* 2. *O. Pol und Polare sind.*

In Bezug auf diese $(p - 9)$-fache Mannichfaltigkeit bilden die Polaren eines Punktes y wieder eine $(p - 9)$-fache Mannichfaltigkeit von Flächen 2. O., so lange $9 < p \overline{\gtrless} 15$ ist. Denn die Gesammtheit von Flächen 2. O., welche mit X_x^2 für y der Bedingung der gemischten Polare genügen, ist selbst nur von 6-facher Mannichfaltigkeit.

IV. *Ist* $p > 15$, *so giebt es eine* $(p - 15)$-*fache lineare Mannichfaltigkeit, für welche* x, X_x^2 *und* y, X_y^2 *Pole und Polaren sind, falls* X_x^2 *und* X_y^2 *der Bedingung der gemischten Polare genügen.*

Der Beweis für diesen Satz ist denen von II und III völlig analog.

Die Polaren eines Punktes z für die in IV genannte $(p - 15)$-fache Mannichfaltigkeit bilden wieder eine $(p - 15)$-fache Mannichfaltigkeit, so lange $p \overline{\gtrless} 18$ ist.

V. *Ist* $p = 19$, *so giebt es ein Büschel von Flächen* 3. *O., für welches* x, X_x^2, y, X_y^2, z, X_z^2 *Pole und Polaren sind, falls* $X_{xy} \equiv X_{yx}$, $X_{xz} \equiv X_{zx}$, $X_{yz} \equiv X_{zy}$.

Beweis wie für II und III.

VI. *In der linearen* 19-*fachen Mannichfaltigkeit von Flächen* 3. *O. giebt es eine Fläche, für welche* x, X_x^2; y, X_y^2; z, X_z^2; u, X_u^2 *Pole und Polaren sind, wenn diese den Bedingungen der gemischten Polare genügen.*

Man kann hiernach in derselben Allgemeinheit, wie es in § 1 geschehen ist, in der 19-fachen linearen Mannichfaltigkeit zu vier

Punkten a, b, c, d die Polaren geben; man hat in der Mannichfaltigkeit genau wie ohne Rücksicht auf sie der einzigen Bedingung der gemischten Polare zu genügen. Also:

VII. *Die Gesammtheit der Flächen* 3. *O. bilden eine* **lineare** 19-*fache Mannichfaltigkeit.*

Aus § 4, XI folgt noch:

VIII. *Eine r-fache und eine s-fache lineare Mannichfaltigkeit haben, wenn $r + s > 19$ ist, mindestens eine $(r + s - 19)$-fache lineare Mannichfaltigkeit gemeinsam.*

§ 6.

Die Punkte der Fläche 3. O. Construction der Fläche 3. O. aus 19 Punkten.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung der einzelnen Fläche 3. O. zurück.

Die erste Polare A_x^2 von x für A^3 gehe durch y; dann geht die Polare von y für A_x^2, also A_{xy} auch durch y. Da nun $A_{xy} \equiv A_{yx}$ ist, so geht die Polare von x für A_y^2 durch y; x und y sind also für A_y^2 conjugirt, mithin geht die Polare von y für A_y^2, d. h. A_{yy} umgekehrt durch x. Wir haben also den Satz:

I. *Geht die* 1. *Polare von x durch y, so geht die* 2. *Polare von y durch x.*

Geht A_{xx} durch y, so sind x und y conjugirt für A_x^2, also geht A_{xy} durch x. Da nun $A_{xy} \equiv A_{yx}$ ist, so geht die Polare von x für A_y^2 durch x, d. h. x liegt auf A_y^2. Also:

II. *Geht die* 2. *Polare von x durch y, so geht die* 1. *Polare von y durch x.*

Im besonderen Falle kann die Polarfläche eines Punktes durch diesen Punkt selbst gehen.

III. *Die Gesammtheit der Punkte des Raumes, welche auf ihren Polarflächen liegen, nennt man die Ordnungsfläche des Polarsystems* 3. *O. oder kurz Fläche* 3. *O.*

Haben zwei Flächen 3. O. A^3 und B^3 einen Punkt x gemeinsam, so gehen durch x auch A_x^2 und B_x^2; dann gehen durch x alle Flächen des Büschels (A_x^2, B_x^2). Da dies Büschel aber das Polarenbüschel von x für (A^3, B^3) ist, so gehen auch alle Elemente von (A^3, B^3) durch x. Also:

IV. *Durch die gemeinsamen Punkte zweier Elemente eines Büschels von Flächen* 3. *O. gehen auch alle übrigen Flächen des Büschels.*

Da nun alle linearen Mannichfaltigkeiten durch Büschelconstructionen entstehen, so gilt der Satz:

V. *Haben die constituirenden Elemente einer linearen Mannich-*

faltigkeit von Flächen 3. O. Punkte gemeinsam, so gehen durch sie alle Elemente der Mannichfaltigkeit.

Ist x nicht ein gemeinsamer Punkt von A^3 und B^3, so giebt es eine Fläche in (A_x^2, B_x^2), welche durch x geht. Also:

VI. *Durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht eine Fläche des Büschels von Flächen* 3. *O.*

Die durch einen Punkt x gehenden Elemente einer p-fachen Mannichfaltigkeit kann man auf folgende Weise erhalten.

In der p-fachen Mannichfaltigkeit $(A^3, B^3 \ldots O^3, P^3)$ kann man die $(p-1)$ Elemente $(A^3, B^3 \ldots O^3)$ durch andere ersetzen nach § 4, III. Wählt man dazu in jedem der Büschel (A^3, P^3), $(B^3, P^3) \ldots (O^3, P^3)$ die durch x gehende Fläche $A'^3, B'^3 \ldots O'^3$, so ist die p-fache Mannichfaltigkeit $(A'^3, B'^3 \ldots O'^3, P^3)$. Die in ihr vorkommenden Flächen, welche durch x gehen, bilden die $(p-1)$-fache Mannichfaltigkeit $(A'^3, B'^3 \ldots O'^3)$. Also:

VII. *Die durch einen Punkt gehenden Flächen einer linearen p-fachen Mannichfaltigkeit von Flächen* 3. *O. bilden eine lineare* $(p-1)$-*fache Mannichfaltigkeit von Flächen* 3. *O.*

Daraus folgt:

VIII. *Die durch einen Punkt des Raumes gehenden Flächen* 3. *O. bilden eine lineare* 18-*fache Mannichfaltigkeit.*

IX. *Die durch p Punkte gehenden Flächen* 3. *O. bilden eine lineare* $(19-p)$-*fache Mannichfaltigkeit.*

X. *Durch* 19 *Punkte geht nur eine Fläche* 3. *O.*

Auch die wirkliche *Construction der Fläche* 3. *O. aus* 19 *Punkten* bietet nunmehr keine Schwierigkeiten. Man construirt zwei Flächen 3. O., welche durch einen gegebenen Punkt gehen, dann in dem Büschel derselben die Fläche, welche durch einen zweiten gegebenen Punkt geht, ebenso dann eine zweite Fläche, welche durch diese beiden Punkte geht, aus dem Büschel der beiden Flächen, welche durch die zwei Punkte gehen, die Fläche, welche durch einen dritten gegebenen Punkt geht u. s. w. u. s. w.

Diese Construction lässt noch manche Abänderungen und Vereinfachungen zu.

Die in der vorliegenden Abhandlung abgeleiteten Eigenschaften der Flächen 3. O. bilden eine genügende Grundlage für die Definition der Flächen 4. O. Wie wir die Flächen 3. O. mit Hülfe der Eigenschaften der Flächen 2. O. definirt haben, ebenso lassen sich jetzt die Flächen 4. O. auf Grund der abgeleiteten Eigenschaften der Flächen 3. O. definiren.

Posen, im Juli 1886.

Ueber Gleichungen fünften Grades.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Einleitung.

Nachstehende Abhandlung wird die Transformation der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades auf eine Normalform, die nur *einen einzigen* Parameter besitzt, zum Gegenstand haben.

Bekanntlich lassen sich durch quadratische Transformation alle Gleichungen fünften Grades in Gleichungen von der Form:

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0$$

verwandeln, die nur *zwei* wesentliche Parameter besitzen. Diese Gleichungen vergleicht Klein [siehe: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades von F. Klein, Teubner 1884], mit einer beim Ikosaeder auftretenden Gleichung, welche nur *einen* wesentlichen Parameter Z besitzt und deren Wurzeln Y_ν lineare Combinationen

$$Y_\nu = \sigma \,.\, W_\nu + \tau \,.\, t_\nu W_\nu$$

der Grössen W_ν, $t_\nu W_\nu$ sind, die nur von Z abhängen. Durch diese Vergleichung stellt Klein die Grössen ϱ, τ, Z als Functionen der Coefficienten a, b, c dar.

Zwischen den Grössen W^ν und $W_\nu t_\nu$ bestehen die Relationen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\nu=5} (\lambda_1 W_\nu + \lambda_2 W_\nu t_\nu) = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=5} (\lambda_1 W_\nu + \lambda_2 W_\nu t_\nu)^2 = 0, \end{cases}$$

welche für alle Werthe von λ_1 und λ_2 gelten. Andrerseits sind die Grössen

$$t_\nu = \frac{W_\nu t_\nu}{W_\nu}$$

Grössen u_ν proportional, welche die Wurzeln einer Gleichung:

$$u^5 - 10u^3 + 45u + C = 0 \tag{2}$$

sind, die als Brioschi'sche Normalform bekannt ist. Durch *dieselbe Gleichung* (2) werden somit alle Gleichungen aufgelöst, welche die Wurzeln

$$\sigma \,.\, W_\nu + \tau \,.\, t_\nu W_\nu$$

besitzen, was für Werthe σ und τ auch haben mögen.

Es lag daher die Frage nach dem Zusammenhange der Formeln (1) und (2) nahe, d. h. die Frage, ob sich die Brioschi'sche Normalform (2) direct aus den Bedingungen (1) herleiten liesse. In der That bestätigte sich diese Vermuthung nicht nur, sondern es ergab sich aus diesen Bedingungen (1) ein sehr einfacher Weg, die allgemeine Gleichung fünften Grades in die Brioschi'sche Form zu transformiren. Wie die Hermite'sche Form

$$x^5 + ax + b = 0 \tag{3}$$

typisch ist für alle jene Gleichungen 5^{ten} Grades, deren Invariante $C = 0$ ist, so ist die Brioschi'sche typisch für die Formen mit verschwindender Invariante B. Während aber Bring *cubischer* Relationen bedarf um die Gleichung 5^{ten} Grades in die Hermite'sche Form zu bringen, genügen zur Transformation in die Brioschi'sche Form *quadratische* Relationen, wie bereits Kronecker (s. Crelles Journal, Bd. 49) erkannte.

§ 1.

Transformation der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades in die Normalform.

Die allgemeinste Gleichung 5^{ten} Grades

$$f \equiv x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \tag{1}$$

besitzt 5 Parameter. Wir wollen im Folgenden eine directe Methode aufstellen, sie auf eine Gleichung mit einem einzigen Parameter zurückzuführen.

Es seien $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$ die 5 Wurzeln der Gleichung (1). Irgend eine rationale ganze oder gebrochene Function einer dieser 5 Wurzeln lässt sich bekanntlich durch eine ganze Function dieser Wurzel darstellen, die den 4^{ten} Grad nicht übersteigt. Wenn wir also Functionen einer solcher Wurzel eingehender studiren wollen, so können wir uns hiebei auf ganze rationale Functionen vierten Grades beschränken.

Die beiden Functionen

$$\varphi(x_\varkappa) = x_\varkappa^4 + \lambda_1 x_\varkappa^3 + \lambda_2 x_\varkappa^2 + \lambda_3 x_\varkappa + \lambda_4,$$
$$\psi(x_\varkappa) = x_\varkappa^4 + \mu_1 x_\varkappa^3 + \mu_2 x_\varkappa^2 + \mu_3 x_\varkappa + \mu_4$$

seien zwei beliebige Functionen dieser Art. Man kann dann immer

Constante c_{ik} so finden, dass die beiden Formen φ und ψ der Kegelschnittsgleichung genügen:

(2) $K(x_\varkappa) \equiv c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\psi + c_{22}\psi^2 + c_1\varphi + c_2\psi + c_3 = 0.$

Denn die 5 Grössen φ^2, $\varphi\psi$, ψ^2, φ, ψ sind Functionen in x_i, welche den 8^{ten} Grad nicht übersteigen. Verbindet man daher die 5 Identitäten

$$\begin{aligned}
x_\varkappa^8 + \cdots + \lambda_4^2 \quad - \varphi^2 \;&= 0,\\
x_\varkappa^8 + \cdots + \lambda_4\mu_4 - \varphi\psi &= 0,\\
x_\varkappa^8 + \cdots + \mu_4^2 \quad - \psi^2 \;&= 0,\\
x_\varkappa^4 + \cdots + \lambda_4 \quad - \varphi \;&= 0,\\
x_\varkappa^4 + \cdots + \mu_4 \quad - \psi \;&= 0
\end{aligned}$$

mit den vier weiteren

$$f(x_\varkappa) = 0, \quad x_\varkappa f(x_\varkappa) = 0, \quad x_\varkappa^2 f(x_\varkappa) = 0, \quad x_\varkappa^3 f(x_\varkappa) = 0,$$

so stellen sie zusammen 9 lineare und homogene Gleichungen mit den 9 Unbekannten

$$x^8,\ x^7,\ x^6 \ldots x,\ 1$$

dar. Die Determinante des Systemes muss demnach verschwinden und diess liefert unmittelbar die Kegelschnittsgleichung (2) (vgl. § 2). Ein wesentliches Interesse gewinnt dieser Kegelschnitt indess erst, sobald man diesen Functionen φ und ψ Bedingungen auferlegt, die aus gewissen Normalformen der Gleichung 5^{ten} Grades von selbst sich ergeben.

Diese Bedingungen sollen sein, den Glch. (1) d. Einl. entsprechend:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases}
\sum\limits_{k=5}^{k=1}\varphi(x_k) = 0, & \sum\limits_{k=5}^{k=1}\varphi^2(x_k) = 0,\\[2ex]
\sum\limits_{k=5}^{k=1}\psi(x_k) = 0, & \sum\limits_{k=5}^{k=1}\psi^2(x_k) = 0,\\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\sum\limits_{k=5}^{k=1}\varphi(x_k)\,.\,\psi(x_k) = 0.}
\end{cases}$$

Man kann natürlich auf unendlich viele Weisen derartige Functionen φ und ψ aufstellen, da ja die 8 willkürlichen Constanten beider Formen nur diese 5 Relationen zu befriedigen haben; in § 2 wird eine Methode zur Bestimmung solcher Functionen entwickelt werden.

Nehmen wir nun an, dass φ und ψ diesen Bedingungen genügen, dann verschwindet im Kegelschnitt die Constante c_3. Um das zu erkennen braucht man nur

$$\sum_{k=5}^{k=1} K(x_k) = 0$$

zu bilden; wegen der Relationen (I) reducirt sich diese Gleichung auf

$$5c_3 = 0.$$

Die Existenz dieses Kegelschnittes K ist nun aber von fundamentaler Bedeutung für unser Problem. Indem wir nämlich den Kegelschnitt K in eine nahe liegende Normalform überführen, bietet sich von selbst eine Tschirnhausen-Transformation dar, durch welche die ursprüngliche Gleichung $f = 0$ direct in die Brioschi'sche Normalform übergeht.

Setzen wir nämlich in Gleichung (2)

$$\text{(2a)} \qquad c_{11}(c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\psi + c_{12}\psi^2) = hh_1,$$

wobei also:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} h \;= c_{11}\varphi + \left(c_{12} + \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}\right)\psi, \\ h_1 = c_{11}\varphi + \left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}\right)\psi, \end{cases}$$

dann gehen wegen dieser linearen Beziehungen zwischen h, h_1, φ und ψ die zwei übrigen Glieder des Kegelschnittes (2) nothwendig in einen linearen Ausdruck von h und h_1 über. Sind daher d und d_1 constante Grössen, die wir weiter unten berechnen werden, so geht unter Einführung von h und h_1 die Kegelschnittsgleichung über in:

$$2hh_1 = hd_1 - dh_1$$

oder, was dasselbe ist, in

$$\text{(4)} \qquad \frac{d}{h} + 1 = \frac{d_1}{h_1} - 1.$$

Hieran knüpft sich die Transformation. Wir setzen

$$\text{(5)} \qquad \frac{d}{h} + 1 = \frac{d_1}{h_1} - 1 = y$$

und erhalten demnach

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{h}{d} = \dfrac{1}{y-1}, \\ \dfrac{h_1}{d_1} = \dfrac{1}{y+1}, \end{cases}$$

oder indem wir vermöge der Beziehungen (3) an Stelle der Grössen h die Functionen φ und ψ einführen und nach diesen die beiden Gleichungen (5) auflösen:

$$\text{(7)} \qquad \varphi = \frac{d\left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}\right)}{2c_{11}c_{12}(y-1)} - \frac{d_1\left(c_{12} + \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{12}}\right)}{2c_{11}c_{22}(y+1)},$$

$$\text{(8)} \qquad \psi = \frac{d}{2(y-1)\sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}} - \frac{d_1}{2(y+1)\sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}}.$$

Vermöge einer jeden der Gleichungen (6) gehören zu jedem der 5 Werthe x_k auch 5 Werthe y_k, und die Gleichung dieser 5 Werthe y_k welche durch

$$F(y) = y^5 + \alpha_1 y^4 + \alpha_2 y^3 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y + \alpha_5 \tag{9}$$

dargestellt sein mag, geht aus der ursprünglichen durch eine Tschirnhausentransformation hervor. Zwischen den Coefficienten dieser Gleichung (9) müssen aber nothwendig Relationen bestehen. Denn da nach unserer Annahme:

$$\sum \varphi(x_k) = 0, \quad \sum \varphi^2(x_k) = 0, \quad \sum \psi(x_k) = 0, \quad \sum \psi^2(x_k) = 0,$$
$$\sum \varphi(x_k)\,\psi(x_k) = 0$$

ist, so ist auch gemäss den Gleichungen (3):

$$\sum h(x) = 0, \quad \sum h^2(x) = 0, \quad \sum h_1(x) = 0, \quad \sum h_1^2(x) = 0$$

und daher auch wegen der Transformationsgleichungen (6):

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \sum \dfrac{1}{y-1} = 0, & \sum \dfrac{1}{y+1} = 0, \\ \sum \left(\dfrac{1}{y-1}\right)^2 = 0, & \sum \left(\dfrac{1}{y+1}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Zu den gesuchten Coefficientenrelationen gelangen wir, wenn wir berücksichtigen, dass wegen der Beziehungen (II) in den Gleichungen:

$$F(y+1) = 0$$

und

$$F(y-1) = 0$$

die Coefficienten des vorletzten und drittletzten Gliedes verschwinden müssen.

Es ist aber:

$$\begin{aligned} F(y+1) = (y+1)^5 + \alpha_1(y+1)^4 + \alpha_2(y+1)^3 + \alpha_3(y+1)^2 \\ + \alpha_4(y+1) + \alpha_5, \\ F(y-1) = (y-1)^5 + \alpha_1(y-1)^4 + \alpha_2(y-1)^3 + \alpha_3(y-1)^2 \\ + \alpha_4(y-1) + \alpha_5 \end{aligned}$$

und demnach liefern die Coefficienten von y^2 und y in beiden Gleichungen durch ihr Verschwinden die Relationen:

$$\begin{aligned} 10 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ 5 + 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\ -10 + 6\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ 5 - 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraction vereinfachen sie sich in der Weise, dass man erhält:

$$\begin{aligned} 10 \;\; + \;\; \alpha_2 \qquad\quad &= 0, \\ 6\alpha_1 + \;\; \alpha_3 \qquad\quad &= 0, \\ 5 \;\; + 3\alpha_2 + \alpha_4 &= 0, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_3 \qquad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 5, \quad \alpha_2 = -\frac{10}{3}.$$

Bezeichnen wir daher den nicht berechneten Coefficienten α_5 mit Z, so hat $F(y)$ die Form:

$$(10) \qquad F(y) = y^5 - \frac{10}{3} y^3 + 5y + Z = 0.$$

Die Brioschi'sche Form geht hieraus hervor, wenn man

$$y = \frac{u}{\sqrt{3}}$$

setzt; wir erhalten alsdann:

$$(11) \qquad F(u) = u^5 - 10u^3 + 45u + Z\sqrt{3^5} = 0.$$

Damit ist die Transformation der allgemeinen Gleichung fünften Grades in die Brioschi'sche Normalform bewerkstelligt. Es erübrigt nur den Parameter Z zu berechnen. Zu dem Zwecke setzen wir in Gleichung (10)

$$y = 1 + v,$$

und dividiren das Resultat der Substitutionen mit v^5.

Man erhält, indem man nachträglich wiederum v durch $y - 1$ ersetzt:

$$\frac{Z + \frac{8}{3}}{(y-1)^5} + \frac{\frac{20}{3}}{(y-1)^2} + \frac{5}{y-1} + 1 = 0.$$

Diese Umformung lehrt uns mit Rücksicht auf die Newton'schen Formeln, dass:

$$(12) \qquad s_3 = \sum \left(\frac{1}{y-1}\right)^3 = \frac{-20}{Z + \frac{8}{3}},$$

eine Grösse, deren Werth wir sofort benützen werden.

Bildet man nämlich mit Hülfe der Gleichung (7) den Ausdruck

$$\sum \frac{\varphi^2(x_k)}{(y-1)},$$

so erhält man:

$$\sum \frac{\varphi^2}{(y-1)} = C_1 \sum \left(\frac{1}{y-1}\right)^3 + C_2 \sum \frac{1}{(y-1)^2\,(y+1)} + C_3 \sum \frac{1}{(y+1)^2\,(y-1)},$$

wobei $C_1\, C_2\, C_3$ bekannte Grössen sind. Die beiden letzten Glieder rechts lassen sich aber in Partialbruchsummen von der Form

$$\sum \frac{1}{(y-1)^2}, \quad \sum \frac{1}{(y-1)}, \quad \sum \left(\frac{1}{y+1}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{1}{y+1}\right)$$

zerlegen, welche gemäss der Relationen (II) identisch verschwinden. Demnach reducirt sich die letzte Gleichung auf das erste Glied und man erhält:

$$\sum \frac{\varphi^2}{y-1} = \frac{d^2\left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}\right)}{4\,c_{11}^2\,c_{22}^2} \cdot \frac{-20}{Z + \frac{8}{3}}$$

oder, weil

$$\frac{1}{y-1} = \frac{h}{d} = \frac{c_{11}\,\varphi + \left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{12}}\right)\psi}{d},$$

$$\frac{c_{11}}{d}\sum \varphi^3 + \frac{c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{12}}}{d}\sum \varphi^2\,\psi$$
$$= \frac{-60 . d^2\left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}\right)^2}{4\,c_{11}^2\,c_{22}^2} \cdot \frac{1}{3Z+8}.$$

Diess ist die Gleichung für den Parameter Z. Wir können in ihr noch die Grösse d durch die Coefficienten c_{ik} des Kegelschnittes ersetzen. Zur Berechnung von d benützen wir die Identität,

$$2hh_1 + dh_1 - d_1 h = 2c_{11}(c_{11}\,\varphi^2 + 2c_{12}\,\varphi\,\psi + c_{22}\,\psi^2 + c_1\,\varphi + c_2\,\psi),$$

die sich durch Gleichsetzung der beiden Kegelschnittsformen ergiebt.

Wegen der Beziehung

$$2hh_1 = 2c_{11}(c_{11}\,\varphi^2 + 2c_{12}\,\varphi\,\psi + c_{22}\,\psi^2) \qquad \text{(vergl. (2a))}$$

ergiebt sich hieraus

$$dh_1 - d_1 h = 2c_{11}(c_1\,\varphi + c_2\,\psi)$$

oder, wenn wir hierin h und h_1 vermöge der Gleichungen (3) durch φ und ψ ersetzen:

$$d\left\{c_{11}\,\varphi + \left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}\right)\psi\right\} - d_1\left\{c_{11}\,\varphi + \left(c_{12} + \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}\right)\psi\right\}$$
$$= 2c_{11}(c_1\,\varphi + c_2\,\psi).$$

Durch Coefficientenvergleichung erhält man:

$$d - d_1 = 2c_1$$

und:

$$d + d_1 = \frac{2(c_1\,c_{12} - c_{11}\,c_2)}{\sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}}.$$

Demnach wird:

$$d = \frac{c_1\,c_{12} - c_{11}\,c_2}{\sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}} + c_1,$$

$$d_1 = \frac{c_1\,c_{12} - c_{11}\,c_2}{\sqrt{c_{12}^2 - c_{11}\,c_{22}}} - c_1.$$

Es ergiebt sich sonach für den Parameter Z der Werth

$$(13)\quad Z = \frac{-5\left\{\frac{c_1 c_{12} - c_{11} c_2}{\sqrt{c_{12}^2 - c_{11} c_{22}}} + c_1\right\}^3 \left\{c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11} c_{22}}\right\}^2}{c_{11}^2\, c_{22}^2 \left\{c_{11} \sum \varphi^3 + \left(c_{12} - \sqrt{c_{12}^2 - c_{11} c_{22}}\right) \sum \varphi^2 \psi\right\}} - \frac{8}{3}.$$

Die Werthe der beiden Summen des Nenners werden wir in § 2 berechnen.

Bei Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades sind demnach folgende Operationen zu vollziehen:

1) *Aufstellung einer Function φ, so dass*

$$\sum_1^5 \varphi(x_k) = 0, \quad \sum_1^5 \varphi^2(x_k) = 0.$$

2) *Aufstellung einer weiteren Function ψ, der Art, dass*

$$\sum_1^5 \psi(x_k) = 0, \quad \sum_1^5 \psi^2(x_k) = 0, \quad \sum_1^5 \psi(x_k)\, \varphi(x_k) = 0.$$

3) *Berechnung der Constanten c_{ik} des Kegelschnittes.*

4) *Einführung der Werthe derselben in den Parameter Z (Gleichung* 13).

Damit ist die ursprüngliche Gleichung in die Brioschi'sche Normalform übergeführt. Ihre Auflösung erfolgt nach bekannten Methoden (vergl. Klein, Ikosaeder). Aus ihren 5 Wurzeln y_k ergeben sich direct die Functionenwerthe φ und ψ wegen der Gleichungen (7), (8) und es erübrigt alsdann nunmehr

5) *die Berechnung der* 5 *Wurzeln x_i aus den Werthen von φ und ψ.*

Der nächste Paragraph soll sich mit der Ausführung der einzelnen Operationen eingehender befassen.

§ 2.

Ausführung der einzelnen Operationen.

1. Berechnung der Form $\varphi(x_k)$. Es ist erlaubt die Form φ möglichst einfach zu wählen, da die Functionen vierten Grades φ und ψ nur 5 Bedingungen zu genügen haben. Wir nehmen an die Coefficienten der beiden höchsten Potenzen von φ seien Null; φ habe also die Form:

$$(14)\qquad \varphi(x) = x^2 + \lambda x + \lambda_1.$$

Die Bedingungen

$$\sum_1^5 \varphi(x_k) = 0, \quad \sum_1^5 \varphi^2(x_k) = 0$$

liefern unmittelbar numerische Bestimmungsgleichungen für λ und λ_1.

Denn bezeichnen wir mit s_ν die Potenzsummen der Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, dann führt die erste Bedingung auf die Gleichung:

$$s_2 + \lambda s_1 + 5\lambda_1 = 0$$

und die zweite Bedingung führt auf:

$$s_4 + 2\lambda s_3 + (\lambda^2 + 2\lambda_1)s_2 + 2\lambda\lambda_1 s_1 + 5\lambda_1^2 = 0$$

eine Gleichung, die sich noch mit Hülfe der ersten vereinfachen lässt. Ersetzen wir hierin die Potenzsummen durch die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung, so hat man zwei numerische Gleichungen für λ und λ_1; welche Grössen sonach vollständig bestimmt sind.

2. Berechnung der Form $\psi(x_k)$. Um die Coefficienten dieser Function zu ermitteln, berechnen wir zuvörderst zwei Grössen $\Theta(x)$ und $\mathsf{H}(x)$, welche nur zweien von den drei Bedingungen genügen, denen ψ unterworfen ist, nämlich den beiden Bedingungen:

$$\sum \Theta = 0, \qquad \sum \Theta\varphi = 0$$

resp.

$$\sum \mathsf{H} = 0, \qquad \sum \mathsf{H}\varphi = 0.$$

Man kann alsdann wiederum in jeder der beiden Formen vierten Grades zwei der Coefficienten gleich Null setzen, also etwa a priori annehmen, dass

(15) $$\Theta(x) = x^3 + \mu x + \mu_1$$

und

(16) $$\mathsf{H}(x) = x^4 + \nu x + \nu_1.$$

Für die Coefficienten μ und ν erhält man sonach die Relationen:

$$s_3 + \mu s_1 + 5\mu_1 = 0,$$
$$s_5 + \lambda s_4 + (\lambda_1 + \mu)s_3 + (\lambda\mu + \mu_1)s_2 + (\lambda_1\mu + \lambda\mu_1)s_1 + 5\lambda_1\mu_1 = 0,$$
$$s_4 + \nu s_1 + 5\nu_1 = 0,$$
$$s_6 + \lambda s_5 + \lambda s_4 + \nu s_3 + (\lambda\nu + \nu_1)s_2 + (\lambda_1\nu + \lambda\nu_1)s_1 + 5\lambda_1\nu_1 = 0.$$

Aus diesen vier linearen Gleichungen bestimmen sich wiederum eindeutig die vier Grössen $\mu\,\mu_1\,\nu\,\nu_1$.

Die Function ψ setzen wir nun aus den beiden Formen Θ und H der Art zusammen dass:

$$\psi = \mathsf{H} + \varrho\Theta$$

wobei nun ϱ durch die dritte Bedingung:

(17) $$\sum \psi^2(x_k) = \varrho^2 \sum \Theta^2 + 2\varrho \sum \Phi\mathsf{H} + \sum \mathsf{H}^2 = 0$$

vollständig bestimmt ist. ψ ist als dann von der Form:

(18) $$\psi(x) = x^4 + \varrho x^3 + \varrho_1 x + \varrho_2.$$

Anmerkung 1. In der Gleichung (13) für den Parameter Z traten auch die Summen $\Sigma\varphi^3$ und $\Sigma\varphi^2\psi$ auf. Wir wollen die Werthe dieser Grössen berechnen. Bezeichnen wir $\Sigma\varphi^3$ mit L, so ist

$$\sum(\varphi-\lambda_1)^3 = L - 5\lambda_1^3,$$

da ja rechts die beiden mittleren Glieder wegen der Gleichungen (I), § 1 verschwinden. Substituiren wir links für φ seinen Werth aus (14), so kommt für die linke Seite:

$$\sum(\varphi-\lambda_1)^3 = \sum x^3(x+\lambda)^3 = s_6 + 3\lambda s_5 + 3\lambda^2 s_4 + \lambda^3 s_3$$

und demnach:

$$L = s_6 + 3\lambda s_5 + 3\lambda^2 s_4 + \lambda^3 s_3 + 5\lambda_1^3.$$

Setzen wir ebenso $\Sigma\varphi^2\psi = M$, dann ist wiederum wegen der Gleichungen § 1, (I):

$$\sum(\varphi-\lambda_1)^2(\psi-\varrho_2) = M - 5\lambda_1^2\varrho_2.$$

Anderntheils ist aber, wenn wir φ und ψ durch ihre in (14) und (18) gegebenen Werthe ersetzen,

$$\sum(\varphi-\lambda_1)^2(\psi-\varrho_2) = \sum x^3(x-\lambda)^2(x^3+\varrho x^2+\varrho_1).$$

Demnach wird

$$M = s_8 + (2\lambda+\varrho)s_7 + (2\lambda\varrho+\lambda^2)s_6 + (\varrho_1+\lambda^2\varrho)s_5 + 2\lambda\varrho_1 s_4 + \lambda^2\varrho_1 s_3 + 5\lambda_1^2\varrho_1.$$

Anmerkung 2. Die Discriminante der Gleichung (17) hat die Eigenschaft Factor der Discriminante Δ der ursprünglichen Gleichung $f = 0$ zu sein. Dies lässt sich auf folgende Weise zeigen. Wir bilden die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(x_1) & x_1 - \frac{1}{5}s_1 & \Theta(x_1) & \mathrm{H}(x_1) \\ 1 & \varphi(x_2) & x_2 - \frac{1}{5}s_1 & \Theta(x_2) & \mathrm{H}(x_2) \\ 1 & \varphi(x_3) & x_3 - \frac{1}{5}s_1 & \Theta(x_3) & \mathrm{H}(x_3) \\ 1 & \varphi(x_4) & x_4 - \frac{1}{5}s_1 & \Theta(x_4) & \mathrm{H}(x_4) \\ 1 & \varphi(x_5) & x_5 - \frac{1}{5}s_1 & \Theta(x_5) & \mathrm{H}(x_5) \end{vmatrix}.$$

Dieselbe besitzt den Werth $\sqrt{\Delta}$, wenn wir mit Δ das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen $\Pi(x_k-x_i)^2$ bezeichnen. Hiervon überzeugt man sich, wenn man

1) die erste Colonne der Reihe nach mit $\lambda_1, -\frac{1}{5}s_1, \mu_1, \nu_1$ multiplicirt und von der zweiten, dritten, vierten, fünften Colonne subtrahirt, sodann
2) die hiedurch umgestaltete 3te Colonne der Reihe nach mit λ, μ, ν multiplicirt und sie von der zweiten, vierten und fünften Colonne subtrahirt.

Das Resultat dieser Operationen liefert nach Vertauschung der zweiten und dritten Colonne die bekannte Determinante:

$$\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_5 & x_5^2 & \dots & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Quadriren wir nun nach dem Productsatze für Determinanten die Determinante D, so erhalten wir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)\varphi(x) & 0 & 0 \\ 0 & \sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)\varphi(x) & \sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)^2 & \sum\left(x-\frac{1}{5}\right)\Theta(x) & \sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)\mathrm{H}(x) \\ 0 & 0 & \sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)\Theta(x) & \sum\Theta^2(x) & \sum\Theta(x)\,\mathrm{H}(x) \\ 0 & 0 & \sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)\mathrm{H}(x) & \sum\Theta(x)\mathrm{H}(x) & \sum\mathrm{H}^2(x) \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante reducirt sich aber auf:

$$\Delta = -5\left\{\sum\left(x-\frac{1}{5}s_1\right)\varphi(x)\right\}^2 \begin{vmatrix} \sum\Theta^2(x), & \sum\Theta(x)\,\mathrm{H}(x) \\ \sum\Theta(x)\,\mathrm{H}(x), & \sum\mathrm{H}^2(x) \end{vmatrix}$$

wobei der Determinantenfactor rechts gerade die Discriminante der quadratischen Form:

$$\varrho^2\sum\Theta^2(x) + 2\varrho\sum\Theta(x)\,\mathrm{H}(x) + \sum\mathrm{H}^2(x)$$

darstellt, wie wir oben behauptet haben.

3. Berechnung der Coefficienten des Kegelschnittes $K(x_k)$, § 1, (2).

Das Verfahren zur Bildung der Kegelschnittsgleichung § 1, (2).

$$K(x_k) = c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\psi + c_{22}\psi^2 + c_1\varphi + c_2\psi + c_3$$

haben wir bereits am Beginne dieser Untersuchung mitgetheilt. Es erübrigt nur die Determinante des Systems der dort angeführten neun Gleichungen in unserem Falle wirklich aufzustellen.

Man erhält:

$$K(x_k) = \begin{vmatrix} 1, & 2\varrho, & \varrho^2, & 2\varrho_1, & 2(\varrho_2+\varrho\varrho_1), & 2\varrho\varrho_2, & \varrho_1^2, & 2\varrho_1\varrho_2, & \varrho_2^2-\psi^2 \\ 0, & 0, & 1, & \lambda+\varrho, & \lambda_1+\lambda\varrho, & \lambda_1\varrho+\varrho_1, & \lambda\varrho_1+\varrho_2, & \lambda_1\varrho_1+\lambda\varrho_2, & \lambda_1\varrho_1-\varphi\psi \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 2\lambda, & \lambda^2+2\lambda_1, & 2\lambda\lambda_1, & \lambda_1^2-\varphi^2 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & \varrho, & 0, & \varrho_1, & \varrho_2-\psi \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & \lambda, & \lambda_1-\varphi \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Da in unserem Falle $c_3 = 0$ ist, so kann man in der letzten Colonne alle Grössen ausgenommen $\varphi^2, \psi^2, \varphi, \psi, \varphi\psi$, gleich Null setzen. Die Minoren der so vereinfachten Elemente der letzten Colonne sind direct die 5 Coefficienten des Kegelschnittes $K(x_k)$. Nach Einführung der Werthe dieser Coefficienten, sowie der Werthe von L und M in Gleichung (13) ist der Parameter Z, und damit die Brioschi'sche Normalform der Gleichung eindeutig bestimmt.

4. **Berechnung der Wurzeln x_k von $f=0$ aus den Wurzeln y_k der Brioschi'schen Form.**

Sobald die Brioschi'sche Normalform der Gleichung $f=0$ gelöst ist, erhalten wir vermöge der Gleichung (7) unmittelbar zu jeder der 5 Wurzeln y_k einen Functionswerth φ_k von $\varphi(x)$. Um hieraus die Wurzeln x_k zu berechnen, ersetzen wir in

$$x^2 + \lambda x + \lambda_1 - \varphi_2 = 0 \qquad \text{(vergl. (14))}$$

die Grösse x durch $z - \frac{\lambda}{2}$. Diese Gleichung geht dann über in

$$z^2 = \varphi_k + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda_1. \tag{19}$$

Transformiren wir ebenso die Gleichung $f(x) = 0$ in

$$f\left(z - \frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

und entwickeln diese Gleichung nach Potenzen von z, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 = {} & z^5 + z^4\left\{-\frac{5}{2}\lambda + a_1\right\} \\ & + z^3\left\{\frac{5}{2}\lambda^2 - 2\lambda a_1 + a_2\right\} \\ & + z^2\left\{-\frac{5}{4}\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 a_1 - \frac{3}{2}\lambda a_2 + a_3\right\} \\ & + z\left\{\frac{5}{16}\lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^3 a_1 + \frac{3}{4}\lambda^2 a_1 - \lambda a_3 + a_4\right\} \\ & + \left\{-\frac{1}{32}\lambda^5 + \frac{1}{16}\lambda^4 a_1 - \frac{1}{8}\lambda^3 a_2 + \frac{1}{4}\lambda^2 a_3 - \frac{1}{2}\lambda a_4 + a_5\right\} \\ = {} & z\left\{z^4 + A_2 z^2 + A_4\right\} + \left\{A_1 z^4 + A_2 z^2 + A_5\right\}. \end{aligned}$$

In den Klammern ersetzen wir die geraden Potenzen von z durch den sich aus Gleichung (19) ergebenden Werth und erhalten sonach:

$$(20) \quad z_k = x_k + \frac{\lambda}{2} = - \frac{A_1\left(\varphi_k + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda_1\right)^2 + A_3\left(\varphi_k + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda_1\right) + A_5}{\left(\varphi_k + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda_1\right)^2 + A_2\left(\varphi_k + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda_1\right) + A_4}.$$

Vermöge dieser Gleichung ergiebt sich zu jeder Wurzel der Brioschi'schen Normalform eindeutig eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, und die Aufgabe, die Gleichung $f(x) = 0$ aufzulösen, ist hiermit erledigt. —

§ 3.

Invariantentheoretische Bemerkungen.

Sind φ und ψ wieder zwei beliebige rationale und ganze Functionen vierten Grades einer Wurzel der Gleichung fünften Grades $f(x) = 0$, welche den in § 1, (I) aufgestellten Bedingungen genügen, so wird für jede lineare Combination

$$(1) \qquad z = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$$

stets auch

$$(2) \qquad \sum_1^5 z = 0, \qquad \sum_1^5 z^2 = 0$$

sein. In Folge dessen werden in jeder Gleichung fünften Grades, deren Wurzeln z_ν aus (1) entstehen, wenn man den Variabeln λ_1 und λ_2 feste Werthe beilegt und der Reihe nach x_1 durch x_2, x_3, x_4, x_5 in φ und ψ ersetzt, die Coefficienten von z^4 und z^3 verschwinden, d. h. diese Gleichung 5^ten^ Grades wird nach Klein eine *Hauptgleichung* der gegebenen Gleichung $f = 0$ sein.

Lassen wir die Variabeln λ_1 und λ_2 unbestimmt, so gehören zu jeder Gleichung 5^ten^ Grades eine unendliche Menge von Hauptgleichungen, deren Coefficienten die beiden Variabeln λ_1 und λ_2 enthalten. Führt man in diesen Hauptgleichungen an Stelle der Coefficienten die Potenzsummen der Wurzeln ein, so reducirt sich wegen der Gleichungen (2) der Coefficient von z^2 bis auf numerische Grössen auf:

$$P = \sum_1^5 (\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi)^3,$$

der Coefficient von z auf:

$$Q = \sum_1^5 (\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi)^4$$

und endlich das letzte Glied auf:

$$R = \sum_1^5 (\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi)^5 = -5 \prod_1^5 (\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi).$$

Diese 3 Formen, von denen die erste cubisch, die zweite biquadratisch, die dritte vom 5ten Grade in λ ist, stehen zu einander, wie wir alsbald sehen werden, in covariantem Verhältniss, und zwar sind die beiden ersten geradezu Covarianten der Form R.

Betrachten wir

$$\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi = z$$

als eine *bilineare* Form von λ_1, λ_2 und φ, ψ, so werden durch jede lineare Transformation von φ und ψ, die Variabeln λ_1 und λ_2 contragredient transformirt. Nun hatten wir in der That in § (1) φ und ψ einer linearen Transformation unterworfen (vergl. § 1, (7) und (8), indem wir an Stelle dieser Grössen die Variabeln $\frac{1}{y-1}$ und $\frac{1}{y+1}$ einführten. Wenn wir nun festsetzen dass

$$\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi = \frac{\mu_1}{y-1} + \frac{\mu_2}{y+1}$$

sein möge, dann sind zugleich die Grössen μ_1 und μ_2 als die transformirten Grössen von λ_1 und λ_2 bestimmt.

Durch diese Transformation gehen aber P, Q und R über in:

$$P = \sum_1^5 \left(\frac{\mu_1}{y-1} + \frac{\mu_2}{y+1}\right)^3 = \sum \frac{\mu_1^3}{(y-1)^3} + \sum \frac{\mu_2^3}{(y+1)^3},$$

da die mittleren Glieder rechts wieder wegen der Relationen § 1 (II) verschwinden, und in

$$Q = \sum_1^5 \left(\frac{\mu_1}{y-1} + \frac{\mu_2}{y+1}\right)^4$$

$$R = \sum_1^5 \left(\frac{\mu_1}{y-1} + \frac{\mu_2}{y+1}\right)^5 = -5 \prod_1^5 \left(\frac{\mu_1}{y-1} + \frac{\mu_2}{y+1}\right).$$

Die letzte Form, gleich Null gesetzt ist wiederum eine Gleichung 5ten Grades in $\frac{\mu_1}{\mu_2}$; sie verschwindet offenbar, wenn

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = -\frac{y-1}{y+1}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Wurzeln von $R = 0$ durch eine lineare Transformation aus den Wurzeln der Brioschi'schen Form der gegebenen Gleichung fünften Grades hervorgehen. Nun ist bekanntlich der Differentialquotient der Brioschi'schen Form

$$u^5 - 10u^3 + 45u + Z\sqrt{3^5} = 0$$

ein volles Quadrat, nämlich gleich

$$(u^2 - 3)^2.$$

Hieraus schloss Herr Moosbacher, dass die Invariante B dieser Form 5ten Grades verschwindet. Demnach ist für die Form R, welche durch

lineare Transformation aus der Brioschi'schen Form hervorgeht, die Invariante B ebenfalls gleich Null. Dann besitzt aber, da einer Form fünften Grades überhaupt nur drei unabhängige Invarianten zukommen, R nur mehr deren zwei, und demnach nur eine einzige *absolute* Invariante. Dieselbe muss sich rational durch den Parameter Z der Brioschi'schen Form ausdrücken lassen, und demnach kann Z selbst als absolute Invariante von R angesehen werden.

Ebenso sind die Coefficienten aller Covarianten der Form R Functionen von Z. Aus zwei *linearen* Covarianten von R lassen sich μ_1 und μ_2 in Function von Z berechnen. Demnach sind μ_1 und μ_2 selbst Covarianten von R, und da die beiden Formen P und Q Functionen von μ_1 und μ_2 sind, so sind auch P und Q Covarianten von R.

Insbesondere ist die Hesse'sche Form von P bis auf einen Proportionalitätsfactor gleich dem Producte $\mu_1\,\mu_2$. Diese Eigenschaft kann man ebenfalls benützen μ_1 und μ_2 zu definiren und von der gegebenen Gleichung auf die Brioschi'sche Form zu gelangen (vgl. Liouville'sches Journal 1885, Seite 455).

Alle simultanen Co- und Invarianten von P, Q und R sind Covarianten von R. Die linearen unter ihnen liefern *Normalformen* der gegebenen Gleichung fünften Grades.

Erlangen, im Sommer 1886.

Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder.

Von

Edmund Hess in Marburg.

Die Zahl und Beschaffenheit derjenigen Fälle, in welchen zwei Dreiecke in einer Ebene auf mehr als eine Art in perspectiver Lage sein können, ist zuerst von Rosanes*) und H. Schröter**), von dem ersteren auf analytischem, von dem zweiten auf synthetischem Wege festgestellt und untersucht worden. Wesentlich dieselben Resultate hat später Vályi***) auf analytischem Wege theilweise in einfacherer Form erhalten, indem er eines der beiden Dreiecke zum Coordinatendreieck annahm und weiterhin†) auch die den mehrfach collinearen Dreiecken zugehörigen Kegelschnitte betrachtet.

In Beziehung auf Tetraeder, welche auf mehr als eine Art perspectiv liegen, ist besonders der Fall zweier vierfach perspectiven Tetraeder, welcher ein sogenanntes System dreier Tetraeder in *desmischer Lage* ergiebt, zuerst von Stéphanos††) in Betracht gezogen, sodann von Schröter,†††) Reye,†††) Vietor†††) u. A. bei Behandlung besonderer Probleme der Raumgeometrie genauer untersucht werden.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist einmal der, die für mehrfach perspective Dreiecke und Tetraeder geltenden Lagenbeziehungen im Zusammenhange zu entwickeln und möglichst zu vervollständigen, dann aber auch der, auf besonders interessante *Specialfälle* für die Lage von mehrfach perspectiven Dreiecken und Tetraedern hinzuweisen und einige derselben genauer zu verfolgen.

*) J. Rosanes. De polarium reciprocarum theoria observationes. Dissert. Vratisl. 1865. — Math. Ann. Bd. 2, S. 549—552.

**) Math. Ann. Bd. 2, S. 553—562.

***) Archiv f. Math. u. Phys. Bd. 70, S. 105—110.

†) Ebenda IIte Reihe Bd. 2, S. 320—324.

††) Bulletin de sciences math. et. astr. Sér. II, t. III, p. 429—456.

†††) Siehe die vollständigen Citate diesen Arbeiten auf Seite 241.

Im *ersten* Theile der Arbeit gebe ich zunächst die wichtigsten Beziehungen für zwei perspective *Dreiecke*, sowie der Reihe nach die analytische Herleitung und Untersuchung der möglichen Fälle für die Lage mehrfach perspectiver Dreiecke. Von den behandelten Specialfällen für die Lage von zwei auf *zwei*, *drei* und *vier* Arten perspectiven Dreiecken ist hauptsächlich ein Specialfall von Interesse, welcher sich sowohl aus der Figur zweier *drei*fach, als auch zweier *vier*fach perspectiven Dreiecke erhalten lässt. Es ist dies der in § 6 genauer behandelte Fall der Figur eines sogenannten *zehnfach* Brianchon'schen Sechsecks, welcher bereits von Clebsch*), F. Klein**) und mir***) gelegentlich anderer Betrachtungen untersucht worden ist. U. A. liefert die Uebertragung der Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks auf eine Kugelfläche eine sphärische Figur, welche mit den regulären Netzen collinear verwandt ist und somit die Eckpunkte aller regulären und gleicheckigen Polyeder ergiebt.

In dem *zweiten* Theile behandele ich analog unter Anwendung der analytischen Methode die Lagenbeziehungen zweier perspectiven *Tetraeder* und sodann diejenigen Fälle, in welchen zwei Tetraeder auf mehr als eine Art perspectiv liegen können. Es ergeben sich hier nur zwei Fälle, nämlich der meines Wissens noch fast gar nicht behandelte Fall von zwei *zweifach* und derjenige von *vierfach* perspectiv liegenden Tetraedern.†)

Bei der Untersuchung der durch derartige mehrfach perspective Tetraeder bestimmten Figuren habe ich hauptsächlich die Eigenschaften der betreffenden vollständigen Raumfiguren, sowie die Lagenbeziehungen der den mehrfach perspectiven Tetraedern zugehörigen Flächen zweiter Ordnung ins Auge gefasst.

Im § 11 werden schliesslich noch einige der wichtigsten Eigenschaften einer bemerkenswerthen Raumfigur entwickelt, bei welcher in einfacher Weise die Beziehungen für ein System dreier desmischer Tetraeder, sowie für ein zehnfach Brianchon'sches Seckseck zur Anwendung kommen. Diese Raumfigur bietet dadurch noch ein besonderes Interesse, dass ihre Uebertragung auf einen dreidimensionalen *sphärischen* Raum in einem speciellen Falle diejenigen regulären sphärischen Zellgewebe liefert, welchen die sämmtlichen regulären linear begrenzten Vielräume des vierdimensionalen Raumes ein- oder umgeschrieben werden können.

---

*) Math. Ann. Bd. 4, S. 284 u. S. 336 flg.

**) Math. Ann. Bd. 12, S. 531 flg.

***) E. Hess. Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. Leipzig, B. G. Teubner 1883. S. 422—424.

†) Vgl. Vályi. Zur Lehre vom perspectiven Tetraeder. Archiv f. Math. u. Phys. IIte Reihe Bd. 3, S. 441—445.

Erster Theil.

Mehrfach perspective Dreiecke.

§ 1.

Relationen für einfach perspective Dreiecke.

1) Zwei Dreiecke heissen *perspectiv liegend* oder kurz *perspectiv*, wenn die drei Verbindungslinien je zweier Ecken sich in einem Punkte, dem *Centrum* der *Perspectivität* schneiden; die Dreiecke sind dann nach dem Satze von Desargues im Allgemeinen*) auch *collinear*, d. h. die drei Durchschnittspunkte je zweier entsprechender Seiten liegen auf einer Geraden, der *Collineationsaxe*. Ist die erste Beziehung vorhanden, so folgt die zweite und umgekehrt.

2) Wir wollen die Ecken des ersten Dreiecks Δ durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$, die des zweiten Δ' durch $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'$, die Seiten beider Dreiecke durch a_1, a_2, a_3 und a_1', a_2', a_3', die Perspectivität bez. Collinearität durch die Symbole:

$$(1)\qquad \begin{array}{c} \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3 \\ \underline{\mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2'\ \mathfrak{a}_3'} \\ \mathfrak{c}_1 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad (1\alpha)\qquad \begin{array}{c} a_1\ a_2\ a_3 \\ \underline{a_1'\ a_2'\ a_3'} \\ c_1 \end{array}$$

oder ganz kurz (nach Schröter) durch das Symbol:

$$(1\beta)\qquad \begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ \underline{1'\ 2'\ 3'} \\ \mathfrak{c}_1 - c_1 \end{array}$$

bezeichnen, worin $\mathfrak{c}_1$ das Centrum, c_1 die Axe bedeutet und die entsprechenden Ecken bez. Seiten untereinander stehen.

Wird das erste Dreieck Δ als Fundamentaldreieck eines trimetrischen Coordinatensystems, die Collineationsaxe c_1 als Einheitslinie gewählt, so sind die analytischen Ausdrücke für Seiten, Ecken, Axe und Centrum die folgenden, wobei die hinter die deutschen oder lateinischen Buchstaben — das Zeichen für einen Punkt oder eine Gerade — gesetzten Grössen die trimetrischen Punkt- oder Liniencoordinaten bedeuten:

$$(2\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 \ldots 1\ 0\ 0 \\ a_2 \ldots 0\ 1\ 0 \\ a_3 \ldots 0\ 0\ 1 \end{array}\right. \quad \left|\quad \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 \ldots 1\ 0\ 0 \\ \mathfrak{a}_2 \ldots 0\ 1\ 0 \\ \mathfrak{a}_3 \ldots 0\ 0\ 1 \end{array}\right.$$

$$(2\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1' \ldots u_1\ \ 1\ \ 1 \\ a_2' \ldots 1\ \ u_2\ \ 1 \\ a_3' \ldots 1\ \ 1\ \ u_3 \end{array}\right. \quad \left|\quad \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1' \ldots U_{11}\ \ U_{12}\ \ U_{13} \\ \mathfrak{a}_2' \ldots U_{21}\ \ U_{22}\ \ U_{23} \\ \mathfrak{a}_3' \ldots U_{31}\ \ U_{32}\ \ U_{33} \end{array}\right.$$

---

*) D. h. wenn keines der beiden Dreiecke degenerirt, indem entweder die drei Eckpunkte in einem Punkt oder die drei Seiten in einer Geraden zusammenfallen.

$$(2\gamma)\qquad \mathfrak{c}_1 \ldots |a_1 a_1',\ a_2 a_2',\ a_3 a_3'| \ldots 1\ 1\ 1,$$

$$(2\delta)\qquad \mathfrak{c}_1 \cdots |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1',\ \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2',\ \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_3'| \cdots \frac{1}{U_{23}}\ \frac{1}{U_{31}}\ \frac{1}{U_{12}}.$$

Die Grössen $U_{ik} = U_{ki}$ sind die ersten Minoren der Determinante:

$$(3)\qquad U = \begin{vmatrix} u_1 & 1 & 1 \\ 1 & u_2 & 1 \\ 1 & 1 & u_3 \end{vmatrix} = u_1 u_2 u_3 - (u_1 + u_2 + u_3) + 2,$$

nämlich:

$$(3\alpha)\qquad U_{r,r} = u_i u_k - 1, \qquad U_{ik} = U_{ki} = 1 - u_r,$$
$$(r, i, k = 1, 2, 3;\ i < k).$$

Ausser den sechs Eckpunkten der beiden Dreiecke erhält man noch neun Schnittpunkte $\mathfrak{b}_{ik}$ der Seiten und entsprechend ausser den sechs Seiten noch neun Verbindungslinien b_{ik} der Ecken beider Dreiecke mit einander; die analytischen Ausdrücke für dieselben sind folgende:

$$(4\alpha)\qquad \begin{cases} \mathfrak{b}_{11} \cdots (a_1 a_1') \cdots & 0 \quad -1 \quad 1 \\ \mathfrak{b}_{22} \cdots (a_2 a_2') \cdots & 1 \quad 0 \quad -1 \\ \mathfrak{b}_{33} \cdots (a_3 a_3') \cdots & -1 \quad 1 \quad 0 \\ \mathfrak{b}_{12} \cdots (a_1 a_2') \cdots & 0 \quad -1 \quad u_2 \\ \mathfrak{b}_{23} \cdots (a_2 a_3') \cdots & u_3 \quad 0 \quad -1 \\ \mathfrak{b}_{31} \cdots (a_3 a_1') \cdots & -1 \quad u_1 \quad 0 \\ \mathfrak{b}_{13} \cdots (a_1 a_3') \cdots & 0 \quad u_3 \quad -1 \\ \mathfrak{b}_{21} \cdots (a_2 a_1') \cdots & -1 \quad 0 \quad u_1 \\ \mathfrak{b}_{32} \cdots (a_3 a_2') \cdots & u_2 \quad -1 \quad 0 \end{cases}$$

$$(4\beta)\qquad \begin{cases} b_{11} \cdots |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1'| \cdots & 0 \quad -U_{13} \quad U_{12} \\ b_{22} \cdots |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2'| \cdots & U_{23} \quad 0 \quad -U_{21} \\ b_{33} \cdots |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_3'| \cdots & -U_{32} \quad U_{31} \quad 0 \\ b_{21} \cdots |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1'| \cdots & -U_{13} \quad 0 \quad U_{11} \\ b_{32} \cdots |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_2'| \cdots & U_{22} \quad -U_{21} \quad 0 \\ b_{13} \cdots |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3'| \cdots & 0 \quad U_{33} \quad -U_{32} \\ b_{31} \cdots |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1'| \cdots & -U_{12} \quad U_{11} \quad 0 \\ b_{12} \cdots |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2'| \cdots & 0 \quad -U_{23} \quad U_{22} \\ b_{23} \cdots |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3'| \cdots & U_{33} \quad 0 \quad -U_{31}. \end{cases}$$

3) Für die übrigen Schnittpunkte der 15 Geraden a_r, a_r', b_{ik}, sowie für die übrigen Verbindungslinien der 15 Punkte $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_r'$, $\mathfrak{b}_{ik}$ lassen sich die analytischen Ausdrücke leicht aufstellen; es möge genügen,

bei jeder Gruppe nur für einen Punkt bez. eine Gerade die Coordinaten anzugeben, da sich dieselben für die beiden anderen Elemente einfach durch cyklische Vertauschung erhalten lassen.

$$
(5\alpha)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\mathfrak{e}_1 \cdots (b_{11} b_{23}) \cdots & \frac{U_{13}}{U_{33}} & \frac{U_{12}}{U_{13}} & 1 \\
\mathfrak{e}_1' \cdots (b_{11} b_{32}) \cdots & \frac{U_{12}}{U_{22}} & 1 & \frac{U_{13}}{U_{12}} \\
\mathfrak{f}_1 \cdots (b_{31} b_{12}) \cdots & \frac{U_{11}}{U_{12}} & 1 & \frac{U_{23}}{U_{22}} \\
\mathfrak{f}_1' \cdots (b_{13} b_{21}) \cdots & \frac{U_{11}}{U_{13}} & \frac{U_{23}}{U_{33}} & 1 \\
\mathfrak{g}_1 \cdots (b_{23} b_{32}) \cdots & 1 & \frac{U_{22}}{U_{12}} & \frac{U_{23}}{U_{13}} \\
\mathfrak{h}_{11} \cdots (a_1\ b_{11}) \cdots & 0 & U_{12} & U_{13} \\
\mathfrak{h}_{12} \cdots (a_1\ b_{12}) \cdots & 0 & U_{22} & U_{23} \\
\mathfrak{h}_{13} \cdots (a_1\ b_{13}) \cdots & 0 & U_{32} & U_{33} \\
\mathfrak{h}_{11}' \cdots (a_1' b_{11}) \cdots & -\frac{U}{u_1} + U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
\mathfrak{h}_{21}' \cdots (a_1' b_{21}) \cdots & U_{11} & -U + U_{12} & U_{13} \\
\mathfrak{h}_{31}' \cdots (a_1' b_{31}) \cdots & U_{11} & U_{12} & -U + U_{13}
\end{array}\right.
$$

$$
(5\beta)\quad \left\{\begin{array}{llll}
e_1' \cdots |\mathfrak{b}_{11} \mathfrak{b}_{32}| \cdots & \frac{1}{u_2} & 1 & 1 \\
e_1 \cdots |\mathfrak{b}_{11} \mathfrak{b}_{23}| \cdots & \frac{1}{u_3} & 1 & 1 \\
f_1' \cdots |\mathfrak{b}_{13} \mathfrak{b}_{21}| \cdots & u_1 & \frac{1}{u_3} & 1 \\
f_1 \cdots |\mathfrak{b}_{31} \mathfrak{b}_{12}| \cdots & u_1 & 1 & \frac{1}{u_2} \\
g_1 \cdots |\mathfrak{b}_{32} \mathfrak{b}_{23}| \cdots & 1 & u_2 & u_3 \\
h_{11}' \cdots |\mathfrak{a}_1' \mathfrak{b}_{11}| \cdots & -\frac{U}{U_{11}} + u_1 & 1 & 1 \\
h_{21}' \cdots |\mathfrak{a}_1' \mathfrak{b}_{21}| \cdots & u_1 & -\frac{U}{U_{12}} + 1 & 1 \\
h_{31}' \cdots |\mathfrak{a}_1' \mathfrak{b}_{31}| \cdots & u_1 & 1 & -\frac{U}{U_{13}} + 1 \\
h_{11} \cdots |\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_{11}| \cdots & 0 & 1 & 1 \\
h_{12} \cdots |\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_{12}| \cdots & 0 & u_2 & 1 \\
h_{13} \cdots |\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_{13}| \cdots & 0 & 1 & u_3 .
\end{array}\right.
$$

4) Wird das zweite Dreieck Δ' zum Coordinatendreieck gewählt, so ergiebt sich aus bekannten Transformationsformeln, dass den im nachfolgenden Schema (6) in der ersten (zweiten) Horizontalreihe

stehenden Punkten (Linien) nunmehr die Coordinaten der in der zweiten (ersten) Horizontalreihe stehenden Linien (Punkte) zukommen.

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_r & \mathfrak{a}_r' & \mathfrak{b}_{rr} & \mathfrak{b}_{ik} & \mathfrak{e}_r & \mathfrak{e}_r' & \mathfrak{f}_r & \mathfrak{f}_r' & \mathfrak{g}_r & \mathfrak{h}_{rr} & \mathfrak{h}_{ik} & \mathfrak{h}_{rr}' & \mathfrak{h}_{ik}' & \mathfrak{c}_1, \\ a_r' & a_r & b_{rr} & b_{ki} & e_r' & e_r & f_r' & f_r & g_r & h_{rr}' & h_{ki}' & h_{rr} & h_{ki} & c_1; \end{cases}$$

die untereinander stehenden Grössen entsprechen sich polarreciprok in Beziehung auf den Kegelschnitt:

$$(7)\qquad K_1 \equiv u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2 + u_3 x_3^2 + 2x_2 x_3 + 2x_3 x_1 + 2x_1 x_2 = 0,$$

für welchen also insbesondere die beiden einfach perspectiven Dreiecke Δ und Δ' polarreciprok sind und das Centrum $\mathfrak{c}_1 = (b_{11}\, b_{22}\, b_{33})$ der Pol zur Axe $c_1 = |\mathfrak{b}_{11}\, \mathfrak{b}_{22}\, \mathfrak{b}_{33}|$ als Polaren ist.

5) Mitunter ist es vortheilhaft, die charakteristische Eigenschaft der durch zwei perspective Dreiecke gebildeten Figur in folgender Weise*) auszudrücken:

Das durch die drei Ecken des einen Dreiecks Δ (oder Δ'), nämlich durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ (oder $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'$) und das Centrum $\mathfrak{c}_1$ gebildete vollständige Viereck $\mathfrak{V}$ (oder $\mathfrak{V}'$) hat zu dem durch die Seiten a_1', a_2', a_3' (oder a_1, a_2, a_3) des andern Dreiecks Δ' (oder Δ) gebildeten vollständigen Vierseit V' (oder V) eine solche Lage, dass je eine der sechs Seiten des Vierecks durch je eine der sechs Ecken des Vierseits hindurchgeht. Es sind nämlich folgende untereinanderstehende Elemente incident:

$$\text{für } \mathfrak{V} \text{ und } V'\colon \begin{cases} a_1 \\ \mathfrak{b}_{11} \end{cases}\!\!\left|\begin{matrix} b_{11} \\ \mathfrak{a}_1' \end{matrix}\right\|\begin{matrix} a_2 \\ \mathfrak{b}_{22} \end{matrix}\left|\begin{matrix} b_{22} \\ \mathfrak{a}_2' \end{matrix}\right\|\begin{matrix} a_3 \\ \mathfrak{b}_{33} \end{matrix}\left|\begin{matrix} b_{33} \\ \mathfrak{a}_3' \end{matrix}\right\|,$$

$$\text{für } \mathfrak{V}' \text{ und } V\colon \begin{cases} a_1' \\ \mathfrak{b}_{11} \end{cases}\!\!\left|\begin{matrix} b_{11} \\ \mathfrak{a}_1 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} a_2' \\ \mathfrak{b}_{22} \end{matrix}\left|\begin{matrix} b_{22} \\ \mathfrak{a}_2 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} a_3' \\ \mathfrak{b}_{33} \end{matrix}\left|\begin{matrix} b_{33} \\ \mathfrak{a}_3 \end{matrix}\right\|.$$

Die Diagonaldreiecke von $\mathfrak{V}$ und V', nämlich:

$$\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{h}_{11}\mathfrak{h}_{22}\mathfrak{h}_{33} \quad \text{und} \quad D_1' \ldots h_{11}' h_{22}' h_{33}'$$

und ebenso die von $\mathfrak{V}'$ und V, nämlich:

$$\mathfrak{D}_1' \ldots \mathfrak{h}_{11}'\mathfrak{h}_{22}'\mathfrak{h}_{33}' \quad \text{und} \quad D_1 \ldots h_{11} h_{22} h_{33}$$

sind Polardreiecke in Beziehung auf den Kegelschnitt K_1. Ferner liegen die beiden Diagonaldreiecke $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_1'$ und ebenso die beiden D_1' und D_1 zu einander perspectiv und zwar so, dass für beide Paare das Centrum $\mathfrak{c}_1$ und die Axe c_1 *dieselben* sind, wie für die beiden Dreiecke Δ und Δ'.

Diese letztere Beziehung folgt sofort aus den obigen Werthen für die Coordinaten von $\mathfrak{h}_{rr}$, h_{rr}', $\mathfrak{h}_{rr}'$ und h_{rr} (5α) und (5β), sowie aus den folgenden Werthen:

$$(5\gamma)\qquad \begin{cases} H_{11} \cdots |\mathfrak{h}_{22}\, \mathfrak{h}_{33}| \cdots - U_{23} \quad U_{13} \quad U_{12} \\ H_{11}' \cdots |\mathfrak{h}_{22}'\, \mathfrak{h}_{33}'| \cdots \quad U_{23}+1 \quad u_2 \quad u_3, \end{cases}$$

*) Vgl. M. Pasch, Math. Ann. Bd. XXVI, S. 211 ff.

$$(5\delta)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}'_{11} \cdots (h'_{22}\, h'_{33}) \cdots U + U_{12}\, U_{13} \quad U_{13}\, U_{22} \quad U_{12}\, U_{33} \\ \mathfrak{H}_{11} \cdots (h_{22}\, h_{33}) \cdots \quad -1 \quad 1 \quad 1. \end{cases}$$

6) Die Lagenbeziehungen bei zwei perspectiven Dreiecken, sowie die Anwendung derselben insbesondere zur Erforschung der vollständigen Figur eines Pascal'schen Sechsecks sind bereits der Gegenstand sehr zahlreicher und eingehender Untersuchungen gewesen.*) Wir wollen uns mit Rücksicht auf weiter folgende Anwendungen hier darauf beschränken, nur einige Theoreme zu erwähnen und unter Benutzung der oben angeführten Ausdrücke analytisch nachzuweisen.

I) Zufolge eines von Veronese**) bewiesenen Satzes ist das Dreieck $\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2\, \mathfrak{g}_3$ (vgl. (5α)) sowohl zu $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3$, als zu $\mathfrak{a}_1'\, \mathfrak{a}_2'\, \mathfrak{a}_3'$ perspectiv und zwar so, dass die Axe c_1 dieselbe ist, die drei Centra $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1^{(1)}$, $\mathfrak{c}_1^{(2)}$ auf einer Geraden l_1 liegen. Analog ist das Dreieck $g_1\, g_2\, g_3$ (vgl. (5β)) zu jedem der beiden Dreiecke $a_1'\, a_2'\, a_3$ und $a_1\, a_2\, a_3$ perspectiv und zwar so, dass das Centrum $\mathfrak{c}_1$ dasselbe ist, die drei Axen c_1, $c_1^{(1)}$, $c_1^{(2)}$ sich in einem Punkte $\mathfrak{l}_1$ schneiden. Die Richtigkeit dieser beiden sich polar entsprechenden Beziehungen ergiebt sich aus den nachfolgenden analytischen Ausdrücken:

$$(8\alpha)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 \;\cdots \quad \dfrac{1}{U_{23}} \quad \dfrac{1}{U_{31}} \quad \dfrac{1}{U_{12}} \\ \mathfrak{c}_1^{(1)} \cdots \; U_{11}\, U_{23} \quad U_{22}\, U_{31} \quad U_{33}\, U_{12} \\ \mathfrak{c}_1^{(2)} \cdots U - 2\, U_{12}\, U_{13} \quad U - 2\, U_{23}\, U_{21} \quad U - 2\, U_{31}\, U_{12} \\ \hline l_1 \ldots |\mathfrak{c}_1\, \mathfrak{c}_1^{(1)}\, \mathfrak{c}_1^{(2)}| \ldots U_{23}(u_2 - u_3) \quad U_{31}(u_3 - u_1) \quad U_{12}(u_1 - u_2) \end{cases}$$

$$(8\beta)\qquad \begin{cases} c_1 \;\ldots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ c_1^{(1)} \ldots u_1 + 1 \quad u_2 + 1 \quad u_3 + 1 \\ c_1^{(2)} \ldots \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\ \hline \mathfrak{l}_1 \ldots (c_1\, c_1^{(1)}\, c_1^{(2)}) \ldots u_2 - u_3 \quad u_3 - u_1 \quad u_1 - u_2. \end{cases}$$

II) Das Dreieck mit den Seiten m_1, m_2, m_3, wo $m_r = |\mathfrak{b}_{rr}\, \mathfrak{g}_r|$ ist, und sein Polardreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$, wo $\mathfrak{m}_r = (b_{rr}\, g_r)$ ist, sind perspectiv und zwar so, dass sowohl das Centrum $\mathfrak{c}_1$, als die Axe c_1 dieselbe ist, wie für die Dreiecke Δ und Δ_1.

Denn sind $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ die Eckpunkte des Dreiecks $m_1\, m_2\, m_3$ und M_1, M_2, M_3 die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{m}_1\, \mathfrak{m}_2\, \mathfrak{m}_3$, so folgt, dass durch $\mathfrak{M}_r$ die Gerade b_{rr} geht, welche $\mathfrak{m}_r$ enthält, und dass M_r den Punkt $\mathfrak{b}_{rr}$ enthält, durch welchen die Gerade m_r hindurchgeht. Die analytischen

*) Vgl. z. B. L. Wedekind. Lagenbeziehungen bei ebenen, perspectivischen Dreiecken. Math. Annalen, Bd. XVI, S. 209 ff.

**) Nuovi teoremi sull' Hexagrammum mysticum. Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie terza. Vol. 1. Roma 1877. — Teorema IV.

Ausdrücke, aus welchen diese Beziehung ebenfalls unmittelbar hervorgeht, sind:

$$(9\alpha)\quad \begin{cases} m_1 \cdots |\mathfrak{b}_{11}\, \mathfrak{g}_1| \cdots -\left(\frac{U_{22}}{U_{12}} + \frac{U_{33}}{U_{13}}\right) & 1 \qquad 1 \\ \mathfrak{M}_1 \cdots (m_2 m_3) \cdots - \frac{U}{U_{23}} + U_{11} & U_{12} \qquad U_{13} \end{cases}$$

$$(9\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{m}_1 \ldots (b_{11}\, g_1) \ldots 2u_2u_3 - (u_2 + u_3) & U_{12} \qquad U_{13} \\ M_1 \ldots |\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3| \ldots \quad 2u_1 - 1 & 1 \qquad 1\,. \end{cases}$$

Das Dreieck $\mathfrak{M}_1\, \mathfrak{M}_2\, \mathfrak{M}_3$ lässt sich auch als das Diagonaldreieck des Vierseits:

$$c_1\, G_1\, G_2\, G_3, \quad \text{wo} \quad G_r = |\mathfrak{g}_i\, \mathfrak{g}_k|$$

ist, auffassen. Diese vier Seiten sind die Collineationsaxen für die vier Paare perspectiver Dreiecke mit gemeinsamem Centrum $\mathfrak{c}_1$, zu welchen sich die sechs Eckpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$ anordnen lassen.*) Analog ist das Dreieck $M_1\, M_2\, M_3$ das Diagonaldreieck des Vierecks $\mathfrak{c}_1\, \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2\, \mathfrak{G}_3$, wo $\mathfrak{G}_r = (g_i\, g_k)$ ist; diese vier Eckpunkte sind die Centra für die vier Paare perspectiver Dreiecke mit gemeinsamer Axe c_1, zu welchen man die sechs Geraden a_1', a_2', a_3', a_1, a_2, a_3 anordnen kann.

III) Von weiteren Schnittpunkten und Verbindungsgeraden, welche sich aus der betrachteten Figur zweier perspectiven Dreiecke ergeben, sollen mit Rücksicht auf eine unten folgende besondere Anwendung noch folgende sechs Schnittpunkte aufgeführt werden:

$$(10)\quad \begin{cases} (e_2\, e_3') \cdots -\left(\frac{1}{u_1} + 1\right) & 1 & 1 \\ (e_2'\, e_3) \cdots \quad U_{11} & u_3 U_{13} & u_2 U_{12} \\ (e_2\, g_3) \cdots \quad \frac{U_{33}}{u_1} & U_{23} & U_{13} \\ (e_3'\, g_2) \cdots \quad \frac{U_{22}}{u_1} & U_{12} & U_{23} \\ (e_3\, g_2) \cdots \quad U_{11} & -(U_{11} + U_{23}) & u_2 U_{23} \\ (e_2'\, g_3) \cdots \quad U_{11} & u_3 U_{23} & -(U_{11} + U_{23})\,. \end{cases}$$

Die Gesammtzahl dieser Schnittpunkte beträgt (zufolge der cyklischen Vertauschung der Indices) 18; entsprechend erhält man 18 Verbindungsgerade.

IV) Die besonderen durch die Bedingung $U = 0$ bestimmten Fälle für die Lage zweier einfach perspectiven Dreiecke sind leicht zu erledigen; dieser Bedingung entspricht je nach der Deutung der analytischen Ausdrücke entweder der Fall, dass die drei Seiten des zweiten Dreiecks Δ' sich in einem Punkte schneiden oder derjenige, dass die Eckpunkte des ersten Dreiecks auf einer Geraden liegen.

*) Vgl. Wedekind a. a. O.

§ 2.

Zweifach perspective Dreiecke.

1) Sollen die beiden Dreiecke Δ und Δ' *zweifach* perspectiv sein, d. h. soll ausser der Beziehung:

$$(1\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 1'\ 2'\ 3' \\ \hline \mathfrak{c}_1 - c_1 \end{array}\right.$$

auch noch *eine* der drei Beziehungen:*)

$$(11\alpha)\left\{\begin{array}{l} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 1'\ 3'\ 2' \\ \hline \mathfrak{c}_{(1)} - c_{(1)} \end{array}\right., \qquad (11\beta)\left\{\begin{array}{l} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 3'\ 2'\ 1' \\ \hline \mathfrak{c}_{(2)} - c_{(2)} \end{array}\right., \qquad (11\gamma)\left\{\begin{array}{l} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 2'\ 1'\ 3' \\ \hline \mathfrak{c}_{(3)} - c_{(3)} \end{array}\right.,$$

wobei die Anordnung der Ecken (oder Seiten) des Dreiecks Δ' den *negativen* Permutationen der Indices $1', 2', 3'$ entspricht, stattfinden, so muss bez.

$$(12\alpha)\quad u_2 = u_3, \qquad (12\beta)\quad u_3 = u_1, \qquad (12\gamma)\quad u_1 = u_2$$

sein.

Denn für die *erste* Beziehung (11α) folgt, da

$$c_{(1)} = |\mathfrak{b}_{11}\mathfrak{b}_{23}\mathfrak{b}_{32}| \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_{(1)} = (b_{11}b_{32}b_{23})$$

sein muss, aus (vgl. (4α) und (4β)):

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ u_3 & 0 & -1 \\ u_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder aus:

$$\begin{vmatrix} 0 & -U_{13} & U_{12} \\ U_{22} & -U_{12} & 0 \\ U_{33} & 0 & -U_{13} \end{vmatrix} = U.(u_2 - u_3) = 0$$

die Bedingung $u_2 - u_3 = 0$. Hierbei ist $U \gtrless 0$ vorausgesetzt; auf den Ausnahmefall $U = 0$ (vgl. § 1, IV) wird unten unter V hingewiesen werden. Analog folgen für die beiden anderen Beziehungen (11β) und (11γ) aus

$$c_{(2)} = |\mathfrak{b}_{13}\,\mathfrak{b}_{22}\,\mathfrak{b}_{31}| \quad \text{oder aus} \quad \mathfrak{c}_{(2)} = (b_{31}\,b_{22}\,b_{13})$$

und aus

$$c_{(3)} = |\mathfrak{b}_{12}\,\mathfrak{b}_{21}\,\mathfrak{b}_{33}| \quad \text{oder aus} \quad \mathfrak{c}_{(3)} = (b_{21}\,b_{12}\,b_{33})$$

bez. die Relationen (12β) und (12γ).

2) Nehmen wir die *erste* Bedingung $u_2 = u_3$ erfüllt an, so folgt (vgl. (3) und (3α) in § 1):

---

*) Vgl. Rosanes, Schröter, Vályi a. a. O.

$$(3\beta)\quad \begin{cases} U \;= U_{12}(U_{23}-U_{33}) = (1-u_2)(2-u_2-u_1u_2) \\ U_{11} = u_2^2-1;\quad U_{22} = U_{33} = u_1u_2-1 \\ U_{12} = U_{13} = 1-u_2;\quad U_{23} = 1-u_1. \end{cases}$$

Damit ergeben sich u. A. folgende einfachere Werthe für die Coordinaten von Punkten und Geraden der Figur (vgl. Formeln (2), (4) und (5) in § 1):

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1' \cdots -(u_2+1)\ \ 1\ \ 1; \\ b_{11} \ldots 0\ -1\ \ 1;\quad b_{21} \ldots 1\ \ 0\ \ u_2+1;\quad b_{31} \ldots 1\ \ u_2+1\ \ 0; \\ \mathfrak{c}_1 \cdots \dfrac{1-u_2}{1-u_1}\ \ 1\ \ 1;\quad c_1 \cdots 1\ \ 1\ \ 1; \\ \mathfrak{c}_{(1)} = \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' = \mathfrak{g}_1 \cdots \dfrac{1-u_2}{u_1u_2-1}\ \ 1\ \ 1; \\ c_{(1)} = e_1' = e_1 = g_1 \cdots \dfrac{1}{u_2}\ \ 1\ \ 1. \end{cases}$$

Ausser dem Kegelschnitt K_1 (s. Formel (7) in § 1):

$$(7\alpha)\quad K_1 \equiv u_1x_1^2+u_2x_2^2+u_2x_3^2+2x_2x_3+2x_3x_1+2x_1x_2 = 0,$$

in Beziehung auf welchen die Dreiecke Δ und Δ' in der ursprünglichen Anordnung polarreciprok sind, erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt*):

$$(7\beta)\quad K_{(1)} \equiv u_1x_1^2+x_2^2+x_3^2+2u_2x_2x_3+2x_3x_1+2x_1x_2 = 0,$$

in Beziehung auf welchen sich die Dreiecke Δ und Δ' nach der Anordnung $\begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 1' & 3' & 2' \end{cases}$ polarreciprok entsprechen. Diese beiden Kegelschnitte berühren sich doppelt, so dass b_{11} die Berührungssehne, $\mathfrak{b}_{11}$ der Pol dieser Berührungssehne ist, wie sofort aus:

$$K_1 - K_{(1)} \equiv (u_2-1)(x_2-x_3)^2 = 0$$

hervorgeht.

Auf der Berührungssehne liegen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ harmonisch zu den Berührungspunkten; durch den Pol $\mathfrak{b}_{11}$ gehen a_1', a_1 harmonisch zu den beiden gemeinsamen Tangenten**), so dass das Dreieck $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1'\,\mathfrak{b}_{11}$ (oder $a_1'\,a_1\,b_{11}$) in Beziehung auf beide Kegelschnitte ein gemeinsames Polardreieck ist. Die beiden auf der Berührungssehne b_{11} liegendeu Centra $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_{(1)}$ (und die beiden durch $\mathfrak{b}_{11}$ gehenden Axen c_1 und $c_{(1)}$) bilden zwei gemeinsame Polardreiecke:

$$\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{p}_1 \quad (\text{oder } b_{11}\,c_1\,p_1)$$

und

$$\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{c}_{(1)}\,\mathfrak{p}_{(1)} \quad (\text{oder } b_{11}\,c_{(1)}\,p_{(1)}),$$

wobei

*) Vgl. Vályi, Archiv f. Math. u. Phys. II R. Bd. 2, S. 320 fg.
**) Vgl. z. B. Clebsch-Lindemann. Vorlesungen, S. 138.

$$(14\alpha)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 \;\cdots (b_{11}\, c_1\;) \cdots - 2 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{p}_{(1)} \cdots (b_{11}\, c_{(1)}) \cdots - 2u_2 \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

und

$$(14\beta)\qquad \begin{cases} p_1 \;\cdots |\mathfrak{b}_{11}\, \mathfrak{c}_1\;| \cdots - \dfrac{2(1-u_1)}{1-u_2} \quad 1 \quad 1 \\ p_{(1)} \cdots |\mathfrak{b}_{11}\, \mathfrak{c}_{(1)}| \cdots - \dfrac{2(u_1 u_2 - 1)}{1-u_2} \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

ist.

Das polarreciproke Entsprechen der Punkte und Geraden der Figur in Beziehung auf den zweiten Kegelschnitt $K_{(1)}$ erhellt aus dem nachfolgenden Schema, in welchem die sich entsprechenden Grössen untereinandergesetzt sind; die eingerahmten Grössen entsprechen sich auch in Beziehung auf K_1 polarreciprok:

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\mathfrak{a}_1}\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3\, \boxed{\mathfrak{a}_1'}\, \mathfrak{a}_2'\, \mathfrak{a}_3'\, \boxed{\mathfrak{b}_{11}}\, \mathfrak{b}_{22}\, \mathfrak{b}_{33}\, \mathfrak{b}_{12}\, \mathfrak{b}_{23}\, \mathfrak{b}_{31}\, \mathfrak{b}_{13}\, \mathfrak{b}_{21}\, \mathfrak{b}_{32}\, \boxed{\mathfrak{c}_1}\, \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' = \\ \boxed{a_1'}\, a_3'\, a_2'\, \boxed{a_1}\, a_3\, a_2\, \boxed{b_{11}}\, b_{33}\, b_{22}\, b_{31}\, b_{23}\, b_{12}\, b_{21}\, b_{13}\, b_{32}\, \boxed{c_1}\, e_1' = e_1 = \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} = \boxed{\mathfrak{g}_1} = \boxed{\mathfrak{c}_1}\, \mathfrak{e}_2\, \mathfrak{e}_3\, \mathfrak{e}_2'\, \mathfrak{e}_3'\, \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2\, \mathfrak{f}_3\, \mathfrak{f}_1'\, \mathfrak{f}_2'\, \mathfrak{f}_3'\, \boxed{\mathfrak{h}_{11}}\, \mathfrak{h}_{22}\, \mathfrak{h}_{33}\, \mathfrak{h}_{12}\, \mathfrak{h}_{23}\, \mathfrak{h}_{31}\, \mathfrak{h}_{13}\, \mathfrak{h}_{23}\, \mathfrak{h}_{32} \\ = \boxed{g_1} = \boxed{c_1}\, e_3\, e_2\, e_3'\, e_2'\, f_1\, f_3\, f_2\, f_1'\, f_3'\, f_2'\, \boxed{h_{11}'}\, h_{33}'\, h_{22}'\, h_{31}'\, h_{23}'\, h_{12}'\, h_{21}'\, h_{13}'\, h_{32}' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{\mathfrak{h}_{11}'}\, \mathfrak{h}_{22}''\, \mathfrak{h}_{33}'\, \mathfrak{h}_{31}'\, \mathfrak{h}_{23}'\, \mathfrak{h}_{12}'\, \mathfrak{h}_{21}'\, \mathfrak{h}_{13}'\, \mathfrak{h}_{32}' \\ \boxed{h_{11}}\, h_{33}\, h_{22}\, h_{12}\, h_{23}\, h_{31}\, h_{13}\, h_{23}\, h_{32}\;. \end{array}$$

3) Von weiteren Beziehungen, welche aus der Figur zweier zweifach perspectiven Dreiecke resultiren und durch das zweifache Entsprechen der Punkte und Geraden ein besonderes Interesse darbieten, mögen nur noch die folgenden hervorgehoben werden:

I) Die Anwendung des in § 1, I) aufgeführten Satzes von Veronese auf die Dreiecke $\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2\, \mathfrak{g}_3$ und $g_1\, g_2\, g_3$, wobei $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{c}_{(1)}$ und $g_1 = e_{(1)}$ ist, ergiebt folgende specielle Relationen:

$$(8\gamma)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 \;\cdots \qquad \dfrac{1-u_2}{1-u_1} \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}_1^{(1)} \cdots - \dfrac{(1+u_2)(1-u_1)}{u_1 u_2 - 1} \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}_1^{(2)} \cdots \quad \dfrac{2u_2 - u_1(1+u_2)}{u_1(1-u_2)} \quad 1 \quad 1 \\ \hline l_1 = b_{11} \cdots |\mathfrak{c}_1\, \mathfrak{c}_1^{(1)}\, \mathfrak{c}_1^{(2)}| \cdots 0 \quad -1 \quad 1 \end{cases}$$

$$(8\delta)\qquad \begin{cases} c_1 \;\cdots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ c_1^{(1)} \cdots \dfrac{1+u_1}{1+u_2} \quad 1 \quad 1 \\ c_1^{(2)} \cdots \dfrac{u_1}{u_2} \quad 1 \quad 1 \\ \hline \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{b}_{11} \cdots (c_1\, c_1^{(1)}\, c_1^{(2)}) \cdots 0 \quad -1 \quad 1. \end{cases}$$

Wendet man denselben Satz auf die beiden Dreiecke Δ und Δ'

in der zweiten perspectiven Lage an, so erhält man das Dreieck $\mathfrak{g}_1^{(1)}\,\mathfrak{g}_2^{(1)}\,\mathfrak{g}_3^{(1)}$ oder $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_1'$, welches sowohl zu $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$, als zu $\mathfrak{a}_1'\,\mathfrak{a}_3'\,\mathfrak{a}_2'$ so perspectiv ist, dass die Axe $c_{(1)}$ dieselbe ist, die drei Centra $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(1)}^{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(1)}^{(2)}$ auf einer Geraden $\mathfrak{l}_{(1)}$ liegen und analog das Dreieck $g_1^{(1)}\,g_2^{(1)}\,g_3^{(1)}$ oder $c_1\,f_1\,f_1'$, welches sowohl zu $a_1'\,a_3'\,a_2'$ als zu $a_1\,a_2\,a_3$ so perspectiv ist, dass das Centrum $\mathfrak{c}_{(1)}$ dasselbe ist, die drei Axen $c_{(1)}, c_{(1)}^{(1)}, c_{(1)}^{(2)}$ sich in einem Punkte $\mathfrak{l}_{(1)}$ schneiden. Es ergiebt sich nun:

$$(8\gamma')\quad\begin{cases}\mathfrak{c}_{(1)}\cdots & \dfrac{1-u_2}{u_1u_2-1} \quad 1 \quad 1\\[2ex] \mathfrak{c}_{(1)}^{(1)}\cdots & -\dfrac{(1+u_2)(u_1u_2-1)}{1-u_1} \quad 1 \quad 1\\[2ex] \mathfrak{c}_{(1)}^{(2)}\cdots & \dfrac{u_1u_2(1+u_2)-2}{u_1(1-u_2)} \quad 1 \quad 1\\ \hline l_{(1)}=l_1=b_{11}\cdots\left|\mathfrak{c}_{(1)}\,\mathfrak{c}_{(1)}^{(1)}\,\mathfrak{c}_{(1)}^{(2)}\right|\cdots 0 & -1 \quad 1\end{cases}$$

$$(8\delta')\quad\begin{cases}c_{(1)}\cdots & \dfrac{1}{u_2} \quad 1 \quad 1\\[2ex] c_{(1)}^{(1)}\cdots & \dfrac{u_1u_2+1}{1+u_1} \quad 1 \quad 1\\[2ex] c_{(1)}^{(2)}\cdots & u_1u_2 \quad 1 \quad 1\\ \hline \mathfrak{l}_{(1)}=\mathfrak{l}_1=\mathfrak{b}_{11}\cdots(c_{(1)}\,c_1^{(1)}\,c_1^{(2)})\cdots 0 & -1 \quad 1\,.\end{cases}$$

II) Aus dem in § 1 unter II) abgeleiteten Satze folgt einmal, dass die beiden Dreiecke $m_1\,m_2\,m_3$ und $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3$ zweifach perspectiv liegen und zwar bez. mit den Centren $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_{(1)}$ und den Axen c_1, $c_{(1)}$, wobei

$$m_1=p_{(1)} \quad\text{und}\quad \mathfrak{m}_1=\mathfrak{p}_{(1)}$$

(s. Formel 14α) und β)) ist.

Zweitens folgt, dass die der zweiten perspectiven Lage der Dreiecke Δ und Δ' entsprechenden Dreiecke $m_1^{(1)}\,m_2^{(1)}\,m_3^{(1)}$ und $\mathfrak{m}_1^{(1)}\,\mathfrak{m}_2^{(1)}\,\mathfrak{m}_3^{(1)}$ ebenfalls zweifach perspectiv liegen und zwar bez. mit den Centren $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_1$ und den Axen $c_{(1)}$, c_1. Man erhält:

$$(9\alpha')\quad\begin{cases}m_1^{(1)}\cdots|\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{c}_1\,|=p_1\cdots & -\dfrac{2(1-u_1)}{1-u_2} & 1 & 1\\[2ex] m_2^{(1)}\cdots|\mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{f}_1\,| & \cdots\quad 1 & \dfrac{u_1u_2(u_2+2)-(2u_2+1)}{u_1u_2-1} & u_2\\[2ex] m_3^{(1)}\cdots|\mathfrak{b}_{32}\,\mathfrak{f}_1'| & \cdots\quad 1 & u_2 & \dfrac{u_1u_2(u_2+2)-(2u_2+1)}{u_1u_2-1}\end{cases}$$

$$(9\beta')\quad\begin{cases}\mathfrak{m}_1^{(1)}\cdots(b_{11}c_1)\cdots=\mathfrak{p}_1\cdots & -2 & 1 & 1\\[2ex] \mathfrak{m}_2^{(1)}\cdots(b_{23}f_1)\cdots & 1-u_2 & \dfrac{u_1u_2(u_2-2)+1}{u_2} & u_1u_2-1\\[2ex] \mathfrak{m}_3^{(1)}\cdots(b_{32}f_1')\cdots & 1-u_2 & u_1u_2-1 & \dfrac{u_1u_2(u_2-2)+1}{u_2}\end{cases}$$

$$(9\gamma')\quad\begin{cases}\mathfrak{M}_1^{(1)}\ldots(m_2^{(1)}m_3^{(1)})\ldots & -\dfrac{2u_1u_2(1+u_2)+(1+3u_2)}{u_1u_2-1} & 1 & 1\\ \mathfrak{M}_2^{(1)}\ldots(m_3^{(1)}m_1^{(1)})\ldots & 1-u_2 & 3-2u_1-u_1u_2 & u_1u_2-1\\ \mathfrak{M}_3^{(1)}\ldots(m_1^{(1)}m_2^{(1)})\ldots & 1-u_2 & u_1u_2-1 & 3-2u_1-u_1u_2\end{cases}$$

$$(9\delta')\quad\begin{cases}M_1^{(1)}\ldots|\mathfrak{m}_2^{(1)}\mathfrak{m}_3^{(1)}|\ldots & \dfrac{2u_1u_2-1}{u_2} & 1 & 1\\ M_2^{(1)}\ldots|\mathfrak{m}_3^{(1)}\mathfrak{m}_1^{(1)}|\ldots & 1 & 2-u_2 & u_2\\ M_3^{(1)}\ldots|\mathfrak{m}_1^{(1)}\mathfrak{m}_2^{(1)}|\ldots & 1 & u_2 & 2-u_2\,.\end{cases}$$

Dabei entsprechen sich $m_1^{(1)}m_2^{(1)}m_3^{(1)}$ und $\mathfrak{m}_1^{(1)}\mathfrak{m}_2^{(1)}\mathfrak{m}_3^{(1)}$ als Polardreiecke in Bezug auf $K_{(1)}$, dagegen $m_1^{(1)}m_2^{(1)}m_3^{(1)}$ und $\mathfrak{m}_1^{(1)}\mathfrak{m}_3^{(1)}\mathfrak{m}_2^{(1)}$ als Polardreiecke in Beziehung auf K_1.

III) Die Construction der sechsten Ecke (Seite), falls die übrigen fünf Ecken (Seiten) gegeben sind, ergiebt sich unmittelbar aus den obigen Beziehungen.*) Für die Construction der sechsten Seite a_3' z. B. ist:

$$|a_1\,a_1',\ a_2\,a_2'| = |\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{b}_{22}| = c_1,$$
$$|a_1\,a_1',\ a_3\,a_2'| = |\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{b}_{32}| = c_{(1)},$$
$$|a_3\,c_1,\ a_2\,c_{(1)}| = |\mathfrak{b}_{33}\,\mathfrak{b}_{23}| = a_3'.$$

IV) Von den in § 1 unter III) (10) aufgeführten weiteren 18 Schnittpunkten, fallen hier wegen

$$e_1 = e_1' = g_1 = c_1$$

6 mal je zwei Schnittpunkte in einen zusammen, nämlich die in dem folgenden Schema untereinanderstehenden:

$$(10\alpha)\qquad \begin{Bmatrix}(e_1\,e_2') \\ (g_1\,e_2')\end{Bmatrix}\left|\begin{matrix}(e_1\,e_3') \\ (g_1\,e_3')\end{matrix}\right|\begin{matrix}(e_1\,g_2) \\ (e_1'\,g_2)\end{matrix}\left|\begin{matrix}(e_1\,g_3) \\ (e_1'\,g_3)\end{matrix}\right|\begin{matrix}(e_1'\,e_2) \\ (g_1\,e_2)\end{matrix}\left|\begin{matrix}(e_1'\,e_3) \\ (g_1\,e_3)\end{matrix}\right|.$$

Man wird dies sofort auch aus den Werthen für die Coordinaten mit Berücksichtigung von $u_2 = u_3$ bestätigen. Analog fallen von den entsprechenden 18 Verbindungsgeraden wegen

$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_1' = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{c}_1$$

6 mal je zwei Gerade in eine zusammen.

V) Von besonderen durch specielle Werthe für u_1 oder u_2 bedingten Fällen für die Lage zweier zweifach perspectiven Dreiecke seien hier einmal die Degenerationsfälle erwähnt, welche aus der Bedingung $U = 0$ resultiren. Alsdann muss (vgl. Formel (3β))

$$\text{entweder}\quad u_2 = 1 \quad\text{oder}\quad u_1 = \frac{2}{u_2+1}$$

sein.

*) Vgl. Schröter, Math. Ann. II, p. 554.

Die diesen Werthen entsprechenden Beziehungen lassen sich leicht aufstellen und geometrisch interpretiren.

VI) Sodann möge mit Rücksicht auf eine später bei den zweifach perspectiven Tetraedern folgende Anwendung (s. § 9 — 2)) noch der durch die Bedingung:

$$(16) \qquad u_1 u_2 = 1 \qquad \text{oder} \qquad (16\alpha) \quad u_1 = \frac{1}{u_2}$$

bestimmte specielle Fall kurz betrachtet werden.

Man erhält hierfür:

$$(16\beta) \quad \begin{cases} \mathfrak{a}_2' = \mathfrak{b}_{23} = \mathfrak{b}_{21} \cdots u_2 \qquad 0 \quad -1 \\ \mathfrak{a}_3' = \mathfrak{b}_{31} = \mathfrak{b}_{32} \cdots u_2 \ . -1 \qquad 0 \\ \mathfrak{c}_1 \cdots -u_2 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}_{(1)} = \mathfrak{a}_1 \cdots 1 \quad 0 \quad 0; \qquad c_{(1)} = a_1' \cdots \frac{1}{u_2} \quad 1 \quad 1, \end{cases}$$

d. h. es liegt $\mathfrak{a}_2'$ auf a_2 und $\mathfrak{a}_3'$ auf a_3.

Die einfache Construction von $\mathfrak{a}_2'$ und $\mathfrak{a}_3'$, falls $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_1$ gegeben sind, sowie auch die Beschaffenheit des der zweiten Deutung der analytischen Ausdrücke entsprechenden Falles ist leicht zu finden.

Der ganz specielle Fall, in welchem auch $\mathfrak{a}_1'$ auf a_1 liegt und welcher durch die Bedingung:

$$u_1 = u_2 = u_3 = -1$$

charakterisirt ist, wird in § 4 unter II) noch betrachtet werden.

§ 3.

Dreifach perspective Dreiecke.

1) Wenn ausser der Beziehung:

$$(1\beta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1 \;\; 2 \;\; 3 \\ 1' \;\; 2' \;\; 3' \\ \hline \mathfrak{c}_1 - c_1 \end{array} \right.$$

noch eine der beiden Beziehungen:

$$(1\gamma) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1 \;\; 2 \;\; 3 \\ 2' \;\; 3' \;\; 1' \\ \hline \mathfrak{c}_2 - c_2 \end{array} \right. , \qquad (1\delta) \left\{ \begin{array}{c} 1 \;\; 2 \;\; 3 \\ 3' \;\; 1' \;\; 2' \\ \hline \mathfrak{c}_3 - c_3 \end{array} \right. ,$$

wobei die Anordnung der Ecken und Seiten des Dreiecks Δ' den beiden anderen *positiven* Permutationen der Indices $1'$, $2'$, $3'$ entspricht, stattfindet, so folgt auch jedesmal die andere Beziehung und die Dreiecke Δ und Δ' sind *dreifach perspectiv* *). Denn wenn ausser

*) Vgl. Rosanes, Schröter, Vályi, a. a. O.

auch
$$c_1 = |\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{b}_{22}\,\mathfrak{b}_{33}| \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_1 = (\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{b}_{22}\,\mathfrak{b}_{33})$$
$$c_2 = |\mathfrak{b}_{12}\,\mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{b}_{31}| \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_2 = (b_{12}\,b_{23}\,b_{31})$$

sein soll, so muss (vgl. (4α) und (4β)):
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & u_2 \\ u_3 & 0 & -1 \\ -1 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder
$$\begin{vmatrix} 0 & -U_{23} & U_{22} \\ U_{33} & 0 & -U_{31} \\ -U_{12} & U_{11} & 0 \end{vmatrix} = U \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & u_2 \\ u_3 & 0 & -1 \\ -1 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

also, falls nicht $U = 0$ ist, die Bedingung:

(17)
$$u_1\,u_2\,u_3 = 1$$

erfüllt sein. Dieselbe Bedingung resultirt aus (1δ), d. h. aus:
$$c_3 = |\mathfrak{b}_{13}\,\mathfrak{b}_{21}\,\mathfrak{b}_{32}| \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}_3 = (b_{13}\,b_{21}\,b_{32}).$$

Da für diese Relation (vgl. (3) und (3α)):
$$(3\gamma)\quad \begin{cases} U \;= 3 - (u_1 + u_2 + u_3) \\ U_{11} = \dfrac{1}{u_1} - 1 = \dfrac{U_{23}}{u_1}, \quad U_{22} = \dfrac{1}{u_2} - 1 = \dfrac{U_{31}}{u_2}, \\ U_{33} = \dfrac{1}{u_3} - 1 = \dfrac{U_{12}}{u_3} \end{cases}$$

folgt, so erhält man:
$$(18\alpha)\quad \begin{cases} c_1 \ldots |\mathfrak{b}_{11}\,\mathfrak{b}_{22}\,\mathfrak{b}_{33}| \ldots 1 \quad 1 \quad 1 \\ c_2 \ldots |\mathfrak{b}_{12}\,\mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{b}_{31}| = f_1 = f_2 = f_3 \ldots 1 \; \dfrac{1}{u_1} \; u_3 \textit{ oder} \\ \qquad\qquad u_1 \; 1 \; \dfrac{1}{u_2} \textit{ oder } \dfrac{1}{u_3} \; u_2 \; 1 \\ c_3 \ldots |\mathfrak{b}_{13}\,\mathfrak{b}_{21}\,\mathfrak{b}_{32}| = f_1' = f_2' = f_3' \ldots 1 \; u_2 \; \dfrac{1}{u_1} \textit{ oder} \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{u_2} \; 1 \; u_3 \textit{ oder } u_1 \; \dfrac{1}{u_3} \; 1. \end{cases}$$

$$(18\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 \cdots (b_{11}\,b_{22}\,b_{33}) \cdots \dfrac{1}{1-u_1} \quad \dfrac{1}{1-u_2} \quad \dfrac{1}{1-u_3} \\ \mathfrak{c}_2 \cdots (b_{12}\,b_{23}\,b_{31}) = \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_3 \cdots \dfrac{1}{1-u_3} \; \dfrac{u_1}{1-u_1} \; \dfrac{1}{u_3(1-u_2)} \textit{ oder} \\ \qquad \dfrac{1}{u_1(1-u_3)} \; \dfrac{1}{1-u_2} \; \dfrac{u_2}{1-u_2} \textit{ oder } \dfrac{u_3}{1-u_3} \; \dfrac{1}{u_2(1-u_1)} \; \dfrac{1}{1-u_2} \\ c_3 \cdots (b_{13}\,b_{21}\,b_{32}) = \mathfrak{f}_1' = \mathfrak{f}_2' = \mathfrak{f}_3' \cdots \dfrac{1}{1-u_2} \; \dfrac{1}{u_2(1-u_3)} \; \dfrac{u_1}{1-u_1} \textit{ oder} \\ \qquad \dfrac{u_2}{1-u_2} \; \dfrac{1}{1-u_3} \; \dfrac{1}{u_3(1-u_1)} \textit{ oder } \dfrac{1}{u_1(1-u_2)} \; \dfrac{u_3}{1-u_3} \; \dfrac{1}{1-u_1}. \end{cases}$$

Das Dreieck $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3$ ist zu jedem der beiden Dreiecke $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_1'\,\mathfrak{a}_2'\,\mathfrak{a}_3'$ dreifach perspectiv, wobei die Centra der Perspectivität bez. durch die Ecken des dritten Dreiecks $\mathfrak{a}_1'\,\mathfrak{a}_2'\,\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3$ gebildet werden; analog ist das Dreieck $c_1\,c_2\,c_3$ zu jedem der beiden Dreiecke $a_1'\,a_2'\,a_3'$ und $a_1\,a_2\,a_3$ dreifach perspectiv, wobei die Axen der Perspectivität bez. durch die Seiten des dritten Dreiecks $a_1\,a_2\,a_3$ und $a_1'\,a_2'\,a_3'$ gebildet werden. Es erhellt dies sofort aus der nachfolgenden Zusammenstellung, in welcher einerseits $(19(\alpha)$—$(\gamma))$ auch die zugehörigen Axen, andererseits $(19(\alpha')$—$(\gamma'))$ auch die zugehörigen Centra der Perspectivität angegeben sind:

$$(19\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_1'\;\mathfrak{a}_2'\;\mathfrak{a}_3' & \mathfrak{a}_2'\;\mathfrak{a}_3'\;\mathfrak{a}_1' & \mathfrak{a}_3'\;\mathfrak{a}_1'\;\mathfrak{a}_2' \\ \hline \mathfrak{c}_1 - c_1 & \mathfrak{c}_2 - c_2 & \mathfrak{c}_3 - c_3 \end{array}\right.$$

$$(19\beta)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{c}_1\;\mathfrak{c}_3\;\mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_2\;\mathfrak{c}_1\;\mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_3\;\mathfrak{c}_2\;\mathfrak{c}_1 \\ \hline \mathfrak{a}_1' - c_1'' & \mathfrak{a}_2' - c_2'' & \mathfrak{a}_3' - c_3'' \end{array}\right.$$

$$(19\gamma)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1'\;\mathfrak{a}_2'\;\mathfrak{a}_3' & \mathfrak{a}_1'\;\mathfrak{a}_2'\;\mathfrak{a}_3' & \mathfrak{a}_1'\;\mathfrak{a}_2'\;\mathfrak{a}_3' \\ \mathfrak{c}_1\;\mathfrak{c}_2\;\mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_3\;\mathfrak{c}_1\;\mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_2\;\mathfrak{c}_3\;\mathfrak{c}_1 \\ \hline \mathfrak{a}_1 - c_1''' & \mathfrak{a}_2 - c_2''' & \mathfrak{a}_3 - c_3''' \end{array}\right.$$

$$(19\alpha')\qquad \left\{\begin{array}{ccc} a_1\;a_2\;a_3 & a_1\;a_2\;a_3 & a_1\;a_2\;a_3 \\ a_1'\;a_2'\;a_3' & a_2'\;a_3'\;a_1' & a_3'\;a_1'\;a_2' \\ \hline c_1 - \mathfrak{c}_1 & c_2 - \mathfrak{c}_2 & c_3 - \mathfrak{c}_3 \end{array}\right.$$

$$(19\beta')\qquad \left\{\begin{array}{ccc} a_1\;a_2\;a_3 & a_1\;a_2\;a_3 & a_1\;a_2\;a_3 \\ c_1\;c_3\;c_2 & c_2\;c_1\;c_3 & c_3\;c_2\;c_1 \\ \hline a_1' - \mathfrak{c}_1'' & a_2' - \mathfrak{c}_2'' & a_3' - \mathfrak{c}_3'' \end{array}\right.$$

$$(19\gamma')\qquad \left\{\begin{array}{ccc} a_1'\;a_2'\;a_3' & a_1'\;a_2'\;a_3' & a_1'\;a_2'\;a_3' \\ c_1\;c_2\;c_3 & c_3\;c_1\;c_2 & c_2\;c_3\;c_1 \\ \hline a_1 - \mathfrak{c}_1''' & a_2 - \mathfrak{c}_2''' & a_3 - \mathfrak{c}_3''' \end{array}\right. .$$

2) Werden die Seiten der Dreiecke $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3$; $\mathfrak{c}_1''\,\mathfrak{c}_2''\,\mathfrak{c}_3''$; $\mathfrak{c}_1'''\,\mathfrak{c}_2'''\,\mathfrak{c}_3'''$ bez. durch C_1, C_2, C_3; C_1'', C_2'', C_3''; C_1''', C_2''', C_3''' und analog die Ecken der Dreiecke $c_1\,c_2\,c_3$; $c_1''\,c_2''\,c_3''$; $c_1'''\,c_2'''\,c_3'''$ bez. durch $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$; $\mathfrak{C}_1'', \mathfrak{C}_2'', \mathfrak{C}_3''$; $\mathfrak{C}_1''', \mathfrak{C}_2''', \mathfrak{C}_3'''$ bezeichnet, so finden folgende einfache Beziehungen statt:

In Bezug auf das Dreieck Δ entsprechen sich polar die in der folgenden Zusammenstellung (20α) untereinander gesetzten Grössen, so dass den in der ersten Reihe stehenden Punkten die darunter gesetzten Geraden als harmonische Polaren (Harmonikalen) zugeordnet sind.

$$(20\alpha)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2'\ \mathfrak{a}_3' & \mathfrak{C}_1''\ \mathfrak{C}_2''\ \mathfrak{C}_3'' & \mathfrak{c}_1''\ \mathfrak{c}_2''\ \mathfrak{c}_3'' & \mathfrak{C}_1\ \mathfrak{C}_2\ \mathfrak{C}_3 \\ a_1\ a_2\ a_3 & C_1''\ C_2''\ C_3'' & a_1'\ a_2'\ a_3' & c_1''\ c_2''\ c_3'' & C_1\ C_2\ C_3. \end{cases}$$

In Beziehung auf das Dreieck Δ' als Fundamentaldreieck entsprechen sich die in (20β) untereinandergesetzten Grössen polar:

$$(20\beta)\quad \begin{cases} a_1'\ a_2'\ a_3' & a_1\ a_2\ a_3 & C_1'''\ C_2'''\ C_3''' & c_1'''\ c_2'''\ c_3''' & C_1\ C_2\ C_3 \\ \mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2'\ \mathfrak{a}_3' & \mathfrak{C}_1'''\ \mathfrak{C}_2'''\ \mathfrak{C}_3''' & \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{c}_1'''\ \mathfrak{c}_2'''\ \mathfrak{c}_3''' & \mathfrak{C}_1\ \mathfrak{C}_2\ \mathfrak{C}_3, \end{cases}$$

so dass also den Punkten $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ in Beziehung auf beide Dreiecke Δ und Δ' die Geraden C_1, C_2, C_3 als Harmonikalen entsprechen.

Denn für das Dreieck Δ als Coordinatendreieck ergiebt sich leicht:

$$(21\alpha)\quad \begin{cases} \mathfrak{C}_1 \cdots & \dfrac{1-u_1}{u_1} & \dfrac{1-u_2}{u_2} & \dfrac{1-u_3}{u_3} \\ \mathfrak{C}_2 \cdots & u_2(1-u_3) & \dfrac{1-u_1}{u_1} & 1-u_2 \\ \mathfrak{C}_3 \cdots & \dfrac{1-u_2}{u_2} & u_1(1-u_3) & 1-u_1 \end{cases}$$

$$(21\beta)\quad \begin{cases} C_1 \cdots & \dfrac{u_1}{1-u_1} & \dfrac{u_2}{1-u_2} & \dfrac{u_3}{1-u_3} \\ C_2 \cdots & \dfrac{1}{u_2(1-u_3)} & \dfrac{u_1}{1-u_1} & \dfrac{1}{1-u_2} \\ C_3 \cdots & \dfrac{u_2}{1-u_2} & \dfrac{1}{u_1(1-u_3)} & \dfrac{1}{1-u_1} \end{cases}$$

$$(22\alpha)\quad \begin{cases} c_1'' \cdots & 1-u_1 & \dfrac{1-u_3}{u_3} & \dfrac{1-u_2}{u_2} \\ \mathfrak{C}_1'' = |c_2''c_3''| \cdots & \dfrac{1}{u_1} & 1 & 1 \end{cases}$$

$$(22\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{c}_1'' \cdots & \dfrac{1}{1-u_1} & \dfrac{u_3}{1-u_3} & \dfrac{u_2}{1-u_2} \\ C_1'' = |\mathfrak{c}_2''\mathfrak{c}_3''| \cdots & \dfrac{u_1}{1-u_1} & \dfrac{1}{1-u_3} & \dfrac{1}{1-u_2}, \end{cases}$$

wobei in (22α) und (22β) die Coordinaten für c_2'', c_3''; $\mathfrak{C}_2'', \mathfrak{C}_3''$ u. s. f. sich bez. aus denen für c_1''; $\mathfrak{C}_1''$ u. s. f. durch cyklische Vertauschung ergeben, während in den Formeln (21α) und (21β), ebenso wie in (18α) und (18β) die Coordinaten jedes einzelnen Punktes (jeder einzelnen Geraden) durch die cyklische Vertauschung sich nicht ändern. Für die Grössen c_1''', $\mathfrak{C}_1'''$, $\mathfrak{c}_1'''$, C_1''' erhält man in Beziehung auf das Dreieck Δ' als Coordinatendreieck dieselben Coordinaten, wie bez. für $\mathfrak{c}_1''$, C_1'', c_1'', $\mathfrak{C}_1''$ in Beziehung auf Δ, während die Coordinaten von $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3$; $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ in Beziehung auf $\Delta(\Delta')$ bez. denen von c_1, c_3, c_2; C_1, C_3, C_2 in Beziehung auf $\Delta'(\Delta)$ gleich sind.

3) Für jede der drei perspectiven Lagen existirt ein Kegelschnitt K_1, K_2, K_3, in Beziehung auf welchen sich die Punkte und Geraden

der Figur polar entsprechen. Die Gleichungen dieser drei Kegelschnitte sind*) (vgl. 7):

$$(7\gamma)\quad K_1 \equiv u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2 + u_3 x_3^2 + 2x_2 x_3 + 2x_3 x_1 + 2x_1 x_2 = 0,$$

$$(7\delta)\quad K_2 \equiv x_1^2 + u_2 x_2^2 + \frac{1}{u_1} x_3^2 + \frac{2}{u_1} x_2 x_3 + 2x_3 x_1 + 2u_2 x_1 x_2 = 0,$$

$$(7\varepsilon)\quad K_3 \equiv x_1^2 + \frac{1}{u_1} x_2^2 + u_3 x_3^2 + \frac{2}{u_1} x_2 x_3 + 2u_3 x_3 x_1 + 2x_1 x_2 = 0.$$

Das polare Entsprechen der Punkte und Geraden in Beziehung auf diese drei Kegelschnitte, welche sich im Allgemeinen nicht berühren, wird aus der nachfolgenden Zusammenstellung (23) ersichtlich. In derselben sind bei den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{c}'''$ (den Geraden a, a', c'', c''') nur für je einen Punkt (Gerade) die Beziehungen angegeben, da sich diejenigen der beiden anderen Punkte (Geraden) einfach aus jenen durch cyklische Vertauschung der Indices ergeben. Für die durch die grossen Buchstaben $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{C}'''$ (C, C'', C''') bezeichneten Punkte (Geraden) sind die Beziehungen genau dieselben, wie diejenigon für die mit kleinen Buchstaben c, c'', c''' ($\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{c}'''$) bezeichneten Geraden (Punkte).

(23)

Es entspricht	in Beziehung auf K_1	K_2	K_3
$\mathfrak{a}_1$	a_1'	a_2'	a_3'
a_1	$\mathfrak{a}_1'$	$\mathfrak{a}_2'$	$\mathfrak{a}_3'$
$\mathfrak{a}_1'$	a_1	a_3	a_2
a_1'	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{c}_1$	c_1	c_3	c_2
$\mathfrak{c}_2$	c_3	c_2	c_1
$\mathfrak{c}_3$	c_2	c_1	c_3
c_1	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_2$
c_2	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_1$
c_3	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_3$
$\mathfrak{c}_1''$	c_1'''	c_3'''	c_2'''
c_1''	$\mathfrak{c}_1'''$	$\mathfrak{c}_3'''$	c_2'''
$\mathfrak{c}_1'''$	c_1''	c_2''	c_3''
c_1'''	$\mathfrak{c}_1''$	$\mathfrak{c}_2''$	$\mathfrak{c}_3''$.

*) Vgl. Vályi, Arch. f. Math. u. Phys. II R., Bd. 2, S. 321.

4) Die drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 haben *ein gemeinsames Polardreieck*, wie man sofort erkennt, wenn man die Jacobi'sche Determinante derselben (vgl. 7 (γ), (δ), (ε)) bildet. Verstehen wir unter a_1', a_2', a_3' die linken Theile der drei in gleicher Weise bezeichneten Seiten des Dreiecks Δ' (vgl. (2β)), sodass

$$\begin{aligned} a_1' &\equiv u_1 x_1 + x_2 + x_3\,, \\ a_2' &\equiv x_1 + u_2 x_2 + x_3\,, \\ a_3' &\equiv x_1 + x_2 + u_3 x_3 \end{aligned}$$

ist, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Relation (17) $u_1 u_2 u_3 = 1$

$$J = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_2' & u_2 a_3' & \frac{1}{u_1} a_1' \\ a_3' & \frac{1}{u_1} a_1' & u_3 a_2' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{u_1}\left[3 a_1' a_2' a_3' - \left(\frac{1}{u_1} a_1'^3 + \frac{1}{u_2} a_2'^3 + \frac{1}{u_3} a_3'^3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{u_1}\,(3 - u_1 - u_2 - u_3)\,(u_1 x_1^3 + u_2 x_2^3 + u_3 x_3^3 - 3 x_1 x_2 x_3) = 0,$$

also falls $U = 3 - (u_1 + u_2 + u_3)$ nicht Null ist, die Curve dritter Ordnung:

(24) $$u_1 x_1^3 + u_2 x_2^3 + u_3 x_3^3 - 3 x_1 x_2 x_3 = 0$$

als Jacobi'sche Curve der drei Kegelschnitte. Dieselbe *zerfällt* aber in die *drei Geraden:*

(25α) $$1.\quad u_1^{\frac{1}{3}} x_1 + u_2^{\frac{1}{3}} x_2 + u_3^{\frac{1}{3}} x_3 = 0,$$

(25β) $$2.\quad u_1^{\frac{1}{3}} x_1 + \alpha^2 \cdot u_2^{\frac{1}{3}} x_2 + \alpha \cdot u_3^{\frac{1}{3}} x_3 = 0,$$

(25γ) $$3.\quad u_1^{\frac{1}{3}} x_1 + \alpha \cdot u_2^{\frac{1}{3}} x_2 + \alpha^2 \cdot u_3^{\frac{1}{3}} x_3 = 0,$$

wo α eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit ist.

Das durch diese drei (eine reelle und zwei imaginäre) Gerade gebildete Dreieck mit den (einem reellen und den beiden imaginären) Eckpunkten:

(26α) $$\text{I.}\quad u_1^{-\frac{1}{3}} \quad u_2^{-\frac{1}{3}} \quad u_3^{-\frac{1}{3}},$$

(26β) $$\text{II.}\quad u_1^{-\frac{1}{3}} \quad \alpha \cdot u_2^{-\frac{1}{3}} \quad \alpha^2 \cdot u_3^{-\frac{1}{3}},$$

(26γ) $$\text{III.}\quad u_1^{-\frac{1}{3}} \quad \alpha^2 \cdot u_2^{-\frac{1}{3}} \quad \alpha \cdot u_3^{-\frac{1}{3}},$$

ist das gemeinsame Polardreieck der drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, welches bei der Untersuchung auch passend als Coordinatendreieck gewählt werden kann.

5) Die Uebertragung der in § 1 unter I) und II) für zwei einfach

perspective Dreiecke aufgestellten, sowie weiterer Lagenbeziehungen auf die vorliegende Figur wird man unter Berücksichtigung des hier stattfindenden dreifachen Entsprechens der Punkte und Geraden leicht vornehmen können. Hierbei ist zu beachten, dass beim Uebergange aus der ersten in die zweite und in die dritte Lage die Indices der Grössen $\mathfrak{a}_r'$, a_r', sowie die zweiten Indices der Grössen $\mathfrak{b}_{ik}(b_{ik})$, $\mathfrak{h}_{ik}(h_{ik})$, dagegen die ersten Indices der Grössen $\mathfrak{h}_{ik}'(h_{ik}')$ (vgl. Formeln (4) und (5)) cyklisch zu vertauschen sind, während die Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{g}$ (die Geraden (e, e', g) einfach nach dem Schema:

$$(27\alpha)\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{g}_3 - \mathfrak{e}_2',\\ \mathfrak{e}_2 - \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{e}_3',\\ \mathfrak{e}_3 - \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{e}_1',\end{array}\right. \qquad (27\beta)\left\{\begin{array}{l}e_1 - g_3 - e_2',\\ e_2 - g_1 - e_3',\\ e_3 - g_2 - e_1'\end{array}\right.$$

cyklisch zu vertauschen sind.

Indem wir auf die Durchführung dieser Uebertragung im Einzelnen verzichten, wollen wir im Folgenden die einfache Construction der sechsten Ecke (Seite), wenn fünf Ecken (Seiten) der beiden Dreiecke Δ und Δ' gegeben sind*), angeben, und sodann noch einige für die in's Auge gefassten Anwendungen besonders wichtige *Specialfälle* für die Lage zweier dreifach perspectiven Dreiecke betrachten.

I) Die Construction z. B. von $\mathfrak{a}_3'$, wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2'$ gegeben sind, ergiebt sich einfach nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1',\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_2') &= (\mathfrak{b}_{11}\mathfrak{b}_{22}) = \mathfrak{c}_1,\\ (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2',\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1') &= (\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{31}) = \mathfrak{c}_2,\\ (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}_2) &= (\mathfrak{b}_{33}\mathfrak{b}_{23}) = \mathfrak{a}_3'.\end{aligned}$$

II) Besonders beachtenswerth erscheint der *Special*fall, in welchem die drei Collineationsaxen c_1, c_2, c_3 sich in einem Punkte schneiden, wobei zugleich, falls $U \gtrless 0$ ist, die drei Perspectivitätscentra $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ auf einer Geraden liegen. Die Bedingung hierfür ist (vgl. 18α):

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \frac{1}{u_1} & u_3\\ 1 & u_2 & \frac{1}{u_1}\end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = 3.$$

Aus den beiden nunmehr geltenden Relationen:

$$(17)\qquad \frac{1}{u_1}\cdot\frac{1}{u_2}\cdot\frac{1}{u_3} = 1,$$

$$(28)\qquad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = 3$$

folgen leicht die nachstehenden:

*) Vgl. H. Schröter, Math. Ann. II. Bd., p. 554.

$$(29\alpha)\qquad U = \frac{(1-u_1)^3}{u_1^2},$$

$$(29\beta)\qquad 1-\frac{1}{u_1} : 1-\frac{1}{u_2} : 1-\frac{1}{u_3} = u_1^{-\frac{1}{3}} : u_2^{-\frac{1}{3}} : u_3^{-\frac{1}{3}}$$
$$= -2 : 1-\sqrt{-4u_1+1} : 1+\sqrt{-4u_1+1},$$

$$(29\gamma)\qquad \begin{cases} 1-\dfrac{1}{u_2} = \dfrac{(1-u_1)\left(1-\sqrt{-4u_1+1}\right)}{2u_1}, \\ 1-\dfrac{1}{u_3} = \dfrac{(1-u_1)\left(1+\sqrt{-4u_1+1}\right)}{2u_1}, \end{cases}$$

$$(29\delta)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{u_2} = \dfrac{3u_1-1+(1-u_1)\sqrt{-4u_1+1}}{2u_1}, \\ \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{3u_1-1-(1-u_1)\sqrt{-4u_1+1}}{2u_1}. \end{cases}$$

Alsdann fallen nicht nur $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, sondern auch $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{c}_2''$, $\mathfrak{c}_3''$ und $\mathfrak{c}_1'''$, $\mathfrak{c}_2'''$, $\mathfrak{c}_3'''$ (vgl. (21α) und (22β)) in dem einen Punkte I (26α), der reellen Ecke des gemeinsamen Polardreiecks der Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 zusammen (29β). Ebenso fallen nicht nur C_1, C_2, C_3, sondern auch c_1'', c_2'', c_3'' und c_1''', c_2''', c_3''' (vgl. (21β) und (22α)) in der einen Geraden 1 (25α), der reellen Geraden des gemeinsamen Polardreiecks, zusammen.

Durch den Punkt I, welchen wir durch $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen,

$$(30\alpha)\qquad \mathfrak{C} \cdots u_1^{-\frac{1}{3}}\; u_2^{-\frac{1}{3}}\; u_3^{-\frac{1}{3}}$$

gehen also die drei Strahlentripel:

$$\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3, \\ C_1'' & C_2'' & C_3'', \\ C_1''' & C_2''' & C_3''' \end{matrix}$$

hindurch, während auf der Geraden 1 oder C

$$(30\beta)\qquad C \cdots u_1^{\frac{1}{3}}\; u_2^{\frac{1}{3}}\; u_3^{\frac{1}{3}}$$

die drei Punkttripel:

$$\begin{matrix} \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3, \\ \mathfrak{C}_1'' & \mathfrak{C}_2'' & \mathfrak{C}_3'', \\ \mathfrak{C}_1''' & \mathfrak{C}_2''' & \mathfrak{C}_3''' \end{matrix}$$

liegen.

Ferner schneiden sich die drei Geraden g_1, g_2, g_3 (5β) in einem Punkte, nämlich in $\mathfrak{c}_1$, ebenso e_1', e_2', e_3' in $\mathfrak{c}_2$ und e_1, e_2, e_3 in $\mathfrak{c}_3$, so dass man hat

$$(31\alpha)\qquad \mathfrak{c}_1 = (g_1 g_2 g_3),\quad \mathfrak{c}_2 = (e_1' e_2' e_3'),\quad \mathfrak{c}_3 = (e_1 e_2 e_3)$$

und entsprechend

(31 β) $\quad c_1 = |\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3|, \quad c_2 = |\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_2'\mathfrak{c}_3'|, \quad c_3 = |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|.$

Das polare Entsprechen der Punkte und Geraden dieser besonderen Figur in Beziehung auf einen der drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 oder auf eines der Dreiecke Δ, Δ' oder auf das gemeinsame Polardreieck wird man mit Benutzung der gegebenen Relationen leicht genauer verfolgen können. Bemerkenswerth ist aber vor allem derjenige Kegelschnitt K, welcher von den beiden Seiten 2 und 3 bez. in III und II ((25) und (26)) berührt wird und in Beziehung auf welchen die Dreiecke Δ und Δ' sich selbst conjugirte Dreiecke sind. Die Gleichung dieses Kegelschnitts für das Dreieck Δ als Coordinatendreieck ist:

(32) $$K \equiv u_1^{\frac{2}{3}} x_1^2 + u_2^{\frac{2}{3}} x_2^2 + u_3^{\frac{2}{3}} x_3^2 = 0.$$

In Bezug auf ihn entsprechen alle durch accentuirte (nicht accentuirte) deutsche Buchstaben bezeichneten Punkte der Figur polar bez. den durch accentuirte (nicht accentuirte) lateinische Buchstaben bezeichneten Geraden.

Ertheilt man einer (noch willkürlich annehmbaren) der drei Grössen u_1, u_2, u_3 z. B. dem u_1 specielle Werthe, so resultiren besondere Fälle dieser Art von dreifach perspectiven Dreiecken.

1) Für $u_1 = \frac{1}{4}$ ergiebt sich (vgl. die Formeln (17), (28), (29 δ))

(33) $$u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_2 = u_3 = -2.$$

Da in diesem besonderen Falle die beiden Dreiecke Δ und Δ' *vierfach* perspectiv werden, so soll derselbe später (s. § 4 unter III), nachdem die für *vier*fach perspective Dreiecke geltenden Relationen aufgestellt sind, betrachtet werden.

2) Für $u_1 = -1$ ergiebt sich:

(34) $$u_1 = -1, \quad u_2 = -(\sqrt{5}+2), \quad u_3 = \sqrt{5}-2$$

oder

(34 α) $$u_1 = -1, \quad u_2 = -\operatorname{cotg}^3\varphi, \quad u_3 = \operatorname{tang}^3\varphi,$$

wenn durch φ der Winkel:

(35) $$\operatorname{tang}\varphi = 2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \operatorname{tang} 2\varphi = 2$$

bezeichnet wird.

Die durch diese besonderen Werthe bestimmte Figur, welche mit der eines s. g. *zehnfach* Brianchon'schen Sechseckes identisch ist, soll, da man auch durch Specialisirung der für *vierfach* perspective Dreiecke geltenden Relationen auf anderem Wege zu derselben Figur gelangt, in § 6 genauer betrachtet werden.

III) Der durch die Bedingung $U = 0$ bestimmte Fall für die Lage zweier dreifach perspectiven Dreiecke (vgl. § 1 unter IV) lässt sich einfach auf den soeben unter II) betrachteten zurückführen. Denn mit Rücksicht auf die oben angegebenen Beziehungen (s. die Zusammenstellung unter (19)) braucht man nur die beiden Dreiecke $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}_2'\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ (oder $a_1'a_2'a_3'$ und $c_1c_2c_3$) mit einander zu vertauschen, was einfach durch Coordinatentransformation erreicht wird.

Aber auch die folgende Behandlung führt hier rasch zum Ziel, wenn man beachtet, dass aus

$$U = 0 \quad \text{und} \quad u_1u_2u_3 = 1$$

die Relation:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 3 \tag{36}$$

resultirt, so dass sich die hier geltenden Beziehungen sofort aus den unter II) aufgestellten ergeben, wenn man überall u_1, u_2, u_3 durch ihre *reciproken* Werthe ersetzt. Die Art und Weise, auf welche alsdann die Punkte und Geraden der Figur ihre Rollen tauschen, ebenso auch die einfache Construction von a_2', a_3' (oder $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$), wenn das erste Dreieck Δ und a_1' (oder $\mathfrak{a}_1'$) gegeben sind, lässt sich leicht erkennen. Auch können die unter II 1) und 2) angeführten speciellen Fälle bei dieser Art der Betrachtung erhalten oder durch Uebertragung behandelt werden.

Wenn endlich für *zwei* der drei Dreiecke, z. B. für Δ' und das durch die Collineationsaxen (oder Centren) gebildete Dreieck die drei Seiten sich in einem Punkte schneiden (die drei Ecken auf einer Geraden liegen), so wird der triviale durch das Werthsystem:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1 \tag{36α}$$

charakterisirte Fall erhalten.

§ 4.

Vierfach perspective Dreiecke.

1) Zwei Dreiecke Δ und Δ' sind *vier*fach perspectiv, wenn ausser der Beziehung:

$$\begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 1'\ 2'\ 3' \\ \hline \mathfrak{c}_1 - c_1 \end{array} \tag{1β}$$

entweder die drei Beziehungen (§ 2):

$$(11\alpha)\ \begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 1'\ 3'\ 2' \\ \hline \mathfrak{c}_{(1)} - c_{(1)} \end{array}, \qquad (11\beta)\ \begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 3'\ 2'\ 1' \\ \hline \mathfrak{c}_{(2)} - c_{(2)} \end{array}, \qquad (11\gamma)\ \begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3 \\ 2'\ 1'\ 3' \\ \hline \mathfrak{c}_{(3)} - c_{(3)} \end{array},$$

von denen je zwei im Verein mit (1β) die dritte zur Folge haben, *oder* die beiden Beziehungen (§ 3):

$$(1\gamma)\quad \frac{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2' & 3' & 1'\end{matrix}}{\mathfrak{c}_2 - c_2}, \qquad (1\delta)\quad \frac{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 3' & 2' & 1'\end{matrix}}{\mathfrak{c}_3 - c_3},$$

von denen je eine im Verein mit (1β) die andere zur Folge hat und *eine* der drei Beziehungen (11α), (11β), (11γ) bestehen.

Für die *erste* Art der Darstellung ergiebt sich als Bedingung für die vierfache Perspectivität die Relation (vgl. (12α), (12β), (12γ)):

$$(12\delta)\qquad u_1 = u_2 = u_3,$$

für die *zweite* Art der Darstellung als Bedingung der Verein der Gleichung (vgl. (17))

$$(17)\qquad u_1 u_2 u_3 = 1$$

mit *einer* der drei Gleichungen (12α), (12β), (12γ)

$$u_2 = u_3 \quad\text{oder}\quad u_3 = u_1 \quad\text{oder}\quad u_1 = u_2,$$

also *eine* der drei Relationen:

$$(12\varepsilon)\ \frac{1}{u_1} = u_2^2 = u_3^2, \qquad (12\zeta)\ u_1^2 = \frac{1}{u_2} = u_3^2,$$

$$(12\eta)\ u_1^2 = u_2^2 = \frac{1}{u_3}.$$

Es genügt natürlich, die Betrachtung für eine Art der beiden Darstellungen durchzuführen, da sich die eine Art der Anordnung aus der andern durch Vertauschen zweier Seiten (Ecken) des Dreiecks Δ' ergiebt. Analytisch erhält man die Relationen für die zweite Art der Darstellung, wenn z. B. (1β), (1γ), (1δ) und (11α) für diese gewählt werden, aus denjenigen für die erste Art dadurch, dass man in allen diesen Ausdrücken den gemeinsamen Werth $u_1 = u_2 = u_3$ durch $\sqrt{u_1}$ ersetzt und bei den Liniencoordinaten die erste Coordinate mit $\sqrt{u_1}$, bei den Punktcoordinaten die erste Coordinate mit $\frac{1}{\sqrt{u_1}}$ multiplicirt. Umgekehrt resultiren die analytischen Ausdrücke für die erste Art der Darstellung aus denjenigen für die gewählte zweite Art, wenn man hier durchweg den gemeinsamen Werth $\sqrt{u_1} = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_3}$ durch u_1 ersetzt und bei Liniencoordinaten (Punktcoordinaten) die erste Coordinate mit $\frac{1}{u_1}$ (mit u_1) multiplicirt.

2) Wir wählen für die folgende Betrachtung die *erste* Art der Darstellung, für welche also die Bedingungen (12δ) gelten und bezeichnen den gemeinsamen Werth $u_1 = u_2 = u_3$ durch u. Man erhält (vgl. (3) und (3α)):

$$(3\delta)\quad \begin{cases} U = (1-u)^2\,(u+2), \\ U_{11} = U_{22} = U_{33} = u^2 - 1, \\ U_{23} = U_{31} = U_{12} = 1 - u, \end{cases}$$

ferner (vgl. (2β), (4), (5)):

$$(37\alpha)\quad \begin{cases} a_1' \cdots u \;\; 1 \;\; 1 \\ a_2' \cdots 1 \;\; u \;\; 1 \\ a_3' \cdots 1 \;\; 1 \;\; u \end{cases}$$

$$(37\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1' \cdots -(1+u) \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{a}_2' \cdots 1 \quad -(1+u) \quad 1 \\ \mathfrak{a}_3' \cdots 1 \quad 1 \quad -(1+u) \end{cases}$$

$$(38\alpha)\quad \begin{cases} b_{11} \cdots 0 \;\; -1 \;\; 1 \\ b_{22} \cdots 1 \;\; 0 \;\; -1 \\ b_{33} \cdots -1 \;\; 1 \;\; 0 \end{cases}$$

$$(38\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_{11} \cdots 0 \;\; -1 \;\; 1 \\ \mathfrak{b}_{22} \cdots 1 \;\; 0 \;\; -1 \\ \mathfrak{b}_{33} \cdots -1 \;\; 1 \;\; 0 \end{cases}$$

$$(38\gamma)\quad \begin{cases} b_{12} \cdots 0 \;\; 1 \;\; 1+u \\ b_{13} \cdots 0 \;\; 1+u \;\; 1 \end{cases}$$

$$(38\delta)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_{12} \cdots 0 \;\; -1 \;\; u \\ \mathfrak{b}_{13} \cdots 0 \;\; u \;\; -1 \end{cases}$$

$$(39\alpha)\quad c_1 \cdots 1 \;\; 1 \;\; 1 \qquad\qquad (39\beta)\quad \mathfrak{c}_1 \cdots 1 \;\; 1 \;\; 1$$

$$(39\gamma)\quad \begin{cases} c_{(1)} = e_1 = e_1' = g_1 \cdots \frac{1}{u} \;\; 1 \;\; 1 \\ c_{(2)} = e_2 = e_2' = g_2 \cdots 1 \;\; \frac{1}{u} \;\; 1 \\ c_{(3)} = e_3 = e_3' = g_3 \cdots 1 \;\; 1 \;\; \frac{1}{u} \end{cases}$$

$$(39\delta)\quad \begin{cases} \mathfrak{c}_{(1)} = \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' = \mathfrak{g}_1 \cdots -\frac{1}{1+u} \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}_{(2)} = \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2' = \mathfrak{g}_2 \cdots 1 \quad -\frac{1}{1+u} \quad 1 \\ \mathfrak{c}_{(3)} = \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_3' = \mathfrak{g}_3 \cdots 1 \quad 1 \quad -\frac{1}{1+u} \end{cases}$$

$$(40\alpha)\quad \begin{cases} f_1 \cdots u \;\; 1 \;\; \frac{1}{u} \\ f_1' \cdots u \;\; \frac{1}{u} \;\; 1 \end{cases}$$

$$(40\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 \cdots 1+u \;\; -1 \;\; \frac{1}{1+u} \\ \mathfrak{f}_1' \cdots 1+u \;\; \frac{1}{1+u} \;\; -1 \end{cases}$$

$$(40\gamma)\left\{\begin{array}{lllll} h_{11} & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ h_{12} & \cdots & 0 & u & 1 \\ h_{13} & \cdots & 0 & 1 & u \end{array}\right.$$

$$(40\delta)\left\{\begin{array}{lllll} \mathfrak{h}_{11} & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \mathfrak{h}_{12} & \cdots & 0 & -(1+u) & 1 \\ \mathfrak{h}_{13} & \cdots & 0 & 1 & -(1+u) \end{array}\right.$$

$$(40\varepsilon)\left\{\begin{array}{lllll} h'_{11} & \cdots & \frac{2}{1+u} & 1 & 1 \\ h'_{21} & \cdots & u & u^2+u-1 & 1 \\ h'_{31} & \cdots & u & 1 & u^2+u-1 \end{array}\right.$$

$$(40\zeta)\left\{\begin{array}{lllll} \mathfrak{h}'_{11} & \cdots & -\frac{2}{u} & 1 & 1 \\ \mathfrak{h}'_{21} & \cdots & -(1+u) & u^2+u-1 & 1 \\ \mathfrak{h}'_{31} & \cdots & -(1+u) & 1 & u^2+u-1. \end{array}\right.$$

Von den in § 1 unter III) (10) aufgeführten 18 Schnittpunkten (vgl. auch § 2 unter IV) fallen hier 3mal je 6 in einen Punkt zusammen; diese drei Punkte $\mathfrak{C}_{(1)}, \mathfrak{C}_{(2)}, \mathfrak{C}_{(3)}$ sind die Eckpunkte des durch die drei Collineationsaxen $c_{(1)}, c_{(2)}, c_{(3)}$ gebildeten Dreiecks. Analog fallen von den 18 entsprechenden Verbindungsgeraden hier 3mal je 6 in einer Geraden zusammen; diese drei Geraden $C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)}$ sind die Seiten des durch die drei Centren $\mathfrak{c}_{(1)}, \mathfrak{c}_{(2)}, \mathfrak{c}_{(3)}$ besstimmten Dreiecks. Man erhält:

$$(39\varepsilon)\left\{\begin{array}{llllll} \mathfrak{C}_{(1)} & \cdots (c_{(2)}\, c_{(3)}) & \cdots & -\frac{1+u}{u} & 1 & 1 \\ \mathfrak{C}_{(2)} & \cdots (c_{(3)}\, c_{(1)}) & \cdots & 1 & -\frac{1+u}{u} & 1 \\ \mathfrak{C}_{(3)} & \cdots (c_{(1)}\, c_{(2)}) & \cdots & 1 & 1 & -\frac{1+u}{u} \end{array}\right.$$

$$(39\zeta)\left\{\begin{array}{llllll} C_{(1)} & \cdots |\mathfrak{c}_{(2)}\, \mathfrak{c}_{(3)}| & \cdots & -\frac{u}{1+u} & 1 & 1 \\ C_{(2)} & \cdots |\mathfrak{c}_{(3)}\, \mathfrak{c}_{(1)}| & \cdots & 1 & -\frac{u}{1+u} & 1 \\ C_{(3)} & \cdots |\mathfrak{c}_{(1)}\, \mathfrak{c}_{(2)}| & \cdots & 1 & 1 & -\frac{u}{1+u}. \end{array}\right.$$

Aus den Formeln (37) — (39) lässt sich eine Reihe von einfachen Lagenbeziehungen sofort ablesen. Die drei Geraden b_{rr}, die Axe c_1, die Geraden $C_{(r)}$ entsprechen sowohl in Bezug auf Δ, wie auf Δ' als Harmonikalen resp. den Punkten $\mathfrak{b}_{rr}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{C}_{(r)}$; während in Bezug auf Δ die Geraden h_{rr} den Punkten $\mathfrak{h}_{rr}$, in Bezug auf Δ' die Geraden h'_{rr} den Punkten $\mathfrak{h}'_{rr}$ als Harmonikalen entsprechen. Auf jeder der Geraden $a_r\,(a_r')$ bilden $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k\,(\mathfrak{a}_i', \mathfrak{a}_k')$ und $\mathfrak{b}_{rr}, \mathfrak{h}_{rr}\,(\mathfrak{b}_{rr}, \mathfrak{h}'_{rr})$ zwei harmo-

nische Punktepaare, und durch jeden Eckpunkt $\mathfrak{a}_r$ ($\mathfrak{a}_r'$) gehen je zwei harmonische Geradenpaare a_i, a_k (a_i', a_k') und $\mathfrak{b}_{rr}$, $\mathfrak{h}_{rr}$ (b_{rr}, h_{rr}') hindurch.

3) Für jede der vier perspectiven Lagen existirt ein Kegelschnitt, hinsichtlich dessen die Punkte und Geraden sich polar entsprechen. Die Gleichungen dieser Kegelschnitte sind (vgl. (7α) und (7β)): *)

$$
\begin{aligned}
&(7\alpha)\quad K_1 \equiv u x_1^2 + u x_2^2 + u x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0,\\
&(7\beta)\quad K_{(1)} \equiv u x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2u x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0,\\
&(7\gamma)\quad K_{(2)} \equiv x_1^2 + u x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2u x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0,\\
&(7\delta)\quad K_{(3)} \equiv x_1^2 + x_2^2 + u x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2u x_1x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Aus den Relationen:

$$
(41\alpha)\quad \begin{cases} K_1 - K_{(1)} \equiv (u-1)(x_2 - x_3)^2 = 0,\\ K_1 - K_{(2)} \equiv (u-1)(x_3 - x_1)^2 = 0,\\ K_1 - K_{(3)} \equiv (u-1)(x_1 - x_2)^2 = 0 \end{cases}
$$

und

$$
(41\beta)\quad \begin{cases} K_{(2)} - K_{(3)} \equiv (u-1)(x_2 - x_3)(-2x_1 + x_2 + x_3) = 0,\\ K_{(3)} - K_{(1)} \equiv (u-1)(x_3 - x_1)(x_1 - 2x_2 + x_3) = 0,\\ K_{(1)} - K_{(2)} \equiv (u-1)(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0 \end{cases}
$$

ergiebt sich leicht folgendes:

Der Kegelschnitt K_1 berührt doppelt jeden der drei Kegelschnitte $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$, so dass bez. b_{11}, b_{22}, b_{33} die Berührungssehnen sind, welche sich im Punkte $\mathfrak{c}_1$ schneiden, während die drei Pole $\mathfrak{b}_{11}$, $\mathfrak{b}_{22}$, $\mathfrak{b}_{33}$ auf der Geraden c_1 liegen. Die beiden Schnittpunkte II, III der Geraden c_1 mit $K_{(1)}$, sowie die beiden von $\mathfrak{c}_1$ an $K_{(1)}$ gelegten Tangenten 2, 3:

$$
(41\gamma)\quad \begin{cases} \text{II.} & 1 & \alpha & \alpha^2\\ \text{III.} & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{cases}
\qquad\qquad
(41\delta)\quad \begin{cases} 2. & 1 & \alpha^2 & \alpha\\ 3. & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{cases}
$$

bilden das Dreieck $\mathfrak{c}_1$ II III (oder c_1 2 3), welches für die drei Kegelschnitte $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$ ein gemeinsames Polardreieck ist. (Vgl. § 3 Formeln (25) und (26) mit Benutzung des oben angegebenen Verfahrens der Uebertragung). Dies Dreieck kann bei der Untersuchung auch mit Vortheil als Coordinatendreieck gewählt werden.**) In Bezug auf den Kegelschnitt K (S. Formel (32))

$$
(32\alpha)\qquad K \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0
$$

entsprechen hier nur bez. $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{b}_{rr}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{h}_{rr}$ polar den a_r, b_{rr}, c_1, h_{rr}.

Auf jeder der drei Berührungssehnen b_{11}, b_{22}, b_{33} liegen bez. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2'$; $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3'$ harmonisch zu den Berührungspunkten, und durch

*) Vgl. Vályi. l. c.
**) Vgl. Vályi. l. c.

die drei Pole $\mathfrak{b}_{11}$, $\mathfrak{b}_{22}$, $\mathfrak{b}_{33}$ gehen bez. a_1, a_1'; a_2, a_2'; a_3, a_3' harmonisch zu den Paaren gemeinsamer Tangenten hindurch. Die auf einer Berührungssehne b_{rr} liegenden Punkte $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_{(r)}$ (und die beiden durch einen Pol $\mathfrak{b}_{rr}$ gehenden Axen $c_1, c_{(r)}$) bilden zwei für die sich berührenden Kegelschnitte gemeinsame Polardreiecke $\mathfrak{b}_{rr}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{p}_r$ (oder $b_{rr}\,c_1\,p_r$) und $\mathfrak{b}_{rr}\,\mathfrak{c}_{(r)}\,\mathfrak{p}_{(r)}$ (oder $b_{rr}\,c_{(r)}\,p_{(r)}$), wobei (vgl. § 2 Formeln 14α) und 14β)):

$$(40\eta)\left\{\begin{array}{lrrr} \mathfrak{v}_1 \cdots & -2 & 1 & 1 \\ \mathfrak{p}_2 \cdots & 1 & -2 & 1 \\ \mathfrak{p}_3 \cdots & 1 & 1 & -2 \end{array}\right.$$

$$(40\vartheta)\left\{\begin{array}{lrrr} p_1 \cdots & -2 & 1 & 1 \\ p_2 \cdots & 1 & -2 & 1 \\ p_3 \cdots & 1 & 1 & -2 \end{array}\right.$$

$$(40\iota)\left\{\begin{array}{lrrr} \mathfrak{p}_{(1)} \cdots & -2u & 1 & 1 \\ \mathfrak{p}_{(2)} \cdots & 1 & -2u & 1 \\ \mathfrak{p}_{(3)} \cdots & 1 & 1 & -2u \end{array}\right.$$

$$(40\varkappa)\left\{\begin{array}{lccc} p_{(1)} \cdots & 2(1+u) & 1 & 1 \\ p_{(2)} \cdots & 1 & 2(1+u) & 1 \\ p_{(3)} \cdots & 1 & 1 & 2(1+u) \end{array}\right. \text{ ist.}$$

Je eine der drei Geraden p_r bildet mit der Geraden b_{rr} ein Paar gemeinschaftlicher Sehnen der beiden Kegelschnitte $K_{(i)}$ und $K_{(k)}$ (vgl. (41β)); je einer der drei Punkte $\mathfrak{p}_r$ bildet mit $\mathfrak{b}_{rr}$ ein Paar Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kegelschnitte.

4) Mit Benutzung der angegebenen Relationen lässt sich das polare Entsprechen der Punkte und Geraden in Beziehung auf einen der Kegelschnitte K, K_1, $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$ oder auf eines der Dreiecke Δ, Δ' oder auf das gemeinsame Polardreieck von $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$ leicht im Einzelnen verfolgen. Wir beschränken uns darauf, noch einige wichtige Lagenbeziehungen der vorliegenden Figur hervorzuheben und alsdann einige besonders interessante Specialfälle zu betrachten.

Aus den Formeln (39γ) und (39δ) im Vergleich mit (37α) und (37β) ist sofort zu erkennen, dass das Dreieck $c_{(1)}\,c_{(2)}\,c_{(3)}$ zu dem Dreieck Δ und ebenso das Dreieck $\mathfrak{c}_{(1)}\,\mathfrak{c}_{(2)}\,\mathfrak{c}_{(3)}$ zu dem Dreieck Δ *vier*fach perspectiv ist und zwar so, dass für die erste Beziehung die Axen c_1; a_1', a_2', a_3', für die zweite Beziehung die Centren $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'$ sind. Werden bei der ersten (zweiten) Beziehung die Centren durch $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{c}_{(1)}', \mathfrak{c}_{(2)}', \mathfrak{c}_{(3)}'$ (die Axen durch c_1; $c_{(1)}', c_{(2)}', c_{(3)}'$), die Seiten (Ecken) des durch die drei Centren $\mathfrak{c}_{(1)}', \mathfrak{c}_{(2)}', \mathfrak{c}_{(3)}'$ (durch die drei Axen $c_{(1)}', c_{(2)}', c_{(3)}'$) gebildeten Dreiecks durch $C_{(1)}', C_{(2)}', C_{(3)}'$ (durch $\mathfrak{C}_{(1)}', \mathfrak{C}_{(2)}', \mathfrak{C}_{(3)}'$) bezeichnet, so findet folgende geschlossene Kette von Relationen statt:

Es ist Dreieck $a_1 a_2 a_3$ vierfach perspectiv zu

$$(42\alpha)\quad \begin{cases} a_1' \; a_2' \; a_3' & \text{mit Axen} \quad c_1;\; c_{(1)},\; c_{(2)},\; c_{(3)} \\ c_{(1)}\, c_{(2)}\, c_{(3)} & \text{,,} \qquad \text{,,} \quad c_1;\; a_1',\; a_2',\; a_3' \end{cases}$$

$$(42\beta)\quad \begin{cases} C_{(1)}\, C_{(2)}\, C_{(3)} & \text{mit Axen} \quad c_1;\; c'_{(1)},\; c'_{(2)},\; c'_{(3)} \\ c'_{(1)}\; c'_{(2)}\; c'_{(3)} & \text{,,} \qquad \text{,,} \quad c_1;\; C_{(1)},\; C_{(2)},\; C_{(3)} \end{cases}$$

$$(42\gamma)\quad \begin{cases} C'_{(1)}\, C'_{(2)}\, C'_{(3)} & \text{mit Axen} \quad c_1;\; c''_{(1)},\; c''_{(2)},\; c''_{(3)} \\ c''_{(1)}\; c''_{(2)}\; c''_{(3)} & \text{,,} \qquad \text{,,} \quad c_1;\; C'_{(1)},\; C'_{(2)},\; C'_{(3)} \end{cases}$$

$$(42\delta)\quad C''_{(r)} = c''_{(r)}.$$

Es ist Dreieck $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ vierfach perspectiv zu

$$(42\alpha')\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1' \; \mathfrak{a}_2' \; \mathfrak{a}_3' & \text{mit Centren} \quad \mathfrak{c}_1;\; \mathfrak{c}_{(1)},\; \mathfrak{c}_{(2)},\; \mathfrak{c}_{(3)} \\ \mathfrak{c}_{(1)}\; \mathfrak{c}_{(2)}\; \mathfrak{c}_{(3)} & \text{,,} \qquad \text{,,} \quad \mathfrak{c}_1;\; \mathfrak{a}_1',\; \mathfrak{a}_2',\; \mathfrak{a}_3' \end{cases}$$

$$(42\beta')\quad \begin{cases} \mathfrak{C}_{(1)}\mathfrak{C}_{(2)}\mathfrak{C}_{(3)} & \text{mit Centren} \quad \mathfrak{c}_1;\; \mathfrak{c}'_{(1)},\; \mathfrak{c}'_{(2)},\; \mathfrak{c}'_{(3)} \\ \mathfrak{c}'_{(1)}\; \mathfrak{c}'_{(2)}\; \mathfrak{c}'_{(3)} & \text{,,} \qquad \text{,,} \quad \mathfrak{c}_1;\; \mathfrak{C}_{(1)},\; \mathfrak{C}_{(2)},\; \mathfrak{C}_{(3)} \end{cases}$$

$$(42\gamma')\quad \begin{cases} \mathfrak{C}'_{(1)}\mathfrak{C}'_{(2)}\mathfrak{C}'_{(3)} & \text{mit Centren} \quad \mathfrak{c}_1;\; \mathfrak{c}''_{(1)},\; \mathfrak{c}''_{(2)},\; \mathfrak{c}''_{(3)} \\ \mathfrak{c}''_{(1)}\; \mathfrak{c}''_{(2)}\; \mathfrak{c}''_{(3)} & \text{,,} \qquad \text{,,} \quad \mathfrak{c}_1;\; \mathfrak{C}'_{(1)},\; \mathfrak{C}'_{(2)},\; \mathfrak{C}'_{(3)} \end{cases}$$

$$(42\delta')\quad \mathfrak{C}''_{(r)} = \mathfrak{c}''_{(r)}.$$

Die Werthe für die Coordinaten der Axen und Centren übersieht man aus der nachfolgenden Zusammenstellung, in welcher nur die dem ersten Index (1) entsprechenden Werthe angegeben sind, aus welchen die übrigen durch cyklische Vertauschung resultiren:

$$(43\alpha)\quad \begin{cases} a_1' \cdots & u \quad 1 \quad 1 \\ c_{(1)} \cdots & \dfrac{1}{u} \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

$$(43\beta)\quad \begin{cases} C_{(1)} \cdots & -\dfrac{u}{1+u} \quad 1 \quad 1 \\ c'_{(1)} \cdots & -\dfrac{1+u}{u} \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

$$(43\gamma)\quad \begin{cases} C'_{(1)} \cdots & -\dfrac{1}{1+u} \quad 1 \quad 1 \\ c''_{(1)} \cdots & -(1+u) \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

$$(43\alpha')\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1' \cdots & -(1+u) \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}_{(1)} \cdots & -\dfrac{1}{1+u} \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

$$(43\beta')\quad \begin{cases} \mathfrak{C}_{(1)} \cdots & -\dfrac{1+u}{u} \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}'_{(1)} \cdots & -\dfrac{u}{1+u} \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

$$(43\gamma')\quad \begin{cases} \mathfrak{C}'_{(1)} \cdots & \dfrac{1}{u} \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{c}''_{(1)} \cdots & u \quad 1 \quad 1 \end{cases}$$

Aus dieser Zusammenstellung ist auch das polare Entsprechen der Axen und Centren leicht ersichtlich.

I) Die Construction der fünften und sechsten Ecke $\mathfrak{a}_2'$ und $\mathfrak{a}_3'$ (Seite a_2' und a_3'), wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_1'$ (a_1, a_2, a_3 und a_1') gegeben sind, ergiebt sich einfach in folgender Weise*):

Nimm auf $b_{11} = | \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1' |$ den Punkt $\mathfrak{c}_1$ willkürlich an, ziehe $b_{33} = | \mathfrak{a}_3 \mathfrak{c}_1 |$, welches $\mathfrak{a}_2'$ und $\mathfrak{c}_{(3)}$ enthält, alsdann construire:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a}_3 \mathfrak{c}_1, \ \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1') &= (b_{33} b_{21}) = \mathfrak{c}_{(3)}, \\
(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_{(3)}, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_1) &= (b_{12} b_{22}) = \mathfrak{a}_2', \\
(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1', \ \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_2') &= (b_{11} b_{32}) = \mathfrak{c}_{(1)}, \\
(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_{(1)}, \mathfrak{a}_3 \mathfrak{c}_1) &= (b_{23} b_{33}) = \mathfrak{a}_3'.
\end{aligned}
$$

Das Doppelverhältniss der 4 Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1', \mathfrak{c}_1, \mathfrak{h}_{11}$ hat den Werth:

$$
(43\,\delta) \qquad \varkappa = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{c}_1 \mathfrak{h}_{11}) = \frac{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_1'} : \frac{\mathfrak{h}_{11} \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{h}_{11} \mathfrak{a}_1'} = \frac{1+u}{2+u}
$$

oder

$$
(43\,\varepsilon) \qquad \varkappa' = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{h}_{11} \mathfrak{a}_1' \mathfrak{c}_1) = \frac{\mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_1' \mathfrak{h}_{11}} : \frac{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{h}_{11}} = -\frac{1}{1+u}.
$$

II) Von *besonderen Fällen* für die Lage zweier vierfach perspectiven Dreiecke sei zunächst der durch die Bedingung:

$$
(44\,\alpha) \qquad u = 0
$$

bestimmte erwähnt. Alsdann vereinfacht sich die Figur wesentlich, indem verschiedene Geraden und Punkte bez. aufeinanderfallen. Es wird nämlich, wie unmittelbar aus den Formeln (37) — (43) hervorgeht,

$$
(44\,\beta) \quad \begin{cases} a_r' = C_{(r)} = b_{ri} = b_{rk} = h_{rr}, \\ a_r = c_{(r)} = c_{(r)}' = f_i' = f_k = h_{ik} = h_{ki}, \\ b_{rr} = h_{ir}' = h_{kr}', \\ h_{rr}' = p_{(r)}, \end{cases}
$$

$$
(44\,\gamma) \quad \begin{cases} \mathfrak{a}_r' = \mathfrak{c}_{(r)} = \mathfrak{f}_k = \mathfrak{f}_i' = \mathfrak{h}_{ik}' = \mathfrak{h}_{ki}', \\ \mathfrak{a}_r = \mathfrak{C}_{(r)} = \mathfrak{C}_{(r)}' = \mathfrak{b}_{ir} = \mathfrak{b}_{kr} = \mathfrak{h}_{rr}', \\ \mathfrak{b}_{rr} = \mathfrak{h}_{ri} = \mathfrak{h}_{rk}, \\ \mathfrak{h}_{rr} = \mathfrak{p}_{(r)} = \mathfrak{c}_{(r)}' = \mathfrak{c}_{(r)}''. \end{cases}
$$

D. h. die Ecken $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ liegen in diesem Falle bez. auf den Seiten a_1', a_2', a_3' und das Dreieck der drei Axen $c_{(1)}, c_{(2)}, c_{(3)}$ fällt mit dem zweiten Dreiecke Δ' zusammen. Die so entstehende Figur ist die wohlbekannte, welche erhalten wird, wenn ein Punkt $\mathfrak{c}_1 \ldots 1\ 1\ 1$ mit den Ecken $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ eines Dreiecks verbunden und in jedem Eckpunkte der vierte harmonische Strahl zu der Verbindungslinie

*) Vgl. Schröter, Math. Ann. Bd. II. S. 556.

construirt wird, sodass diese beiden durch die dort zusammenstossenden Dreiecksseiten harmonisch getrennt sind. Die 4 Punkte, in welchen sich diese 6 Geraden (die drei Verbindungslinien und die drei vierten harmonischen Linien) zu je dreien schneiden, sind $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_{(1)} = \mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{c}_{(2)} = \mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{c}_{(3)} = \mathfrak{a}_3'$. Auf jeder Dreiecksseite a_r liegen die Punkte $\mathfrak{b}_{rr}$ und $\mathfrak{h}_{rr}$ harmonisch zu $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$, auf jeder Geraden b_{rr} liegen $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{h}_{rr}$ harmonisch zu $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_{(r)}$ (vgl. Formel (43 ε)).

Für den Werth

$$(44\delta) \qquad u = -1$$

(vgl. § 2 unter VI) resultirt der entsprechende Fall, in welchem die drei Ecken $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$ bez. auf den Seiten a_1, a_2, a_3 liegen und das Dreieck der drei Centren $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(2)}$, $\mathfrak{c}_{(3)}$ mit dem zweiten Dreiecke Δ' zusammenfällt. Diese Figur entsteht wesentlich dadurch, dass die Seiten des Dreiecks Δ durch eine Gerade $c_1 \ldots 1\ 1\ 1$ geschnitten werden und auf jeder Seite zu dem Schnittpunkte der 4[te] harmonische Punkt construirt wird, sodass diese beiden durch die beiden Dreieckspunkte harmonisch getrennt sind. Die 4 Verbindungsgeraden, welche je drei dieser 6 Punkte (der drei Schnittpunkte und der drei vierten harmonischen Punkte) enthalten, sind die Geraden c_1 und $c_{(1)} = a_1'$, $c_{(2)} = a_2'$, $c_{(3)} = a_3'$. Durch jeden Eckpunkt des Dreiecks Δ gehen je zwei Gerade b_{rr} und h_{rr}' harmonisch zu a_i und a_k, durch jeden Punkt $\mathfrak{b}_{rr}$ gehen a_r, h_{rr}' harmonisch zu c_1, $c_{(r)}$ hindurch.

Diese zweite (dem Werthe $u = -1$ entsprechende) Figur ist auch schon in der ersten (dem Werthe $u = 0$ entsprechenden) — oder umgekehrt die erste in der zweiten — enthalten, wobei die Punkte $\mathfrak{h}_{rr}$ der ersten den Eckpunkten $\mathfrak{a}_r'$ der zweiten Figur — die Geraden h_{rr}' der zweiten den Seiten a_r' der ersten Figur — entsprechen.

Wir haben diesen Specialfall, welcher auf eine sehr bekannte Figur führt, einmal desswegen besonders hervorgehoben, weil er das Analogon zu dem weiter unten zu betrachtenden Falle von zwei *vierfach perspectiven Tetraedern* (s. § 10 4)) bildet. Zweitens aber bietet dieser Specialfall deshalb Interesse, weil wenn die ihm entsprechende ebene Figur durch Centralprojection auf eine Kugelfläche übertragen wird, das s. g. *harmonische Hexakisoktaedernetz**) entsteht. Dieses sphärische Netz geht, wenn speciell das sphärische Dreieck Δ ein Oktantendreieck, der Punkt $\mathfrak{c}_{(1)}$ der Mittelpunkt dieses Oktantendreieckes wird, in das *reguläre Oktaeder-Hexaeder-Netz* über, aus welchem sich alle regulären und halbregulären Polyeder der Oktaeder- und der Tetraedergruppe in einfacher Weise ergeben**).

---

*) Vgl. des Verf. Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. Leipzig, B. G. Teubner 1883. S. 420 ffg.

**) Ebendaselbst.

III) Ein zweiter beachtenswerther Specialfall ist derjenige, in welchem sich die drei Axen $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, $c_{(3)}$ in einem Punkte schneiden, wobei zugleich die drei Centra $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(2)}$, $\mathfrak{c}_{(3)}$ auf einer Geraden liegen. Die Bedingung hierfür ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{u} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{u} + 2\right) = 0,$$

d. h.

$$(45\alpha) \qquad u = -\frac{1}{2},$$

wenn von dem Werthe $u = 1$, welchem ein leicht zu erledigender trivialer Fall entspricht, abgesehen wird.

Die drei Axen $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, $c_{(3)}$ fallen dann bez. mit den Geraden p_1, p_2, p_3 (s. (40ϑ)) zusammen und schneiden sich im Centrum $\mathfrak{c}_1$; andererseits liegen die drei Centren $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(2)}$, $\mathfrak{c}_{(3)}$, welche bez. mit den Punkten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ (s. (40η)) zusammenfallen, auf der Axe c_1. In dieser Axe c_1 fallen auch die drei Geraden $p_{(1)}$, $p_{(2)}$, $p_{(3)}$ (s. (40$\varkappa$)), und in dem Centrum $\mathfrak{c}_1$ die drei Punkte $\mathfrak{p}_{(1)}$, $\mathfrak{p}_{(2)}$, $\mathfrak{p}_{(3)}$ (s. (40ι)) zusammen.

Weitere einfache Lagenbeziehungen dieser besonderen Figur ergeben sich mit Leichtigkeit; wir beschränken uns daher darauf, noch auf die einfache Construction von $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$ (oder a_2', a_3'), falls Δ und $\mathfrak{a}_1'$ (oder a_1') gegeben sind, hinzuweisen. Der Punkt $\mathfrak{c}_1$ (siehe unter I dieses Paragraphen) ist jetzt nicht mehr willkürlich auf b_{11} annehmbar, sondern dadurch bestimmt, dass das Doppelverhältniss (vgl. (43δ))

$$(45\beta) \qquad \varkappa = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1'} : \frac{\mathfrak{b}_{11}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_{11}\mathfrak{a}_1'} = \frac{1}{3}$$

sein muss.

Für

$$(45\gamma) \qquad u = -2$$

resultirt offenbar im Wesentlichen derselbe Fall; denn wegen $U = 0$ schneiden sich jetzt die drei Seiten a_1', a_2', a_3', wobei

$$a_r' = C_{(r)} = h_{rr}' = p_r$$

ist, in dem einen Punkte:

$$\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_2' = \mathfrak{a}_3' = \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_{(1)} = \mathfrak{c}_{(2)} = \mathfrak{c}_{(3)} \cdots 1\ 1\ 1,$$

während die drei Punkte:

$$\mathfrak{c}_{(1)}',\ \mathfrak{c}_{(2)}',\ \mathfrak{c}_{(3)}', \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{c}_{(r)}' = \mathfrak{c}_{(r)}''$$

ist, auf einer Geraden, nämlich auf $c_1 \cdots 1\ 1\ 1$ liegen.

Auf den hier behandelten Specialfall sind wir bereits in § 3 unter II. 1) geführt worden. Derselbe war dort der am Eingange dieses

Paragraphen erwähnten zweiten Art der Darstellung der Lagenbeziehungen zweier vierfach perspectiven Dreiecke entsprechend durch das Werthsystem (s. Formel (33)):

$$u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_2 = u_3 = -2$$

charakterisirt worden. Der der ersten Art der Darstellung entsprechende gemeinsame Werth für u ist in der That

$$\sqrt{u_1} = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_3} = -\frac{1}{2}.$$

IV) Von ganz besonderem Interesse ist endlich derjenige Specialfall für die Lage zweier vierfach perspectiven Dreiecke, welcher durch die Bedingung:

$$(46\alpha) \qquad 1 + u = \frac{1}{u}$$

oder

$$(46\beta) \qquad u^2 + u - 1 = 0$$

oder

$$(46\gamma) \qquad u = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oder

$$(46\delta) \qquad \begin{cases} u' = \operatorname{tang} \varphi \\ u'' = -\operatorname{cotg} \varphi \end{cases}$$

(vgl. § 3 Formel (35)) charakterisirt ist.

Zufolge dieser Bedingung wird nämlich (vgl. die Formeln (38)—(40)):

$$(47\alpha) \quad \begin{cases} b_{ik} = h_{ik} = h'_{ik} \\ b_{ki} = h_{ki} = h'_{ki} \end{cases} \qquad (47\beta) \quad \begin{cases} \mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{h}_{ik} = \mathfrak{h}'_{ik} \\ \mathfrak{b}_{ki} = \mathfrak{h}_{ki} = \mathfrak{h}'_{ki} \end{cases}$$

d. h. es schneiden sich sowohl die drei Linien a_i, a'_k, b_{ik} und a'_i, a_k, b_{ki} je in einem Punkte, als auch es liegen je drei Punkte $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}'_k$, $\mathfrak{b}_{ik}$ und $\mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{b}_{ki}$ auf einer Geraden.

Die 15 *Verbindungslinien der* 6 *Ecken der beiden Dreiecke* Δ *und* Δ' *schneiden sich zehnmal zu je dreien in einem Punkte* (*den vier Centren* $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(2)}$, $\mathfrak{c}_{(3)}$ *und den* 6 *eben erwähnten Schnittpunkten*) *und die* 15 *Schnittpunkte der* 6 *Seiten der beiden Dreiecke* Δ *und* Δ' *liegen* 10 *mal zu dreien auf einer Geraden* (*den vier Axen* c_1, $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, $c_{(3)}$ *und den eben erwähnten sechs Geraden*).

Diese Figur ist diejenige eines s. g. 10*fach* Brianchon'schen Sechsecks (bez. Pascal'schen Sechsseits), auf welche wir in § 3, II. 2) auf einem anderen Wege geführt worden sind. Es soll dieselbe in § 6 noch einer genaueren Betrachtung mit Rücksicht auf diese zweifache Art der Entstehung unterworfen werden.

§ 5.

Sechsfach perspective Dreiecke.

1) Der Vollständigkeit wegen soll in diesem Paragraphen noch kurz der letzte mögliche Fall für die Lage zweier perspectiven Dreiecke, nämlich der Fall der *sechs*fachen Perspectivität*) betrachtet werden. In diesem Falle müssen die drei Beziehungen (§ 3):

$$(1\beta)\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1' & 2' & 3' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_1 - c_1} \end{array}\right. \qquad (1\gamma)\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2' & 3' & 1' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_2 - c_2} \end{array}\right. \qquad (1\delta)\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3' & 1' & 2' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_3 - c_3} \end{array}\right.$$

und die drei Beziehungen (§ 2 und § 4):

$$(11\alpha)\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1' & 3' & 2' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_{(1)} - c_{(1)}} \end{array}\right. \qquad (11\beta)\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3' & 2' & 1' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_{(2)} - c_{(2)}} \end{array}\right. \qquad (11\gamma)\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2' & 1' & 3' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_{(3)} - c_{(3)}} \end{array}\right.$$

zugleich bestehen, wodurch sich die beiden Bedingungen:

$$(17) \qquad u_1 u_2 u_3 = 1,$$

$$(12\delta) \qquad u_1 = u_2 = u_3 = u$$

ergeben, welche zu der Relation:

$$(48) \qquad u^3 = 1$$

oder

$$(48\alpha) \qquad u = 1,\ \alpha,\ \alpha^2$$

führen, wo α eine complexe Cubikwurzel der Einheit bedeutet.

2) Für den Werth $u=\alpha$ erhält man (s. § 4 Formeln (37) — (40)) u. A.:

$$(49\alpha)\ \left\{\begin{array}{lccc} a_1' \cdots & \alpha & 1 & 1 \\ a_2' \cdots & 1 & \alpha & 1 \\ a_3' \cdots & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right. \qquad (49\beta)\ \left\{\begin{array}{lccc} \mathfrak{a}_1' \cdots & \alpha^2 & 1 & 1 \\ \mathfrak{a}_2' \cdots & 1 & \alpha^2 & 1 \\ \mathfrak{a}_3' \cdots & 1 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right.$$

$$(50\alpha)\ \left\{\begin{array}{lccc} b_{11} \cdots & 0 & -1 & 1 \\ b_{12} \cdots & 0 & -1 & \alpha^2 \\ b_{13} \cdots & 0 & \alpha^2 & -1 \end{array}\right. \qquad (50\beta)\ \left\{\begin{array}{lccc} \mathfrak{b}_{11} \cdots & 0 & -1 & 1 \\ \mathfrak{b}_{12} \cdots & 0 & -1 & \alpha \\ \mathfrak{b}_{13} \cdots & 0 & \alpha & -1 \end{array}\right.$$

$$(51\alpha)\ \left\{\begin{array}{lccc} c_1 \cdots & 1 & 1 & 1 \\ c_2 \cdots & 1 & \alpha^2 & \alpha \\ c_3 \cdots & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}\right. \qquad (51\beta)\ \left\{\begin{array}{lccc} \mathfrak{c}_1 \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{c}_2 \cdots & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \mathfrak{c}_3 \cdots & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{array}\right.$$

$$(52\alpha)\ \left\{\begin{array}{lccc} c_{(1)} \cdots & \alpha^2 & 1 & 1 \\ c_{(2)} \cdots & 1 & \alpha^2 & 1 \\ c_{(3)} \cdots & 1 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right. \qquad (52\beta)\ \left\{\begin{array}{lccc} \mathfrak{c}_{(1)} \cdots & \alpha & 1 & 1 \\ \mathfrak{c}_{(2)} \cdots & 1 & \alpha & 1 \\ \mathfrak{c}_{(3)} \cdots & 1 & 1 & \alpha. \end{array}\right.$$

*) Vgl. **Rosanes**, **Schröter**, **Vályi** l. c.

Aus diesen Werthen für die Coordinaten ist sofort zu erkennen, dass die drei Axen c_1, c_2, c_3 der ersten Gruppe ein Dreieck Γ bilden, dessen Ecken die Centren $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ dieser Gruppe sind und dass ebenso das von den drei Axen $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, $c_{(3)}$ der zweiten Gruppe gebildete Dreieck $\Gamma^{(1)}$ die Centren $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(2)}$, $\mathfrak{c}_{(3)}$ dieser Gruppe zu Eckpunkten hat. Die vier Dreiecke Δ, Δ', Γ, $\Gamma^{(1)}$ stehen in einer solchen Beziehung, dass je zwei derselben sechsfach perspectiv liegen und die Seiten (Ecken) des dritten und vierten Dreiecks die erste und zweite Gruppe der Axen (Centren) der Perspectivität bilden. Die 9 Verbindungslinien b_{rr}, b_{ik}, b_{ki} der Eckpunkte (die 9 Schnittpunkte $\mathfrak{b}_{rr}$, $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ki}$ der Seiten) je zweier dieser Dreiecke schneiden sich zu je dreien in den sechs Centren (liegen zu je dreien auf den sechs Axen). Auf jeder der 9 Geraden z. B. b_{11} liegen die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_{(1)}$ und $\mathfrak{h}_{11}$, für welche der Werth der beiden Doppelverhältnisse $\varkappa'$ (s. Formel (43ε))

$$\varkappa_1' = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{h}_{11} \mathfrak{a}_1' \mathfrak{c}_1) = \alpha; \qquad \varkappa'_{(1)} = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{h}_{11} \mathfrak{a}_1' \mathfrak{c}_{(1)}) = \alpha^2$$

ist.*)

3) Für die sechs Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 und $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$, welche den sechs perspectiven Lagen entsprechen (s. Formeln (7) in § 3 und § 4):

$$(53\alpha)\quad \begin{cases} K_1 \equiv \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0, \\ K_2 \equiv x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha^2 x_3^2 + 2\alpha^2 x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2\alpha x_1x_2 = 0, \\ K_3 \equiv x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2\alpha^2 x_2x_3 + 2\alpha x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

$$(53\beta)\quad \begin{cases} K_{(1)} \equiv \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0, \\ K_{(2)} \equiv x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2\alpha x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0, \\ K_{(3)} \equiv x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2\alpha x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

ergeben sich ebenfalls einfache Lagenbeziehungen, von welchen wir nur einige der hauptsächlichsten hervorheben wollen.

4) Jeder der drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 der ersten Gruppe berührt jeden der drei Kegelschnitte $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$ der zweiten Gruppe doppelt, wobei die 9 Geraden b_{rr}, b_{ik}, b_{ki} die Berührungssehnen, die 9 Punkte $\mathfrak{b}_{rr}$, $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ki}$ die Pole dieser Berührungssehnen sind. Die beiden durch die 6 Schnittpunkte $\mathfrak{c}_r$ und $\mathfrak{c}_{(r)}$ dieser Geraden und durch die 6 Verbindungslinien c_r und $c_{(r)}$ der Punkte $\mathfrak{b}$ gebildeten Dreiecke Γ und $\Gamma^{(1)}$ sind bezüglich gemeinsame Polardreiecke für die drei Kegelschnitte $K_{(r)}$ und K_r der zweiten und ersten Gruppe. Dabei sind die Eckpunkte $\mathfrak{c}_r$ und $\mathfrak{c}_{(r)}$ der Dreiecke Γ und $\Gamma^{(1)}$ bezüglich die Schnittpunkte der Geraden c_r mit $K_{(r)}$ und der Geraden $c_{(r)}$ mit K_r, die Geraden c_r und $c_{(r)}$ selbst bezüglich die von den Punkten $\mathfrak{c}_r$ an die Kegelschnitte $K_{(r)}$ und von den Punkten $\mathfrak{c}_{(r)}$ an die Kegelschnitte K_r ge-

*) Vgl. Schröter l. c. S. 559.

legten Tangenten. Die zahlreichen sich hieraus ergebenden polaren Beziehungen zwischen den Punkten und Geraden der Figur sollen hier nicht weiter verfolgt werden.

Dass übrigens dieser Fall nicht — wie Vályi meint — ausschliesslich algebraisches Interesse hat, geht aus der von Schröter*) angestellten Betrachtung hervor, bei welcher die (reellen) Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1'$ willkürlich angenommen werden und die reelle Seite a_1' construirt wird. Analytisch kommt dies einfach darauf hinaus, in den obigen Ausdrücken die erste Punktcoordinate mit α, die erste Liniencoordinate mit α^2 zu multipliciren, wodurch die Coordinaten der Seiten und Ecken des Dreiecks Δ' übergehen in:

$$(49\gamma)\ \begin{cases} a_1' \cdots 1 & 1 & 1 \\ a_2' \cdots \alpha^2 & \alpha & 1 \\ a_3' \cdots \alpha^2 & 1 & \alpha \end{cases} \qquad (49\delta)\ \begin{cases} \mathfrak{a}_1' \cdots 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{a}_2' \cdots \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \mathfrak{a}_3' \cdots \alpha & 1 & \alpha^2. \end{cases}$$

§ 6.

Ueber das zehnfach Brianchon'sche Sechseck (Pascal'sche Sechsseit).

Wir wollen nunmehr noch den wichtigen besonderen Fall für die Lage zweier *vier*fach perspectiven Dreiecke, welcher in § 4 IV) erhalten wurde und welchem die Figur eines s. g. *zehnfach* Brianchon'schen Sechsecks (bez. eines *zehnfach* Pascal'schen Sechsseits) entspricht, etwas genauer betrachten**). Es wird sich dann auch der Zusammenhang dieser Figur mit derjenigen herausstellen, welche in § 3 II. 2) als besonderer Fall zweier dreifach perspectiven Dreiecke sich darbot,.

1) Wie bereits in § 4 IV) angegeben wurde, schneiden sich in diesem durch den besonderen Werth $u = \operatorname{tang} \varphi$ (vgl. Formeln (46) und (47)) bestimmten Falle die 15 Verbindungslinien der 6 Eckpunkte der beiden Dreiecke Δ und Δ' zehnmal zu je dreien in einem Punkte, ebenso wie die 15 Schnittpunkte der 6 Seiten dieser Dreiecke zehnmal zu je dreien auf einer Geraden liegen. Die sechs Eckpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$ bilden also zehn Gruppen von je zwei vierfach perspectiven Dreiecken oder repräsentiren zehnmal die Eckpunkte eines Brianchon'schen Sechsecks, sodass von den 60 Sechsecken, welche in bekannter Weise aus jenen 6 Punkten sich bilden lassen, 40 Brianchon'sche sind. Analog bilden die sechs Seiten a_1, a_2, a_3, a_1', a_2', a_3'

*) L. c. S. 560 ffg.

**) Vgl. Clebsch, Mathem. Annalen Bd. IV, S. 284 und 345. F. Klein, ebenda Bd. XII, S. 531 flg. und „Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig 1884, B. G. Teubner“ S. 216—218. E. Hess, „Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung. Leipzig 1883. B. G. Teubner“. S. 422—424.

zehn Gruppen von je zwei vierfach perspectiven Dreiecken oder repräsentiren zehnmal die Seiten eines Pascal'schen Sechsseits, so dass von den 60 Sechsseiten, welche aus jenen 6 Seiten sich bilden lassen, 40 Pascal'sche sind. Wir werden uns im Folgenden auf die Betrachtung der ersteren Figur des zehnfach Brianchon'schen Sechsecks im Wesentlichen beschränken, da die Eigenschaften der *zweiten* Figur (des zehnfach Pascal'schen Sechsseits) sich aus denen der ersteren einfach durch Vertauschung der Punkte und Geraden miteinander ergeben.

2) Was zunächst die *Construction* einer solchen Figur anlangt, z. B. die der Punkte $\mathfrak{a}_2'$ und $\mathfrak{a}_3'$, wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_1'$ beliebig angenommen sind, so folgt dieselbe unmittelbar daraus, dass der Werth des Doppelverhältnisses $\varkappa$ (s. § 4 unter I) Formel (43δ)

$$(43\zeta) \qquad \varkappa = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{c}_1 \mathfrak{h}_{11}) = \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{2 + \operatorname{tang} \varphi} = \operatorname{tang} \varphi$$

ist. Der Punkt $\mathfrak{c}_1$ auf $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{h}_{11}$ wird also einfach erhalten, wenn man durch $\mathfrak{a}_1$ eine in $\mathfrak{h}_0$ halbirte, in $\mathfrak{c}_0$ im goldenen Schnitt getheilte Gerade $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_0'$ zieht, so dass

$$\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{h}_0} = \overline{\mathfrak{h}_0 \mathfrak{a}_0'},$$
$$\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_0} = \overline{\mathfrak{c}_0 \mathfrak{a}_0'} \cdot \operatorname{tang} \varphi$$

ist und nach folgendem Schema construirt:

$$(\mathfrak{h}_0 \mathfrak{h}_{11},\ \mathfrak{a}_0' \mathfrak{a}_1) = \mathfrak{u},$$
$$(\mathfrak{u}\, \mathfrak{c}_0,\ \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_0') = \mathfrak{c}_1.$$

Dann ergeben sich $\mathfrak{a}_2'$ und $\mathfrak{a}_3'$ sofort nach § 4 unter I).

3) Die sechs *Fundamental*punkte $\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_r'$

$$(54\alpha) \qquad \mathfrak{a}_1' \cdots - \operatorname{cotg} \varphi \quad 1 \quad 1$$

(vgl. (37β)), welche wir in der Folge auch durch $\mathfrak{G}_1 \ldots \mathfrak{G}_6$ bezeichnen wollen, werden durch die 15 Geraden $a_r, a_r', b_{rr}, b_{ik}, b_{ki}$, wobei

$$(54\beta) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad a_1' \cdots \operatorname{tang} \varphi & 1 \quad 1 \\ b_{23} = h_{23} = h_{23}' \cdots \operatorname{cotg} \varphi & 0 \quad 1 \\ b_{32} = h_{32} = h_{32}' \cdots \operatorname{cotg} \varphi & 1 \quad 0 \end{cases}$$

ist, (vgl. Formeln (38) und (40)), welche nunmehr durch $B_1 \ldots B_{(15)}$ *) bezeichnet werden sollen, verbunden. Diese 15 Geraden B_r schneiden sich zu dreien in den zehn *Centren* $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_{(r)}, \mathfrak{b}_{ik}, \mathfrak{b}_{ki}$,

$$(54\gamma) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad \mathfrak{c}_{(1)} \cdots - \operatorname{tang} \varphi & 1 \quad 1 \\ \mathfrak{b}_{23} = \mathfrak{h}_{23} = \mathfrak{h}_{23}' \cdots \operatorname{tang} \varphi & 0 \quad -1 \\ \mathfrak{b}_{32} = \mathfrak{h}_{32} = \mathfrak{h}_{32}' \cdots \operatorname{tang} \varphi & -1 \quad 0 \end{cases}$$

*) Die um die zweistelligen Zahlen gesetzte Klammer soll andeuten, dass die beiden Zahlen nicht mehr zwei verschiedene Indices, sondern eine zweistellige dekadische Zahl bedeuten.

(vgl. (39β) und (δ) und (38β)) welche durch $\mathfrak{C}_1, \ldots \mathfrak{C}_{(10)}$ bezeichnet werden sollen. Die 15 Punkte $\mathfrak{h}'_{rr}$, $\mathfrak{h}_{rr}$, $\mathfrak{b}_{rr}$, $\mathfrak{k}'_r$, $\mathfrak{k}_r$

$$(54\delta)\qquad \begin{cases} \mathfrak{h}'_{11} \cdots -2 \operatorname{cotg} \varphi & 1 & 1 \\ \mathfrak{k}_1' \cdots \quad \operatorname{cotg} \varphi & \operatorname{tang} \varphi & -1 \\ \mathfrak{k}_1 \cdots \quad \operatorname{cotg} \varphi & -1 & \operatorname{tang} \varphi \end{cases}$$

(vgl. Formeln (40)) entsprechen bezüglich den 15 Geraden B_r, nämlich bez.

$$(54\varepsilon)\qquad \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathfrak{h}'_{rr} & \mathfrak{h}_{rr} & \mathfrak{b}_{rr} & \mathfrak{k}_r' & \mathfrak{k}_r \\ a_r & a_r' & b_{rr} & b_{ki} & b_{ik} \end{array} \right.$$

polar in Beziehung auf den Kegelschnitt:

$$(54\zeta)\qquad K_0 \equiv \sqrt{5}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0;$$

diese 15 Punkte sollen daher entsprechend durch $\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_{(15)}$ bezeichnet werden.

4) Die neue, der vorliegenden Figur angemessenere Art der Bezeichnung für die Punkte und Geraden — wobei die Reihenfolge der zusammengehörigen Punkte und Geraden willkürlich ist — und deren Beziehung zu der früher angewendeten ist aus der nachfolgenden Zusammenstellung zu erkennen.

$$(55\alpha)\begin{cases} \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 & \mathfrak{G}_3 & \mathfrak{G}_4 & \mathfrak{G}_5 & \mathfrak{G}_6 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1' & \mathfrak{a}_2' & \mathfrak{a}_3' \end{cases}$$

$$(55\beta)\begin{cases} \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{C}_4 & \mathfrak{C}_5 & \mathfrak{C}_6 & \mathfrak{C}_7 & \mathfrak{C}_8 & \mathfrak{C}_9 & \mathfrak{C}_{(10)} \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_{(1)} & \mathfrak{c}_{(2)} & \mathfrak{c}_{(3)} & \mathfrak{b}_{23} & \mathfrak{b}_{31} & \mathfrak{b}_{12} & \mathfrak{b}_{32} & \mathfrak{b}_{13} & \mathfrak{b}_{21} \end{cases}$$

$$(55\gamma)\begin{cases} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{(10)} & B_{(11)} & B_{(12)} & B_{(13)} & B_{(14)} & B_{(15)} \\ b_{32} & b_{13} & b_{21} & b_{23} & b_{31} & b_{12} & b_{11} & a_1 & a_1' & a_2' & b_{22} & a_2 & a_3 & a_3' & b_{33} \end{cases}$$

$$(55\delta)\begin{cases} \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 & \mathfrak{B}_5 & \mathfrak{B}_6 & \mathfrak{B}_7 & \mathfrak{B}_8 & \mathfrak{B}_9 & \mathfrak{B}_{(10)} & \mathfrak{B}_{(11)} & \mathfrak{B}_{(12)} & \mathfrak{B}_{(13)} & \mathfrak{B}_{(14)} & \mathfrak{B}_{(15)} \\ \mathfrak{k}_1' & \mathfrak{k}_2' & \mathfrak{k}_3' & \mathfrak{k}_1 & \mathfrak{k}_2 & \mathfrak{k}_3 & \mathfrak{b}_{11} & \mathfrak{h}'_{11} & \mathfrak{h}_{11} & \mathfrak{h}_{22} & \mathfrak{b}_{22} & \mathfrak{h}'_{22} & \mathfrak{h}'_{33} & \mathfrak{h}_{33} & \mathfrak{b}_{33} \end{cases}$$

5) Die oben erwähnten 10 Gruppen von je zwei vierfach perspectiven Dreiecken sind in (56) übersichtlich zusammengestellt; die Ziffern $1, 2, \ldots, 6$ entsprechen den Indices der 6 Fundamentalpunkte $\mathfrak{G}$; das erste Centrum $\mathfrak{C}$ entspricht dem früher gebrauchten $\mathfrak{c}_1$ ((39β)), die darauf folgenden drei Centren den früher gebrauchten $\mathfrak{c}_{(1)}$, $\mathfrak{c}_{(2)}$, $\mathfrak{c}_{(3)}$ ((39δ)).

$$(56)\quad \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} 1\;2\;3 \\ 4\;5\;6 \\ \hline \mathfrak{C}_1;\, \mathfrak{C}_2\, \mathfrak{C}_3\, \mathfrak{C}_4 \end{array} & \begin{array}{c} 4\;2\;3 \\ 1\;6\;5 \\ \hline \mathfrak{C}_2;\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_5\, \mathfrak{C}_8 \end{array} & \begin{array}{c} 1\;5\;3 \\ 6\;2\;4 \\ \hline \mathfrak{C}_3;\, \mathfrak{C}_9\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_6 \end{array} & \begin{array}{c} 1\;2\;6 \\ 5\;4\;3 \\ \hline \mathfrak{C}_4;\, \mathfrak{C}_7\, \mathfrak{C}_{10}\, \mathfrak{C}_1 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 1\;2\;5 \\ 3\;6\;4 \\ \hline \mathfrak{C}_5;\, \mathfrak{C}_{10}\, \mathfrak{C}_2\, \mathfrak{C}_9 \end{array} & \begin{array}{c} 6\;2\;3 \\ 5\;1\;4 \\ \hline \mathfrak{C}_6;\, \mathfrak{C}_{10}\, \mathfrak{C}_8\, \mathfrak{C}_3 \end{array} & \begin{array}{c} 1\;4\;3 \\ 5\;6\;2 \\ \hline \mathfrak{C}_7;\, \mathfrak{C}_4\, \mathfrak{C}_8\, \mathfrak{C}_9 \end{array} \end{array} \end{array} \right.$$

$$(56)\quad \left\{ \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 4\;5\;2 \\ 6\;3\;1 \\ \hline \mathfrak{C}_8;\, \mathfrak{C}_7\, \mathfrak{C}_2\, \mathfrak{C}_6 \end{array} & \begin{array}{c} 3\;5\;6 \\ 2\;4\;1 \\ \hline \mathfrak{C}_9;\, \mathfrak{C}_7\, \mathfrak{C}_5\, \mathfrak{C}_3 \end{array} & \begin{array}{c} 4\;1\;6 \\ 2\;3\;5 \\ \hline \mathfrak{C}_{10};\, \mathfrak{C}_4\, \mathfrak{C}_5\, \mathfrak{C}_6 \end{array} \end{array} \right. .$$

Die Zusammenstellungen (57α) und (57β) lassen erkennen, welche Geraden B sich in den Centren $\mathfrak{C}$ schneiden und welche Punkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{C}$ durch je eine Gerade B verbunden werden.

$$(57\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{C}_1 \ldots B_7\, B_{(11)}\, B_{(15)} & \mathfrak{C}_5 \ldots B_{(12)}\, B_{(14)}\, B_4 \\ \mathfrak{C}_2 \ldots B_7\, B_4\, B_1 & \mathfrak{C}_6 \ldots B_{(13)}\, B_9\, B_5 \\ \mathfrak{C}_3 \ldots B_2\, B_{(11)}\, B_5 & \mathfrak{C}_7 \ldots B_8\, B_{(10)}\, B_6 \\ \mathfrak{C}_4 \ldots B_6\, B_3\, B_{(15)} & \mathfrak{C}_8 \ldots B_{(13)}\, B_{(10)}\, B_1 \\ & \mathfrak{C}_9 \ldots B_8\, B_{(14)}\, B_2 \\ & \mathfrak{C}_{10} \ldots B_{(12)}\, B_9\, B_3 \end{array} \right.$$

$$(57\beta)\quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l|l|} B_1 \ldots \mathfrak{G}_3\, \mathfrak{G}_5\, \mathfrak{C}_2\, \mathfrak{C}_8 & B_4 \ldots \mathfrak{G}_2\, \mathfrak{G}_6\, \mathfrak{C}_2\, \mathfrak{C}_5 \\ B_2 \ldots \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_6\, \mathfrak{C}_3\, \mathfrak{C}_9 & B_5 \ldots \mathfrak{G}_3\, \mathfrak{G}_4\, \mathfrak{C}_3\, \mathfrak{C}_6 \\ B_3 \ldots \mathfrak{G}_2\, \mathfrak{G}_4\, \mathfrak{C}_4\, \mathfrak{C}_{(10)} & B_6 \ldots \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_5\, \mathfrak{C}_4\, \mathfrak{C}_7 \end{array} . \\ \begin{array}{l|l|} B_7 \ldots \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_4\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_2 & B_{(10)} \ldots \mathfrak{G}_4\, \mathfrak{G}_6\, \mathfrak{C}_7\, \mathfrak{C}_8 \\ B_8 \ldots \mathfrak{G}_2\, \mathfrak{G}_3\, \mathfrak{C}_7\, \mathfrak{C}_9 & B_{(11)} \ldots \mathfrak{G}_2\, \mathfrak{G}_5\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_3 \\ B_9 \ldots \mathfrak{G}_5\, \mathfrak{G}_6\, \mathfrak{C}_6\, \mathfrak{C}_{(10)} & B_{(12)} \ldots \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_3\, \mathfrak{C}_5\, \mathfrak{C}_{(10)} \end{array} \\ \qquad \begin{array}{l|} B_{(13)} \ldots \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{G}_2\, \mathfrak{C}_6\, \mathfrak{C}_8 \\ B_{(14)} \ldots \mathfrak{G}_4\, \mathfrak{G}_5\, \mathfrak{C}_5\, \mathfrak{C}_9 \\ B_{(15)} \ldots \mathfrak{G}_3\, \mathfrak{G}_6\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_4 \end{array} . \end{array} \right.$$

Aus der Anordnung (57β) ist unmittelbar zu ersehen, dass sich in jedem der 6 Fundamentalpunkte $\mathfrak{G}_r$ je fünf Gerade B_r schneiden, nämlich:

$$(57\gamma)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \ldots B_2\, B_6\, B_7\, B_{(12)}\, B_{(13)} \\ \mathfrak{G}_2 \ldots B_3\, B_4\, B_8\, B_{(11)}\, B_{(13)} \\ \mathfrak{G}_3 \ldots B_1\, B_5\, B_8\, B_{(12)}\, B_{(15)} \\ \mathfrak{G}_4 \ldots B_3\, B_5\, B_7\, B_{(10)}\, B_{(14)} \\ \mathfrak{G}_5 \ldots B_1\, B_6\, B_9\, B_{(11)}\, B_{(14)} \\ \mathfrak{G}_6 \ldots B_2\, B_4\, B_9\, B_{(10)}\, B_{(15)} . \end{array} \right.$$

6) Die fünf Tripel der Geraden B_r (gemäss der Anordnung in (57β) bilden fünf Dreiecke, bei deren jedem die einer Seite gegenüberliegende Ecke der entsprechend bezeichnete Punkt $\mathfrak{B}_r$ (vgl. (55γ) und 55δ)), also der Pol dieser Seite in Beziehung auf den Kegelschnitt K_0 (54ζ) ist.*) Diese fünf Dreiecke sind also sich selbst conjugirt in Beziehung auf diesen Kegelschnitt, und es empfiehlt sich daher, eins dieser

*) Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. XII, S. 533.

Dreiecke als Coordinatendreieck zu wählen. Nehmen wir z. B. das erste dieser fünf Dreiecke, nämlich $B_1\,B_2\,B_3$ ($\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3$) als Fundamental dreieck eines neuen Coordinatensystems, so haben wir, da die früheren Coordinaten sich auf das Fundamentaldreieck $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$ bezogen, folgende Transformationsformeln anzuwenden:

$$(58\alpha)\qquad \begin{cases} \varrho\,.\,y_1 = x_1 \operatorname{cotg}\varphi + x_2 \\ \varrho\,.\,y_2 = \qquad\qquad x_2 \operatorname{cotg}\varphi + x_3 \\ \varrho\,.\,y_3 = x_1 \qquad\qquad\qquad + x_3 \operatorname{cotg}\varphi \end{cases}$$

$$(58\beta)\qquad \begin{cases} \sigma\,.\,w_1 = v_1 \operatorname{cotg}\varphi + v_2 \operatorname{tang}\varphi - v_3 \\ \sigma\,.\,w_2 = -v_1 \qquad\quad + v_2 \operatorname{cotg}\varphi + v_3 \operatorname{cotg}\varphi \\ \sigma\,.\,w_3 = v_1 \operatorname{tang}\varphi - v_2 \qquad\quad + v_3 \operatorname{cotg}\varphi, \end{cases}$$

in welchen bez. x_i, v_i die alten, y_i, w_i die neuen Punkt-, Linien-Coordinaten bedeuten. Dann wird die Gleichung des Kegelschnitts K_0 (44ξ):

$$(59\alpha)\qquad K_0 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

und für die Punkte $\mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{C}_r$, $\mathfrak{B}_r$ und die Geraden B_r ergeben sich folgende analytische Ausdrücke:

$$(59\beta)\qquad \left\{\begin{array}{llll|llll} \mathfrak{G}_1 \cdots & 1 & 0 & \operatorname{tang}\varphi & \mathfrak{G}_4 \cdots & \operatorname{tang}\varphi & -1 & 0 \\ \mathfrak{G}_2 \cdots & \operatorname{tang}\varphi & 1 & 0 & \mathfrak{G}_5 \cdots & 0 & \operatorname{tang}\varphi & -1 \\ \mathfrak{G}_3 \cdots & 0 & \operatorname{tang}\varphi & 1 & \mathfrak{G}_6 \cdots & -1 & 0 & \operatorname{tang}\varphi \end{array}\right|,$$

$$(59\gamma)\qquad \left\{\begin{array}{l} \begin{array}{llll|llll} & & & & \mathfrak{C}_2 \ldots & 0 & \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tang}\varphi \\ \mathfrak{C}_1 \ldots & 1 & 1 & 1 & \mathfrak{C}_3 \ldots & \operatorname{tang}\varphi & 0 & \operatorname{cotg}\varphi \\ & & & & \mathfrak{C}_4 \ldots & \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tang}\varphi & 0 \end{array}\Bigg| \\ \Bigg|\begin{array}{llll|llll} \mathfrak{C}_5 \cdots & -1 & 1 & 1 & \mathfrak{C}_8 \cdots & 0 & \operatorname{cotg}\varphi & -\operatorname{tang}\varphi \\ \mathfrak{C}_6 \cdots & 1 & -1 & 1 & \mathfrak{C}_9 \cdots & -\operatorname{tang}\varphi & 0 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \mathfrak{C}_7 \cdots & 1 & 1 & -1 & \mathfrak{C}_{10} \cdots & \operatorname{cotg}\varphi & -\operatorname{tang}\varphi & 0 \end{array}\Bigg| \end{array}\right.$$

$$(59\delta)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{I)} & \left|\begin{array}{llllll} \mathfrak{B}_1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots B_1 \\ \mathfrak{B}_2 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots B_2 \\ \mathfrak{B}_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots B_3 \end{array}\right| \\ \mathrm{II)} & \left|\begin{array}{llllll} \mathfrak{B}_4 & \cdots & 1 & -\operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & \cdots B_4 \\ \mathfrak{B}_5 & \cdots & \operatorname{cotg}\varphi & 1 & -\operatorname{tang}\varphi & \cdots B_5 \\ \mathfrak{B}_6 & \cdots & -\operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & 1 & \cdots B_6 \end{array}\right| \\ \mathrm{III)} & \left|\begin{array}{llllll} \mathfrak{B}_7 & \cdots & 1 & \operatorname{tang}\varphi & -\operatorname{cotg}\varphi & \cdots B_7 \\ \mathfrak{B}_8 & \cdots & \operatorname{cotg}\varphi & -1 & \operatorname{tang}\varphi & \cdots B_8 \\ \mathfrak{B}_9 & \cdots & \operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & 1 & \cdots B_9 \end{array}\right| \end{array}\right.$$

$$
(59\delta)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{IV)}\left|\begin{array}{lcccl}
\mathfrak{B}_{(10)}\cdots & 1 & \operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & \cdots B_{(10)}\\
\mathfrak{B}_{(11)}\cdots & -\operatorname{cotg}\varphi & 1 & \operatorname{tang}\varphi & \cdots B_{(11)}\\
\mathfrak{B}_{(12)}\cdots & \operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & -1 & \cdots B_{(12)}
\end{array}\right|\\
\mathrm{V)}\left|\begin{array}{lcccl}
\mathfrak{B}_{(13)}\cdots & -1 & \operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & \cdots B_{(13)}\\
\mathfrak{B}_{(14)}\cdots & \operatorname{cotg}\varphi & 1 & \operatorname{tang}\varphi & \cdots B_{(14)}\\
\mathfrak{B}_{(15)}\cdots & \operatorname{tang}\varphi & -\operatorname{cotg}\varphi & 1 & \cdots B_{(15)}
\end{array}\right|.
\end{array}\right.
$$

7) Den sechs Fundamentalpunkten $\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_6$ entsprechen polar in Beziehung auf K_0 sechs Gerade $G_1 \dots G_6$, auf deren jeder fünf Punkte $\mathfrak{B}_r$ liegen (s. (57γ)); ebenso entsprechen den 10 Centren $\mathfrak{C}_r$ polar zehn Gerade C_r, auf deren jeder drei Punkte $\mathfrak{B}_r$ (s. (57α)) liegen. Die Liniencoordinaten dieser Geraden sind bez. dieselben, wie die Punktcoordinaten ihrer Pole.

Von den Collineationsaxen der 10 Paare vierfach perspectiver Dreiecke (s. die Zusammenstellung (56)) sind die 10 ersten (den c_1 entsprechenden) Axen bez. die Geraden $C_1 \dots C_{(10)}$, während die 10 Tripel der (den $c_{(1)}, c_{(2)}, c_{(3)}$ entsprechenden) Axen 30 Gerade $D_1 \dots D_{(30)}$ sind, auf deren jeder je zwei Punkte $\mathfrak{C}$ und je ein Punkt $\mathfrak{B}$ liegen. Die Coordinaten dieser 30 Geraden D_r, ebenso wie diejenigen der ihnen polar entsprechenden Punkte $\mathfrak{D}_r$, lassen sich leicht erhalten.

Ferner ergeben sich 30 Gerade E_r, von denen jede einen Punkt $\mathfrak{B}$ und einen Punkt $\mathfrak{C}$ verbindet (30 Punkte $\mathfrak{E}_r$, von denen jeder ein Schnittpunkt einer Geraden B und einer Geraden C ist) und weiterhin 30 Gerade F_r, von denen jede einen Punkt $\mathfrak{B}$ und einen Punkt $\mathfrak{G}$ verbindet (30 Punkte $\mathfrak{F}_r$, von denen jeder ein Schnittpunkt einer Geraden B und einer Geraden G ist). Diese 30 Geraden F, von denen je fünf durch einen Punkt $\mathfrak{G}$ gehen, bilden selbst fünfmal die Figur eines *zehnfach Pascal'schen Sechsseits* (die 30 Punkte $\mathfrak{F}$, von denen je fünf auf einer Geraden G liegen, bilden selbst fünfmal die Figur eines *zehnfach Brianchon'schen Sechsecks*).

Indem wir darauf verzichten, weitere Lagenbeziehungen für diese interessante Figur, welche sich analytisch sehr einfach ergeben, nachzuweisen, ebenso auch die analogen, wie oben gezeigt, leicht zu erhaltenden Resultate für die Figur eines *zehnfach Pascal'schen Sechsseits* im Einzelnen aufzuführen, wollen wir im Folgenden nur noch kurz die zweite Art der Entstehung eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks behandeln und sodann auf einige wichtige Anwendungen dieser Figur hinweisen.

8) Man kann die charakteristische Eigenschaft der Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks auch durch die Beziehung definiren, dass von den 5 Dreiecken I) bis V) (59δ) irgend zwei zu einander *dreifach* perspectiv sind und zwar so, dass die drei Centren $\mathfrak{B}$ auf

einer Geraden C liegen und die drei Axen B sich in einem Punkte $\mathfrak{C}$ schneiden. So hat man z. B. für die beiden Dreiecke I) und II) (vgl. (57 α) β) γ)).

$$(60\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{B}_4\ \mathfrak{B}_6\ \mathfrak{B}_5 \\ \hline \mathfrak{B}_7 - B_7 \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{B}_6\ \mathfrak{B}_5\ \mathfrak{B}_4 \\ \hline \mathfrak{B}_{(11)} - B_{(11)} \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{B}_5\ \mathfrak{B}_4\ \mathfrak{B}_6 \\ \hline \mathfrak{B}_{(15)} - B_{(15)} \end{array} \end{array}\right.$$

$$(60\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} C_1 = |\mathfrak{B}_7\ \ \mathfrak{B}_{(11)}\ \ \mathfrak{B}_{(15)}| \\ \mathfrak{C}_1 = (B_7\ \ B_{(11)}\ \ B_{(15)}), \end{array}\right.$$

wobei

$$(60\gamma)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}_7 \ \ = (C_2\ G_1\ G_4) \\ \mathfrak{B}_{(11)} = (G_5\ C_3\ G_2) \\ \mathfrak{B}_{(15)} = (G_3\ G_6\ C_4) \end{array}\right. \qquad (60\delta)\quad \left\{\begin{array}{l} B_7 \ \ = |\mathfrak{C}_2\ \mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_4| \\ B_{(11)} = |\mathfrak{G}_5\ \mathfrak{C}_3\ \mathfrak{G}_2| \\ B_{(15)} = |\mathfrak{G}_3\ \mathfrak{G}_6\ \mathfrak{C}_4| \end{array}\right.$$

ist.

Die sämmtlichen 10 derartigen dreifach perspectiven Lagen von je zweien der 5 Dreiecke I) bis V) lassen sich aus der nachfolgenden Zusammenstellung erkennen, in welcher die Ziffern den Indices der $\mathfrak{B}$ (oder B) entsprechen und in welcher für je zwei Dreiecke die Gerade C und derPunkt $\mathfrak{C}$ angegeben ist.

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{c|c|c|} \begin{array}{lccc} \text{I}\ldots & 1 & 2 & 3 \\ \text{II}\ldots & 4 & 6 & 5 \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_1 - \mathfrak{C}_1} \end{array} & \begin{array}{lccc} \text{IV}\ldots & (10) & (11) & (12) \\ \text{V}\ldots & (13) & (14) & (15) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_2 - \mathfrak{C}_2} \end{array} & \begin{array}{lccc} \text{III}\ldots & 7 & 8 & 9 \\ \text{V}\ldots & (13) & (14) & (15) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_3 - \mathfrak{C}_3} \end{array} \\ \begin{array}{lccc} \text{III}\ldots & 7 & 8 & 9 \\ \text{IV}\ldots & (10) & (11) & (12) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_4 - \mathfrak{C}_4} \end{array} & \begin{array}{lccc} \text{I}\ldots & 1 & 2 & 3 \\ \text{III}\ldots & 7 & 9 & 8 \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_5 - \mathfrak{C}_5} \end{array} & \begin{array}{lccc} \text{I}\ldots & 1 & 2 & 3 \\ \text{IV}\ldots & (10) & (12) & (11) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_6 - \mathfrak{C}_6} \end{array} \\ \begin{array}{lccc} \text{I}\ldots & 1 & 2 & 3 \\ \text{V}\ldots & (13) & (15) & (14) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_7 - \mathfrak{C}_7} \end{array} & \begin{array}{lccc} \text{II}\ldots & 4 & 5 & 6 \\ \text{III}\ldots & 7 & 8 & 9 \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_8 - \mathfrak{C}_8} \end{array} & \begin{array}{lccc} \text{II}\ldots & 4 & 5 & 6 \\ \text{IV}\ldots & (10) & (11) & (12) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_9 - \mathfrak{C}_9} \end{array} \\ & \begin{array}{lccc} \text{II}\ldots & 4 & 5 & 6 \\ \text{V}\ldots & (13) & (14) & (15) \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{C_{10} - \mathfrak{C}_{10}} \end{array} & \end{array}\right.$$

In jedem der drei Centren schneiden sich (vgl. (60 γ)) je zwei Gerade G und je eine Gerade C, auf jeder der drei Axen liegen ((60 γ)) je zwei Punkte $\mathfrak{G}$ und je ein Punkt $\mathfrak{C}$. Die Werthe für u_1, u_2, u_3, welche diesem speciellen Falle für die Lage zweier dreifach perspectiven Dreiecke entsprechen, sind nun die in § 3 unter II 2) in Formel (34 α) angegebenen:

$$(34\alpha)\qquad u_1 = -1, \quad u_2 = -\operatorname{cotg}^3 \varphi, \quad u_3 = \operatorname{tang}^3 \varphi.$$

Um dies nachzuweisen, wollen wir zeigen, dass die Dreiecke Δ

und Δ' für diese speciellen Werthe von u_1, u_2, u_3 mit zweien der fünf Dreiecke I) bis V), also z. B. mit I) und II) übereinstimmen. In der That erhält man, wenn diese speciellen Werthe in die Ausdrücke für die Coordinaten der Punkte und Geraden der in § 3 betrachteten Figur eingeführt werden, wobei wir, um Verwechslungen zu vermeiden, die Punkte und Gerade durch eingeklammerte Buchstaben bezeichnen:

$$(62\alpha)\left\{\begin{array}{llll} [\mathfrak{a}_1'] \cdots & -1 & \operatorname{tang}^2\varphi & \operatorname{cotg}^2\varphi \\ [\mathfrak{a}_2'] \ldots & \operatorname{tang}\varphi & -1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ [\mathfrak{a}_3'] \ldots & \operatorname{cotg}\varphi & \operatorname{tang}\varphi & 1 \end{array}\right. \qquad (62\beta)\left\{\begin{array}{llll} [a_1'] \cdots & -1 & 1 & 1 \\ [a_2'] \ldots & 1 & -\operatorname{cotg}^3\varphi & 1 \\ [a_3'] \ldots & 1 & 1 & \operatorname{tang}^3\varphi \end{array}\right.$$

$$(62\gamma)\left\{\begin{array}{llll} [\mathfrak{c}_1] \cdots & 1 & \operatorname{tang}^2\varphi & \operatorname{cotg}^2\varphi \\ [\mathfrak{c}_2] \ldots & \operatorname{cotg}\varphi & -\operatorname{tang}\varphi & 1 \\ [\mathfrak{c}_3] \cdots & -\operatorname{tang}\varphi & 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ \hline [\mathfrak{c}] = |[\mathfrak{c}_1][\mathfrak{c}_2][\mathfrak{c}_3]| \ldots & 1 & \operatorname{cotg}\varphi & -\operatorname{tang}\varphi \end{array}\right. \qquad (62\delta)\left\{\begin{array}{llll} [c_1] \ldots & 1 & 1 & 1 \\ [c_2] \ldots & 1 & -1 & \operatorname{tang}^3\varphi \\ [c_3] \cdots & -1 & \operatorname{cotg}^3\varphi & 1 \\ \hline [\mathfrak{c}] = ([c_1][c_2][c_3]) \ldots & 1 & \operatorname{tg}\varphi & -\operatorname{ctg}\varphi. \end{array}\right.$$

Multiplicirt man dann die

$$\begin{array}{llll} \text{Punktcoordinaten bez. mit} & 1 & \operatorname{cotg}\varphi & -\operatorname{tang}\varphi \\ \text{Liniencoordinaten} \;\;\text{„}\;\;\text{„} & 1 & \operatorname{tang}\varphi & -\operatorname{cotg}\varphi, \end{array}$$

so erhält man:

$$(63\alpha)\left\{\begin{array}{lllllll} [\mathfrak{a}_1] = \mathfrak{B}_1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots [a_1] & = B_1 \\ [\mathfrak{a}_2] = \mathfrak{B}_2 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots [a_2] & = B_2 \\ [\mathfrak{a}_3] = \mathfrak{B}_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots [a_3] & = B_3 \end{array}\right.$$

$$(63\beta)\left\{\begin{array}{lllllll} [\mathfrak{a}_1'] = \mathfrak{B}_4 & \cdots & 1 & -\operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & \cdots [a_1'] & = B_4 \\ [\mathfrak{a}_2'] = \mathfrak{B}_6 & \cdots & -\operatorname{tang}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & 1 & \cdots [a_2'] & = B_6 \\ [\mathfrak{a}_3'] = \mathfrak{B}_5 & \cdots & \operatorname{cotg}\varphi & 1 & -\operatorname{tang}\varphi & \cdots [a_3'] & = B_5 \end{array}\right.$$

$$(63\gamma)\left\{\begin{array}{lllllll} [\mathfrak{c}_1] = \mathfrak{B}_7 & \cdots & 1 & \operatorname{tang}\varphi & -\operatorname{cotg}\varphi & \cdots [c_1] & = B_7 \\ [\mathfrak{c}_2] = \mathfrak{B}_{(11)} & \cdots & -\operatorname{cotg}\varphi & 1 & \operatorname{tang}\varphi & \cdots [c_2] & = B_{(11)} \\ [\mathfrak{c}_3] = \mathfrak{B}_{(15)} & \cdots & \operatorname{tang}\varphi & -\operatorname{cotg}\varphi & 1 & \cdots [c_3] & = B_{(15)} \\ \hline [\mathfrak{c}] = C_1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots [\mathfrak{c}] & = \mathfrak{C}_1. \end{array}\right.$$

Diese Ausdrücke stimmen genau mit den in (59γ) und (59δ) gegebenen überein.

Es lässt sich also die Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks auch aus der Figur, welche durch die beiden in der speciellen dreifach perspectiven Lage befindlichen Dreiecke Δ und Δ' gebildet wird, erhalten. Dabei entsprechen die Punkte (Geraden) dieser Figur der oben betrachteten in folgender Weise (vgl. § 2 und § 4):

$$(63\delta)\quad\left\{\begin{array}{l|l|l} [\mathfrak{b}_{11}] = \mathfrak{C}_2 & [\mathfrak{b}_{12}] = \mathfrak{G}_5 & [\mathfrak{b}_{13}] = \mathfrak{G}_3 \\ [\mathfrak{b}_{22}] = \mathfrak{G}_1 & [\mathfrak{b}_{23}] = \mathfrak{C}_3 & [\mathfrak{b}_{21}] = \mathfrak{G}_6 \\ [\mathfrak{b}_{33}] = \mathfrak{G}_4 & [\mathfrak{b}_{31}] = \mathfrak{G}_2 & [\mathfrak{b}_{32}] = \mathfrak{C}_4 \end{array}\right\} \text{ vgl. } (60\gamma)$$

$$(63\varepsilon)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} [\mathfrak{e}_2] = \mathfrak{B}_{(13)} & [\mathfrak{e}_2'] = \mathfrak{B}_{(12)} & [\mathfrak{g}_2] = \mathfrak{B}_8 \\ [\mathfrak{e}_3] = \mathfrak{B}_{(14)} & [\mathfrak{e}_3'] = \mathfrak{B}_{(10)} & [\mathfrak{g}_3] = \mathfrak{B}_9 \end{array}\right\} \text{vgl. } (5\alpha) \text{ in } \S\ 1$$

$$(63\zeta)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} [(e_2, e_3')] = \mathfrak{C}_8 & [(e_2, g_3)] = \mathfrak{C}_6 & [(e_3, g_2)] = \mathfrak{C}_9 \\ [(e_2', e_3)] = \mathfrak{C}_5 & [(e_3', g_2)] = \mathfrak{C}_7 & [(e_2', g_3)] = \mathfrak{C}_{10} \end{array}\right\} \text{vgl. } (10) \text{ in } \S\ 1$$

9) Die Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks ist zuerst von Clebsch*) als ebene Abbildung einer speciellen Fläche dritter Ordnung (der sogenannten Diagonalfläche des Pentaeders) erhalten worden. Sodann hat Herr F. Klein in seinen bedeutungsvollen algebraischen und functionentheoretischen Untersuchungen**) jene Figur hergeleitet und behandelt. Bei Herrn F. Klein***) hat das Fundamentaldreieck, auf welches sich die Coordinaten der Punkte und Geraden beziehen, den Punkt $\mathfrak{G}_1$ und die Berührungspunkte der von diesem Punkte an den Kegelschnitt K_0 gelegten Tangenten zu Eckpunkten. Diese Ausdrücke für die Coordinaten sind dadurch bemerkenswerth, dass in ihnen die Potenzen einer complexen fünften Einheitswurzel in einfacher Weise auftreten. Dieselben ergeben sich aus den im Obigen (s. Formeln 59) aufgestellten durch Anwendung folgender Transformationsformeln, in welchen y_i, w_i die alten, z_i, t_i die neuen Punkt-, Linien-Coordinaten bedeuten:

$$(64\alpha)\quad \begin{cases} z_1 = y_1 \cos\varphi + 0 \,.\, y_2 + y_3 \sin\varphi \\ z_2 = y_1 \sin\varphi - i \,.\, y_2 - y_3 \cos\varphi \\ z_3 = y_1 \sin\varphi + i \,.\, y_2 - y_3 \cos\varphi \end{cases}$$

$$(64\beta)\quad \begin{cases} t_1 = 2w_1 \cos\varphi + 0 \,.\, w_2 + 2w_3 \sin\varphi \\ t_2 = w_1 \sin\varphi + i \,.\, w_2 - w_3 \cos\varphi \\ t_3 = w_1 \sin\varphi - i \,.\, w_2 - w_3 \cos\varphi \,. \end{cases}$$

Ist dann ε eine fünfte Einheitwurzel, d. h.

$$(64\gamma)\quad \begin{cases} \varepsilon^{\pm 1} = \varepsilon^{\mp 4} = \cos\frac{2\pi}{5} \pm i \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(\quad \operatorname{tang}\varphi \pm \frac{i}{\sin\varphi}\right) \\ \varepsilon^{\pm 2} = \varepsilon^{\mp 3} = \cos\frac{4\pi}{5} \pm i \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{cotg}\varphi + \frac{i}{\cos\varphi}\right) \\ \varepsilon^{\pm 5} = 1, \end{cases}$$

so resultiren folgende Werthe für die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$:

$$(65\alpha)\quad \left\{\begin{array}{r} \mathfrak{G}_1 \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{G}_6, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_5, \mathfrak{G}_4 \cdots \frac{1}{2} \quad \varepsilon^{-\nu} \quad \varepsilon^{\nu} \end{array}\right\} (\nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

---

*) Math. Ann. Bd. IV, S. 284 und 345.

**) Ebenda Bd. XII, S. 531 flg. „Vorlesungen über das Icosaeder" S. 216—218.

***) L. c. S. 532—533.

$$(65\beta)\qquad \begin{cases} \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_6, \mathfrak{C}_{(10)}, \mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_1 \cdots -\dfrac{\mathrm{cotg}^2\varphi}{2} & \varepsilon^{-\nu} \quad \varepsilon^{\nu} \\ \mathfrak{C}_9, \mathfrak{C}_8, \mathfrak{C}_5, \mathfrak{C}_7, \mathfrak{C}_2 \cdots -\dfrac{\mathrm{tang}^2\varphi}{2} & \varepsilon^{-\nu} \quad \varepsilon^{\nu} \end{cases}$$

$$(65\gamma)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_{(14)}, \mathfrak{B}_{(10)}, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_8 \cdots \quad \mathrm{cotg}\,\varphi & \varepsilon^{-\nu} \quad \varepsilon^{\nu} \\ \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_{(13)}, \mathfrak{B}_{(12)}, \mathfrak{B}_6, \mathfrak{B}_7 \cdots \quad 0 & -\varepsilon^{-\nu} \quad \varepsilon^{\nu} \\ \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_{(15)}, \mathfrak{B}_{(11)}, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_9 \cdots -\mathrm{tang}\,\varphi & \varepsilon^{-\nu} \quad \varepsilon^{\nu}. \end{cases}$$

Die Gleichung des Kegelschnitts K_0 wird:

$$(65\delta)\qquad K_0 \equiv z_1^2 + z_2 z_3 = 0.$$

10) Herr F. Klein hat bereits*) bemerkt, dass die sechs Eckenaxen eines regulären Ikosaeders eine Ebene in den sechs Fundamentalpunkten eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks treffen und dass die zehn Flächen- und fünfzehn Kantenaxen bez. die Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ unserer Figur erzeugen. Ich selbst wurde durch meine Untersuchungen über gleicheckige und gleichflächige Polyeder**) und hiermit zusammenhängende Probleme der Kugeltheilung***) ebenfalls auf jene Figur und deren sphärische Projection, speciell auf die durch die 15 Symmetrieebenen eines regulären Ikosaeders oder Pentagondodekaeders auf der Oberfläche einer concentrischen Kugel erzeugte Figur geführt.

Die Figur eines *sphärischen* zehnfach Brianchon'schen Sechsecks entsteht einfach durch centrale Projection der ebenen Figur auf eine Kugelfläche; in dem speciellen Falle eines *regulären* zehnfach-Brianchon'schen Sechsecks werden die 5 Polardreiecke I)—V) zu Oktantendreiecken, deren Mittelpunkte durch fünf der Punkte $\mathfrak{C}$ gebildet werden.†) Aus dieser vollständigen sphärischen Figur können alsdann sämmtliche reguläre und halbreguläre Netze, sowie die diesen entsprechenden regulären, gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder auf die von mir angegebene Art abgeleitet werden. Auf die Bedeutung des zehnfach Brianchon'schen Sechsecks für eine Gruppe der regelmässigen *vier*dimensionalen Gebilde wird unten (II. Theil, § 11) noch näher eingegangen werden.

---

*) Math. Ann. Bd. XII, S. 531.

**) Ueber vier Archimedeische Polyeder höherer Art, Cassel, Th. Kay. Und: Sitzungsber. der Gesellsch. zur Bef. der ges. Naturw. zu Marburg. Mai 1878.

***) Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung S. 422—424.

†) Man vergleiche hierzu die Fig. 29 und 30 in meinem Buche: „Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung.“ Man kann diese Figuren zur Veranschaulichung der sämmtlichen im Obigem erörterten Lagenverhältnisse der ebenen Figur benutzen, wenn man nur beachtet, dass die oben durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ bezeichneten Punkte dort durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben G, C, B, D, E, F bezeichnet und nach einer anderen leicht erkennbaren Reihenfolge numerirt worden sind.

Zweiter Theil.

Mehrfach perspective Tetraeder.

§ 7.

Relationen für einfach perspective Tetraeder.

Wir wollen nunmehr die den im ersten Theile durchgeführten analogen Untersuchungen über Tetraeder in perspectiver Lage anstellen, wobei die dort gewonnenen Resultate zum Theil benutzt werden können, während sich zugleich die Anzahl der möglichen Fälle für *mehrfach* perspective Tetraeder verringert.*)

1) Zwei Tetraeder heissen *perspectiv liegend* oder kurz *perspectiv*, wenn die vier Verbindungslinien je zweier Ecken sich in einem Punkte, dem *Centrum* der *Perspectivität* schneiden; alsdann liegen im Allgemeinen (die Ausnahmefälle sind unter 7) aufgeführt) die vier Durchschnittslinien je zweier entsprechender Seitenflächen in einer Ebene, der sogenannten *Collineationsebene***); man kann die perspectiven Tetraeder nach dieser zweiten Eigenschaft auch *complanar* nennen. Ist die erste Beziehung vorhanden, so folgt im Allgemeinen auch die zweite und umgekehrt.

Die Ecken der beiden Tetraeder T und T' sollen im folgenden durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3', \mathfrak{a}_4'$, die Seitenflächen bez. durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4'$, die Perspectivität, bez. Complanarität bz. durch die Symbole:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{cccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{a}_1' & \mathfrak{a}_2' & \mathfrak{a}_3' & \mathfrak{a}_4' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{c}_1} \end{array}\right. \qquad \text{oder} \qquad (1\alpha)\quad \left\{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\gamma_1} \end{array}\right.$$

oder ganz kurz durch das Symbol:

$$(1\beta)\quad \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{c}_1 - \gamma_1} \end{array}\right.$$

bezeichnet werden, worin $\mathfrak{c}_1$ das Centrum, γ_1 die Collineationsebene bedeutet und die entsprechenden Ecken bez. Ebenen untereinander gesetzt sind.

---

*) Vgl. J. Vályi. Zur Lehre vom perspectiven Tetraeder. Arch. f. Math. u. Phys. Zweite Reihe, III T. S. 441—45.

**) Poncelet. Propr. proj. 582. Baltzer. Elemente der Stereometrie § 5. 10. O. Hermes. Sätze über Tetraeder, welche dem von Desargues über ebene Dreiecke analog sind. Berlin 1856.

2) Wenn wir das erste Tetraeder T als Fundamentaltetraeder eines tetrametrischen Coordinatensystems, die Collineationsebene γ_1 als Einheitsebene wählen, so erhalten wir für die Ebenen und Ecken der beiden Tetraeder, für die Collineationsebene und das Centrum folgende bez. Punkt- und Ebenen-Coordinaten:

$$(2\alpha)\quad \begin{cases} \alpha_1 \ldots 1\;\;0\;\;0\;\;0 \\ \alpha_2 \ldots 0\;\;1\;\;0\;\;0 \\ \alpha_3 \ldots 0\;\;0\;\;1\;\;0 \\ \alpha_4 \ldots 0\;\;0\;\;0\;\;1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 \ldots 1\;\;0\;\;0\;\;0 \\ \mathfrak{a}_2 \ldots 0\;\;1\;\;0\;\;0 \\ \mathfrak{a}_3 \ldots 0\;\;0\;\;1\;\;0 \\ \mathfrak{a}_4 \ldots 0\;\;0\;\;0\;\;1 \end{array} \right.$$

$$(2\beta)\quad \begin{cases} \alpha_1' \ldots u_1\;\;1\;\;1\;\;1 \\ \alpha_2' \ldots 1\;\;u_2\;\;1\;\;1 \\ \alpha_3' \ldots 1\;\;1\;\;u_3\;\;1 \\ \alpha_4' \ldots 1\;\;1\;\;1\;\;u_4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1' \ldots U_{11}\;\;U_{12}\;\;U_{13}\;\;U_{14} \\ \mathfrak{a}_2' \ldots U_{21}\;\;U_{22}\;\;U_{23}\;\;U_{24} \\ \mathfrak{a}_3' \ldots U_{31}\;\;U_{32}\;\;U_{33}\;\;U_{34} \\ \mathfrak{a}_4' \ldots U_{41}\;\;U_{42}\;\;U_{43}\;\;U_{44} \end{array} \right.$$

$$(2\gamma)\quad \gamma_1 \ldots [|\alpha_1\alpha_1'|, |\alpha_2\alpha_2'|, |\alpha_3\alpha_3'|, |\alpha_4\alpha_4'|] \ldots \;\; 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$(2\delta)\quad \mathfrak{c}_1 \cdots (|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1'|, |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_2'|, |\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_3'|, |\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_4'|) \cdots \frac{1}{1-u_1}\;\; \frac{1}{1-u_2}\;\; \frac{1}{1-u_3}\;\; \frac{1}{1-u_4}.$$

Die Grössen $U_{ik} = U_{ki}$ sind die ersten Minoren der Determinante:

$$(3)\qquad U = \begin{vmatrix} u_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & u_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & u_4 \end{vmatrix}$$

$$= u_1u_2u_3u_4 - (u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4) + 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - 3,$$

nämlich:

$$(3\alpha)\qquad U_{ii} = \begin{vmatrix} u_k & 1 & 1 \\ 1 & u_r & 1 \\ 1 & 1 & u_s \end{vmatrix} = u_ku_ru_s - (u_k + u_r + u_s) + 2,$$

$$(3\beta)\qquad U_{ik} = U_{ki} = -(1-u_r)(1-u_s), \qquad (i,k,r,s = 1,2,3,4);$$

die die Nenner in den Coordinatenwerthen für $\mathfrak{c}_1$ (Formel 2δ) bildenden Differenzen $1 - u_i \ldots$ sind bestimmte, zu je vier einander gleiche, zweite Minoren der Determinante U.

Wir wollen im Folgenden die Kanten der beiden Tetraeder T und T' durch:

$$a_{ik} = |\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k| \quad \text{oder} \quad a_{(rs)} = |\alpha_r\;\alpha_s|$$
$$a_{ik}' = |\mathfrak{a}_i'\,\mathfrak{a}_k'| \quad \text{oder} \quad a_{(rs)}' = |\alpha_r'\;\alpha_s'|,$$

die Verbindungslinien je zweier entsprechender Eckpunkte derselben durch

$$b_{ii} = |\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_i'|$$

und die Schnittlinien je zweier entsprechender Seitenflächen durch

$$b_{(ii)} = |\alpha_i \alpha_i'|$$

bezeichnen.

Die sechs Schnittpunkte je zweier entsprechender Kanten d. h. je zweier Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte, nämlich:

$$(4\alpha)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_{12} = (a_{12} a_{12}') \ldots 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{b}_{13} = (a_{13} a_{13}') \ldots 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ \mathfrak{b}_{14} = (a_{14} a_{14}') \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathfrak{b}_{34} = (a_{34} a_{34}') \ldots 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\ \mathfrak{b}_{24} = (a_{24} a_{24}') \ldots 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathfrak{b}_{23} = (a_{23} a_{23}') \ldots 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \end{matrix}$$

liegen in der Ebene $\gamma_1 = [\mathfrak{b}_{12}\, \mathfrak{b}_{13}\, \mathfrak{b}_{14}\, \mathfrak{b}_{34}\, \mathfrak{b}_{24}\, \mathfrak{b}_{23}]$ viermal zu dreien auf einer Geraden $b_{(ii)}$, nämlich:

$$(4\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_{23}\, \mathfrak{b}_{34}\, \mathfrak{b}_{42} \text{ auf der Geraden } b_{(11)} = |\alpha_1\, \alpha_1'| \\ \mathfrak{b}_{34}\, \mathfrak{b}_{41}\, \mathfrak{b}_{13} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_{(22)} = |\alpha_2\, \alpha_2'| \\ \mathfrak{b}_{41}\, \mathfrak{b}_{12}\, \mathfrak{b}_{24} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_{(33)} = |\alpha_3\, \alpha_3'| \\ \mathfrak{b}_{12}\, \mathfrak{b}_{23}\, \mathfrak{b}_{31} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_{(44)} = |\alpha_4\, \alpha_4'|, \end{cases}$$

entsprechen also den Eckpunkten des durch diese vier Geraden bestimmten vollständigen Vierseits.

Die sechs durch je zwei entsprechende Kanten (die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen) gelegten Ebenen, nämlich:

$$(4\gamma)\quad \begin{cases} \beta_{12} = [a_{(12)}\, a_{(12)}'] \ldots 1 - u_1 \quad -(1-u_2) \quad 0 \quad 0 \\ \beta_{13} = [a_{(13)}\, a_{(13)}'] \ldots 1 - u_1 \quad 0 \quad -(1-u_3) \quad 0 \\ \beta_{14} = [a_{(14)}\, a_{(14)}'] \ldots 1 - u_1 \quad 0 \quad 0 \quad -(1-u_4) \\ \beta_{34} = [a_{(34)}\, a_{(34)}'] \ldots 0 \quad 0 \quad 1 - u_3 \quad -(1-u_4) \\ \beta_{24} = [a_{(24)}\, a_{(24)}'] \ldots 0 \quad -(1-u_2) \quad 0 \quad 1 - u_4 \\ \beta_{23} = [a_{(23)}\, a_{(23)}'] \ldots 0 \quad 1 - u_2 \quad -(1-u_3) \quad 0 \end{cases}$$

schneiden sich in dem Punkte $\mathfrak{c}_1 = (\beta_{12}\, \beta_{13}\, \beta_{14}\, \beta_{34}\, \beta_{24}\, \beta_{23})$ und zwar viermal zu dreien in einer Geraden b_{ii}, nämlich:

$$(4\delta)\quad \begin{cases} \beta_{23}\, \beta_{34}\, \beta_{42} \text{ in der Geraden } b_{11} = |\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_1'| \\ \beta_{34}\, \beta_{41}\, \beta_{13} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_{22} = |\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_2'| \\ \beta_{41}\, \beta_{12}\, \beta_{24} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_{33} = |\mathfrak{a}_3\, \mathfrak{a}_3'| \\ \beta_{12}\, \beta_{23}\, \beta_{31} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad b_{44} = |\mathfrak{a}_4\, \mathfrak{a}_4'|, \end{cases}$$

sie entsprechen also den 6 Ebenen eines vollständigen durch diese vier Geraden bestimmten Vierkants.

Je ein Punkt $\mathfrak{b}_{ik}$ und eine Ebene β_{rs} z. B. $\mathfrak{b}_{12}$ und β_{34}; $\mathfrak{b}_{34}$ und β_{12} u. s. w. sind incident.

3) Die vollständige durch die 4 Ebenen α_r, die 4 Ebenen α_r', die 6 Ebenen β_{ik} und die Collineationsebene γ_1 gebildete Raumfigur hat die charakteristische Eigenschaft, dass diese 15 Ebenen sich in 15 Punkten, nämlich den 4 Punkten $\mathfrak{a}_r$, den 4 Punkten $\mathfrak{a}_r'$, den 6 Punkten $\mathfrak{b}_{ik}$ und dem Perspectivitätscentrum $\mathfrak{c}_1$ zu je *sechsen* schneiden. In der nachfolgenden Zusammenstellung ist jedesmal nur der erste Punkt einer Gruppe aufgeführt, da sich für die übrigen Punkte die Indices der zugehörigen Ebenen, sowie die Coordinatenwerthe einfach durch cyklische Vertauschung ergeben.

$$(5\alpha)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = (\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \beta_{23}\,\beta_{34}\,\beta_{42}) \dots & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{a}_1' = (\alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_4'\ \beta_{23}\,\beta_{34}\,\beta_{42}) \dots & U_{11} \quad U_{12} \quad U_{13} \quad U_{14} \\ \mathfrak{b}_{12} = (\alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_3'\ \alpha_4'\ \beta_{34}\,\gamma_1) \dots & 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{c}_1 = (\beta_{12}\,\beta_{13}\,\beta_{14}\,\beta_{34}\,\beta_{24}\,\beta_{23}) \dots & \frac{1}{1-u_1} \quad \frac{1}{1-u_2} \quad \frac{1}{1-u_3} \quad \frac{1}{1-u_4}. \end{cases}$$

Die 15 Ebenen schneiden sich ausserdem noch in 60 Punkten zu je *vieren* und in 15 Punkten zu je dreien. Die auf der folgenden Seite gegebene Zusammenstellung enthält die Anordnung dieser Schnittpunkte in Gruppen und die zugehörigen Coordinatenwerthe.

$$
(5\beta)\left\{\begin{array}{lllllll}
12\ \text{Punkte}\ \mathfrak{a}_2^{[1]} = (\alpha_1\ \alpha_3'\ \alpha_4'\ \beta_{34})\ldots & 0 & u_3u_4-1 & 1-u_4 & 1-u_3\,^{*)} \\
12\ \ ,,\ \ \mathfrak{a}_2^{[1']} = (\alpha_1'\ \alpha_3\ \alpha_4\ \beta_{34})\ldots & 1 & -u_1 & 0 & 0 \\
6\ \ ,,\ \ \mathfrak{e}_{12} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_{12}\beta_{34})\ldots & 0 & 0 & 1-u_4 & 1-u_3 \\
6\ \ ,,\ \ \mathfrak{e}_{12}' = (\alpha_1'\ \alpha_2'\ \beta_{12}\beta_{34})\ldots & (1-u_2)(u_3+u_4-2) & (1-u_1)(u_3+u_4-2) & -(1-u_4)(u_1u_2-1) & -(1-u_3)(u_1u_2-1) \\
4\ \ ,,\ \ \mathfrak{c}_1^{[1]} = (\alpha_1\ \beta_{23}\beta_{34}\beta_{42})\ldots & 0 & \frac{1}{1-u_2} & \frac{1}{1-u_3} & \frac{1}{1-u_4} \\
4\ \ ,,\ \ \mathfrak{c}_1^{[1']} = (\alpha_1'\ \beta_{23}\beta_{34}\beta_{42})\ldots & -\frac{1}{u_1}\left(\frac{1}{1-u_2}+\frac{1}{1-u_3}+\frac{1}{1-u_4}\right) & \frac{1}{1-u_2} & \frac{1}{1-u_3} & \frac{1}{1-u_4} \\
4\ \ ,,\ \ \mathfrak{g}_1 = (\beta_{23}\beta_{34}\beta_{42}\gamma_1)\ldots & -\left(\frac{1}{1-u_2}+\frac{1}{1-u_3}+\frac{1}{1-u_4}\right) & \frac{1}{1-u_2} & \frac{1}{1-u_3} & \frac{1}{1-u_4} \\
12\ \ ,,\ \ \mathfrak{f}_{11,34} = (\alpha_1\ \alpha_1'\ \beta_{34}\gamma_1)\ldots & 0 & u_3+u_4-2 & 1-u_4 & 1-u_3
\end{array}\right.
$$

$$
(5\gamma)\left\{\begin{array}{lllll}
6\ \ ,,\ \ \mathfrak{h}_{12} = (\alpha_1\ \alpha_2'\ \beta_{34})\ \ldots & 0 & -\frac{1}{u_2}\left(\frac{1}{1-u_3}+\frac{1}{1-u_4}\right) & \frac{1}{1-u_3} & \frac{1}{1-u_4} \\
6\ \ ,,\ \ \mathfrak{h}_{21} = (\alpha_2\ \alpha_1'\ \beta_{34})\ \ldots & -\frac{1}{u_1}\left(\frac{1}{1-u_3}+\frac{1}{1-u_4}\right) & 0 & \frac{1}{1-u_3} & \frac{1}{1-u_4} \\
3\ \ ,,\ \ \mathfrak{i}_1 = (\beta_{12}\beta_{34}\gamma_1)\ \ldots & -(1-u_2)(u_3+u_4-2) & -(1-u_1)(u_3+u_4-2) & (1-u_4)(u_1+u_2-1) & (1-u_3)(u_1+u_2-2).
\end{array}\right.
$$

---

*) Diese Coordinatenwerthe sind zweite Minoren der Determinante U, nämlich erste Minoren von U_{11} (vgl. Formel (3)) u. s. f. Der obere in eckige Klammern gesetzte Index $[i]$ z. B. $\mathfrak{a}_2^{[1]}$ soll andeuten, dass der Punkt in der Ebene α_i z. B. in α_1, ebenso der Index $[i']$, dass der Punkt in der Ebene α_i' liegt.

Die *Schnittlinien* der 15 Ebenen sind einmal 20 Gerade, in welchen sich je drei Ebenen schneiden, nämlich:

$$(5\delta)\quad \begin{cases} 4\text{ Gerade}: b_{(11)} = |\alpha_1\ \alpha_1'\ \gamma_1| = |\mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{b}_{42}\,\mathfrak{f}_{11,34}\ \mathfrak{f}_{11,42}\ \mathfrak{f}_{11,23}| \\ 4\quad ,, \quad : b_{11} = |\beta_{23}\beta_{34}\beta_{42}| = |\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{g}_1\ \ \mathfrak{c}_1^{[1]}\ \mathfrak{c}_1^{[1']}| \\ 6\quad ,, \quad : b_{(12)} = |\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_{12}| = |\mathfrak{a}_3\ \mathfrak{a}_4\ \ \mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{c}_{12}\ \ \mathfrak{a}_4^{[3']}\,\mathfrak{a}_3^{[4']}| = a_{34} \\ 6\quad ,, \quad : a'_{(12)} = |\alpha_1'\ \alpha_2'\ \beta_{12}| = |\mathfrak{a}_3'\,\mathfrak{a}_4'\ \ \mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{c}_{12}'\ \ \mathfrak{a}_4^{[3]}\,\mathfrak{a}_3^{[4]}| = a_{34}'; \end{cases}$$

und sodann 45 Gerade, in welchen sich je 2 Ebenen schneiden. Da auf jeder der 20 Geraden (5δ) sechs der Schnittpunkte (5α), (β), (γ) liegen, so ergiebt sich leicht, dass die aufgeführten Schnittpunkte in der That *sämmtliche* Schnittpunkte der 15 Ebenen darstellen. Denn die Summe der Schnittpunkte (5α), (5β), (5γ):

$$15 \cdot \binom{6}{3} + 60 \cdot \binom{4}{3} + 15 \cdot \binom{3}{3} = 555$$

muss um

$$20 \cdot (6-1) \cdot \binom{3}{3} = 100$$

vermindert werden, wodurch sich die richtige Anzahl

$$455 = \binom{15}{3}$$

ergiebt.

Man erhält von der betrachteten Raumfigur eine deutliche Vorstellung, wenn man die in einer der 15 Ebenen durch die Spuren der übrigen 14 Ebenen gebildete Figur untersucht. Jede dieser Figuren besteht aus 10 Geraden, welche sich zehnmal zu dreien und fünfzehnmal zu zweien schneiden.

4) Analog ergiebt sich, dass die 15 Punkte $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_r'$, $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{c}_1$ zehnmal zu sechsen in den Ebenen α_r, α_r', β_{ik}, γ_1 und ferner 60 mal zu vieren und 15 mal zu je dreien in einer Ebene liegen. Die 15 Ebenen α_r, α_r', β_{ik}, γ_1, die 15 Punkte $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_r'$, $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{c}_1$ und die 20 Geraden $b_{(rr)}$, b_{rr}, a_{ik}, a_{ik}' bilden nach den von Herrn Reye*) eingeführten Bezeichnungen eine

Cf. (15_6, 20_3).

Diese Configuration ist dieselbe, als diejenige, welche durch die 15 Potenzebenen, die 20 Potenzaxen und die 15 Potenzpunkte, welche 6 Kugeln zu zweien, dreien und vieren bestimmen, gebildet wird.**) Die in einer der Ebenen durch die Spuren der übrigen gebildeten Configuration ist eine

Cf. (10_3).

---

*) Acta mathem Bd. I, S. 93—96.

**) Ebenda.

Analytisch folgt diese zweite Beziehung sofort, wenn man das zweite Tetraeder T' als Coordinatentetraeder wählt, in Bezug auf welches den nachfolgenden in der ersten (zweiten) Horizontalreihe stehenden Punkten (Ebenen) nunmehr die Coordinaten der in der zweiten (ersten) Reihe stehenden Ebenen (Punkte) zukommen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_r & \mathfrak{a}_r' & \mathfrak{b}_{ik} & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_2^{(1)} & \mathfrak{a}_2^{(1')} \\ \alpha_r' & \alpha_r & \beta_{ik} & \gamma_1 & \alpha_1^{(1')} & \alpha_2^{(1)} \end{cases} \quad \text{u. s. f.,}$$

während die unter einander stehenden Geraden:

$$(6\alpha)\qquad \begin{cases} a_{ik} & b_{ii} \\ a'_{(ik)} & b_{(ii)} \end{cases}$$

sich wechselseitig in dieser Weise entsprechen.

Dies Entsprechen ist ein polarreciprokes in Beziehung auf die *Fläche zweiter Ordnung*:

$$(7)\quad F_1 \equiv u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2 + u_3 x_3^2 + u_4 x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 \\ + 2x_3x_4 + 2x_2x_4 + 2x_2x_3 = 0,$$

für welche also insbesondere die beiden einfach perspectiven Tetraeder polarreciprok sind und das Centrum $\mathfrak{c}_1$ als Pol der Collineationsebene γ_1 entspricht.

5) Man kann analog, wie es bei zwei einfach perspectiven Dreiecken (§ 1, 5)) geschehen ist, die charakteristische Eigenschaft der durch zwei einfach perspective Tetraeder gebildeten Raumfigur auch in folgender Weise ausdrücken:

Das durch die Eckpunkte des einen Tetraeders T (oder T'), nämlich durch die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ (oder $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{a}_4'$) und das Centrum $\mathfrak{c}_1$ bestimmte vollständige räumliche Pentagon $\mathfrak{P}$ (oder $\mathfrak{P}'$) hat zu dem durch die Seitenflächen α_1', α_2', α_3', α_4' (oder α_1, α_2, α_3, α_4) des andern Tetraeders T' (oder T) bestimmten vollständigen Pentaeder Π' (oder Π) eine solche Lage, dass jede der 10 Ebenen des Pentagons durch je eine der 10 Geraden des Pentaeders, auf welcher je 3 Eckpunkte des letzteren liegen, hindurchgeht und jeder der 10 Eckpunkte des Pentaeders auf je einer der 10 Geraden des Pentagons liegt, in welcher sich je drei Ebenen des letzteren schneiden.

Es sind nämlich folgende untereinander stehende Elemente incident:

$$\text{für } \mathfrak{P} \text{ und } \Pi' \begin{cases} \alpha_i & \beta_{ik} \\ b_{(ii)} & a'_{(ik)} = a'_{rs} \end{cases} \left| \begin{matrix} \mathfrak{a}_i' & \mathfrak{b}_{ik} \\ b_{ii} & a_{ik} = a_{(rs)} \end{matrix} \right|$$

$$\text{für } \mathfrak{P}' \text{ und } \Pi \begin{cases} \alpha_i' & \beta_{ik} \\ b_{(ii)} & a_{(ik)} = a_{rs} \end{cases} \left| \begin{matrix} \mathfrak{a}_i & \mathfrak{b}_{ik} \\ b_{ii} & a'_{ik} = a'_{(rs)} \end{matrix} \right|.$$

In jeder der 10 Seitenflächen des Pentagons entsteht so diejenige Figur, bei welcher ein vollständiges Vierseit und Viereck eine solche

Lage haben, dass die Ecken des ersteren auf den Seiten des letzteren liegen — oder, was dasselbe ist, die durch zwei einfach perspective Dreiecke bestimmte ebene Figur (vgl. § 1—5)). So hat man z. B. in der Ebene α_4 das vollständige durch die Geraden (vgl. (5δ)):

$$b_{(44)},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{12}$$

gebildete Vierseit mit den Eckenpaaren:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_{23} & \mathfrak{b}_{31} & \mathfrak{b}_{12} \end{matrix}$$

und das vollständige Viereck mit den Eckpunkten (vgl. (5β)):

$$\mathfrak{a}_1^{[4]},\ \mathfrak{a}_2^{[4]},\ \mathfrak{a}_3^{[4]},\ \mathfrak{c}_1^{[4]},$$

dessen Seitenpaare:

$$\begin{matrix} |\alpha_4\ \beta_{23}| & |\alpha_4\ \beta_{31}| & |\alpha_4\ \beta_{12}| \\ |\alpha_4\ \alpha_1'| & |\alpha_4\ \alpha_2'| & |\alpha_4\ \alpha_3'| \end{matrix}$$

durch die bezüglichen Eckpunkte des Vierseits hindurchgehen. Oder — anders ausgedrückt — die beiden Dreiecke:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_1^{[4]} & \mathfrak{a}_2^{[4]} & \mathfrak{a}_3^{[4]} \end{matrix}$$

sin einfach perspectiv mit $\mathfrak{c}_1^{[4]}$ als Centrum und $b_{(44)}$ als Axe der Perspectivität.

6) Weitere interessante Lagenverhältnisse, insbesondere perspective Beziehungen ergeben sich, wenn man noch die 10 Diagonalebenen δ_{rr} und δ_{ik} des Pentaeders Π (und ebenso diejenigen des Pentaeders Π'), andererseits die 10 Diagonalpunkte $\mathfrak{d}_{rr}$ und $\mathfrak{d}_{ik}$ des Pentagons $\mathfrak{P}$ (und ebenso diejenigen des Pentagons $\mathfrak{P}'$) in Betracht zieht. Es möge hier mit Rücksicht auf die oben angegebenen polaren Beziehungen genügen, die Diagonalebenen des Pentaeders Π und deren Schnittpunkte mit den 5 Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4, γ_1 und mit einander aufzuführen. Man hat:

$$(8)\quad \begin{cases} \delta_{11} = [b_{(11)} = |\mathfrak{b}_{23}\ \mathfrak{b}_{34}\ \mathfrak{b}_{42}|,\ \mathfrak{a}_1\ ] \ldots\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\ \delta_{12} = [a_{(12)} = |\mathfrak{a}_3\ \ \mathfrak{a}_4\ \ \mathfrak{b}_{34}|,\ \mathfrak{b}_{12}] \ldots\ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0 \\ \delta_{34} = [a_{(34)} = |\mathfrak{a}_1\ \ \mathfrak{a}_2\ \ \mathfrak{b}_{12}|,\ \mathfrak{b}_{34}] \ldots\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1. \end{cases}$$

Die gesammten Schnittpunkte der 5 Seitenflächen des Pentaeders und der 10 Diagonalebenen bilden einfach folgende drei Gruppen:

a) 10 Schnittpunkte, nämlich die 4 Punkte $\mathfrak{a}_r$ und die 6 Punkte $\mathfrak{b}_{ik}$, in deren jedem sich drei Seitenflächen und vier Diagonalebenen des Pentaeders Π schneiden; z. B.

$$(9\alpha)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 \ldots (\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \delta_{11}\ \delta_{23}\ \delta_{34}\ \delta_{42}) \ldots 1\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0 \\ \mathfrak{b}_{12} \ldots (\alpha_3\ \alpha_4\ \gamma_1\ \delta_{12}\ \delta_{31}\ \delta_{33}\ \delta_{44}) \ldots 1\ \ -1\ \ \ 0\ \ \ 0 \\ \mathfrak{b}_{34} \ldots (\alpha_1\ \alpha_2\ \gamma_1\ \delta_{34}\ \delta_{12}\ \delta_{11}\ \delta_{22}) \ldots 0\ \ \ 0\ \ \ 1\ -1; \end{cases}$$

b) 15 Schnittpunkte $\mathfrak{D}$, in deren jedem sich eine Seitenfläche und vier Diagonalebenen schneiden, z. B.

$$(9\beta)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{1,23} \ldots (\alpha_1;\ \delta_{22}\,\delta_{34};\ \delta_{33}\,\delta_{42}) \ldots 0 & 1 \quad 1 \quad -1 \\ \mathfrak{D}_{1,34} \ldots (\alpha_1;\ \delta_{33}\,\delta_{42};\ \delta_{44}\,\delta_{23}) \ldots 0 & -1 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{D}_{1,42} \ldots (\alpha_1;\ \delta_{44}\,\delta_{23};\ \delta_{22}\,\delta_{34}) \ldots 0 & 1 \quad -1 \quad 1 \\ \mathfrak{D}_{5,21} \ldots (\gamma_1;\ \delta_{23}\,\delta_{14};\ \delta_{31}\,\delta_{24}) \ldots 1 & 1 \quad -1 \quad -1 \\ \mathfrak{D}_{5,32} \ldots (\gamma_1;\ \delta_{31}\,\delta_{24};\ \delta_{12}\,\delta_{34}) \ldots 1 & -1 \quad -1 \quad 1 \\ \mathfrak{D}_{5,13} \ldots (\gamma_1;\ \delta_{12}\,\delta_{34};\ \delta_{23}\,\delta_{14}) \ldots 1 & -1 \quad 1 \quad -1; \end{cases}$$

c) 20 Schnittpunkte $\mathfrak{E}$, in deren jedem sich drei Diagonalebenen schneiden. Dieselben ordnen sich in folgende 5 Gruppen von je vier:

$$(9\gamma)\quad \begin{cases} \text{I)} \begin{cases} \mathfrak{E}_1 \cdots (\delta_{22}\,\delta_{33}\,\delta_{44}) \cdots -2 & 1 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_2 \cdots (\delta_{33}\,\delta_{44}\,\delta_{11}) \cdots 1 & -2 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_3 \cdots (\delta_{44}\,\delta_{11}\,\delta_{22}) \cdots 1 & 1 \quad -2 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_4 \cdots (\delta_{11}\,\delta_{22}\,\delta_{33}) \cdots 1 & 1 \quad 1 \quad -2 \end{cases} \\ \text{II)} \begin{cases} \mathfrak{E}_5 \cdots (\delta_{12}\,\delta_{13}\,\delta_{14}) \cdots -1 & 1 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_6 \cdots (\delta_{11}\,\delta_{13}\,\delta_{14}) \cdots -1 & -2 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_7 \cdots (\delta_{11}\,\delta_{14}\,\delta_{12}) \cdots -1 & 1 \quad -2 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_8 \cdots (\delta_{11}\,\delta_{12}\,\delta_{13}) \cdots -1 & 1 \quad 1 \quad -2 \end{cases} \\ \text{III)} \begin{cases} \mathfrak{E}_9 \cdots (\delta_{23}\,\delta_{24}\,\delta_{21}) \cdots 1 & -1 \quad 1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_{(10)} \cdots (\delta_{22}\,\delta_{24}\,\delta_{21}) \cdots 1 & -1 \quad -2 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_{(11)} \cdots (\delta_{22}\,\delta_{21}\,\delta_{23}) \cdots 1 & -1 \quad 1 \quad -2 \\ \mathfrak{E}_{(12)} \cdots (\delta_{22}\,\delta_{23}\,\delta_{24}) \cdots -2 & -1 \quad 1 \quad 1 \end{cases} \\ \text{IV)} \begin{cases} \mathfrak{E}_{(13)} \cdots (\delta_{34}\,\delta_{31}\,\delta_{32}) \cdots 1 & 1 \quad -1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_{(14)} \cdots (\delta_{33}\,\delta_{31}\,\delta_{32}) \cdots 1 & 1 \quad -1 \quad -2 \\ \mathfrak{E}_{(15)} \cdots (\delta_{33}\,\delta_{32}\,\delta_{34}) \cdots -2 & 1 \quad -1 \quad 1 \\ \mathfrak{E}_{(16)} \cdots (\delta_{33}\,\delta_{34}\,\delta_{31}) \cdots 1 & -2 \quad -1 \quad 1 \end{cases} \\ \text{V)} \begin{cases} \mathfrak{E}_{(17)} \cdots (\delta_{41}\,\delta_{42}\,\delta_{43}) \cdots 1 & 1 \quad 1 \quad -1 \\ \mathfrak{E}_{(18)} \cdots (\delta_{44}\,\delta_{42}\,\delta_{43}) \cdots -2 & 1 \quad 1 \quad -1 \\ \mathfrak{E}_{(19)} \cdots (\delta_{44}\,\delta_{43}\,\delta_{41}) \cdots 1 & -2 \quad 1 \quad -1 \\ \mathfrak{E}_{(20)} \cdots (\delta_{44}\,\delta_{41}\,\delta_{42}) \cdots 1 & 1 \quad -2 \quad -1; \end{cases} \end{cases}$$

d. h. die 20 Punkte $\mathfrak{E}$ bilden 5 Tetraeder, deren Seitenflächen die Diagonalebenen sind, wobei in jeder Diagonalebene zwei Tetraederflächen zusammenfallen.

Diese fünf Tetraeder sind bez. Polartetraeder in Beziehung auf F_1 zu den fünf Tetraedern, welche sich analog aus der Figur des

Pentagons $\mathfrak{P}'$ ergeben. Andererseits liegen die 5 Tetraeder (9γ) bez. einfach perspectiv zu den fünf entsprechenden Tetraedern, welche aus dem Pentaeder Π' erhalten werden, und zwar so, dass $\mathfrak{c}_1$ das Centrum, γ_1 die Collineationsebene ist. Die Anordnung der 20 Punkte (9γ) als Eckpunkte von fünf Tetraedern, welche bez. zum Tetraeder T und den übrigen vier Tetraedern des Pentaeders Π *vierfach* perspectiv liegen, ergiebt sich aus den in § 10 anzustellenden Betrachtungen.

Was die *Schnittlinien* der 15 Ebenen α_r, γ_1, δ_{rr}, δ_{ik} anlangt, so sind ausser den 30 Tetraederkanten (vgl. 9γ), in welchen sich je zwei Diagonalebenen schneiden, noch vorhanden:

a) 10 Linien, in welchen sich je 2 Seitenflächen des Pentaeders und je eine Diagonalebene schneiden, z. B.

$$|\alpha_1\gamma_1\delta_{11}|, \ldots |\alpha_1\alpha_2\delta_{12}|, \ldots |\alpha_3\alpha_4\delta_{34}| \ldots;$$

auf jeder dieser Linien liegen drei der Schnittpunkte (9α) z. B.

$$\mathfrak{b}_{23},\ \mathfrak{b}_{34},\ \mathfrak{b}_{42} \text{ auf } |\alpha_1\,\gamma_1\,\delta_{11}|;$$

b) 15 Linien, in welchen sich je eine Seitenfläche und je zwei Diagonalebenen des Pentaeders schneiden, z. B.

$$|\alpha_1\delta_{34}\delta_{22}|,\ |\alpha_1\delta_{42}\delta_{33}|,\ |\alpha_1\delta_{23}\delta_{44}| \ldots |\gamma_1\delta_{12}\delta_{34}|,\ |\gamma_1\delta_{23}\delta_{14}|,\ |\gamma_1\delta_{31}\delta_{24}|;$$

auf jeder dieser Linien liegen je zwei Schnittpunkte (9α) und zwei Schnittpunkte (9β); z. B.

$$\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_{23};\ \mathfrak{D}_{13},\ \mathfrak{D}_{14} \text{ auf } |\alpha_1\,\delta_{23}\,\delta_{44}|.$$

Daraus folgt, dass die unter (9α), (9β), (9γ) aufgeführten Schnittpunkte in der That *alle* Schnittpunkte der 15 Ebenen darstellen. Denn von der Summe

$$10\cdot\binom{7}{3} + 15\cdot\binom{5}{3} + 20\binom{3}{3} = 520$$

ist die Summe

$$10\cdot(3-1)\binom{3}{3} + 15\cdot(4-1)\binom{3}{3} = 65$$

abzuziehen, wodurch sich die richtige Anzahl

$$455 = \binom{15}{3}$$

ergiebt.

7) Zur *Construction* zweier einfach perspectiven Tetraeder sei bemerkt, dass die vier Ecken (Seiten) des einen Tetraeders T und eine Ecke $\mathfrak{a}_1'$ (Seite α_1') des zweiten Tetraeders T' willkürlich annehmbar sind, dass dagegen die zweite Ecke $\mathfrak{a}_2'$ (Seite α_2') in der durch $a_{12}=|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2|$ und $\mathfrak{a}_1'$ bestimmten Ebene β_{34} liegen (den durch $a_{(12)}=|\alpha_1\,\alpha_2|$ und α_1' bestimmten Punkt $\mathfrak{b}_{34}$ enthalten), die dritte und vierte Ecke $\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{a}_4'$ (Seite α_3' und α_4') bez. auf $\mathfrak{b}_{33}=|\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_1|$ und $b_{44}=|\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{c}_1|$,

wo $\mathfrak{c}_1 = (|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1'| \, |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2'|)$ ist, liegen (bez. durch die Linien $b_{(33)} = |\alpha_3 \gamma_1|$ und $b_{44} = |\alpha_4 \gamma_1|$, wo $\gamma_1 = [|\alpha_1 \alpha_1'|, \, |\alpha_2 \alpha_2'|]$ ist, hindurchgehen) muss. Von den vier Elementen (Ecken oder Seiten) des zweiten Tetraeders gehört also das erste einer dreifachen, das zweite einer zweifachen, das dritte und das vierte einer einfachen Unendlichkeit an.

Dass für zwei Tetraeder das Schneiden entsprechender Kanten — mit Ausnahme des Falles, dass die beiden Tetraeder einen Eckpunkt und die gegenüberliegende Seite gemein haben — die Perspectivität zur Folge hat, ist von Ványi*) bemerkt worden.

8) Von speciellen durch besondere Werthe der Grössen u_1, u_2, u_3, u_4 bedingten Fällen für die Lage zweier einfach perspectiven Tetraeder sei hier nur der Fall $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ erwähnt. Alsdann liegen die Ecken von T in den Seitenflächen von T'; die Eckpunkte des Tetraeders T' sind die Punkte $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4$ (s. Formel 9γ) unter I)), die Seitenflächen sind die 4 Diagonalebenen $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}, \delta_{44}$ (Formel (8)). Die Eigenschaften dieser besonderen Figur, bei welcher zahlreiche der Schnittpunkte (5α)—(5γ) zusammenfallen und mehrfach harmonische Beziehungen oder polare Beziehungen auf das Tetraeder T als Fundamentaltetraeder auftreten, lassen sich ohne Schwierigkeit herleiten.

9) Wenn die Determinante U verschwindet oder sowohl die Determinante U, als auch ihre sämmtlichen ersten Minoren (s. Formel (3)) verschwinden, so verlieren der unter 1) aufgeführte Satz und die daraus gezogenen Folgerungen ihre Gültigkeit. Diejenigen Ausnahmefälle, bei welchen diesen Bedingungen je nach der Deutung der analytischen Ausdrücke entweder die Lagenbeziehungen entsprechen, dass die vier Seiten des zweiten Tetraeders T' sich in einem Punkte, bez. einer Geraden schneiden, oder die Lagenbeziehungen, dass die vier Eckpunkte des ersten Tetraeders T auf einer Ebene, bez. einer Geraden liegen, sind leicht zu erledigen.

Auf diejenigen den obigen Bedingungen entsprechenden Specialfälle, in welchen von den Elementen eines der beiden Tetraeder einige zusammenfallen, andere unbestimmt werden, hinzuweisen wird sich im folgenden Paragraphen Veranlassung bieten.

§ 8.

Unterscheidung der möglichen Fälle von mehrfach perspectiven Tetraedern.

1) Um die möglichen Fälle, in welchen zwei Tetraeder T und T' auf mehr als eine Art perspectiv liegen können**), übersichtlich unterscheiden zu können, wollen wir die 24 Permutationen der Elemente

*) L. c. S. 442.

**) Vgl. Ványi l. c.

(Seiten bez. Ecken) $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ des zweiten Tetraeders T' in folgende Gruppen bringen:

a) die (*positive*) Grundpermutation $1'\,2'\,3'\,4'$;

b) die 6 *negativen* Permutationen, bei welchen *zwei* Elemente ihre Plätze behalten;

c) die 8 *positiven* Permutationen, bei welchen *ein* Element seinen Platz behält;

d) die 6 *negativen* Permutationen, bei welchen *kein* Element seinen Platz behält;

e) die 3 *positiven* Permutationen, bei welchen *kein* Element seinen Platz behält.

2) Betrachten wir zuerst den Fall, in welchem ausser der ersten Anordnung a) noch zugleich eine der 6 Anordnungen b) stattfinden soll, z. B.

$$(10) \qquad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 4' & 3'. \end{cases}$$

Als Bedingungen dafür, dass auch die Schnittlinien $|\alpha_3\,\alpha_4'|$ und $|\alpha_4\,\alpha_3'|$ in der Ebene γ_1 liegen sollen, ergeben sich (vgl. Formel (2) in § 7) die Beziehungen:

$$(10\alpha) \qquad u_3 = u_4 = 1,$$

d. h. es müssen die beiden Seitenflächen α_3' und α_4' mit einander und mit γ_1 zusammenfallen. Alsdann fallen auch die Eckpunkte $\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{a}_4'$ in dem einen Punkte $\mathfrak{b}_{34}$ (4α) zusammen, während $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{a}_2'$ unbestimmt, d. h. beliebig bez. auf $b_{(22)}$ und $b_{(11)}$ annehmbar werden, während auch $\mathfrak{c}_1$ unbestimmt, d. h. irgend ein Punkt der Geraden a_{34} wird.

Wenn also die Ebenen der beiden Tetraeder T und T' den beiden Anordnungen (10) entsprechen, so folgt nicht nothwendig, dass die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken sich in einem Punkte $\mathfrak{c}_1$ schneiden müssen. Wählt man aber z. B. $\mathfrak{a}_1'$ beliebig auf $b_{(22)}$ und bestimmt:

$$\mathfrak{c}_1 \;= (|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1'|,\ |\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4'|)$$
$$\mathfrak{a}_2' = (|\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{a}_2|,\ b_{(11)}),$$

so schneiden sich auch die Verbindungslinien der nach beiden Arten der Anordnung (10) sich entsprechenden Eckpunkte beider Tetraeder in demselben Punkte $\mathfrak{c}_1$.

Ein eigentliches Tetraeder T', welches nach den beiden Anordnungen (10) zu T perspectiv läge, giebt es nicht.

3) Soll für beide Tetraeder ausser der ersten Anordnung a) noch zugleich eine der 8 Anordnungen c) stattfinden, z. B.

$$(11) \qquad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 3' & 4' & 2', \end{cases}$$

so ergeben sich als Bedingungen dafür, dass sich je 4 Ebenen:

$$\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1'\alpha_3';\ \alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1'\alpha_4';\ \alpha_1\alpha_4,\ \alpha_1'\alpha_2';$$

und ebenso

$$\alpha_3\alpha_4,\ \alpha_2'\alpha_4';\ \alpha_2\alpha_4,\ \alpha_2'\alpha_3';\ \alpha_2\alpha_3,\ \alpha_3'\alpha_4'$$

in je einem Punkte schneiden sollen, die Relationen:

(11 α) $$u_2 = u_3 = u_4 = 1,$$

d. h. es müssen die drei Seitenflächen α_2', α_3', α_4' mit einander und mit γ_1 zusammenfallen. Alsdann findet ausser den beiden Anordnungen (11) auch von c) die Anordnung (mit 1 2 3 4):

(11 β) $$1'\ 4'\ 2'\ 3'$$

und von den Anordnungen unter b) die drei Anordnungen:

(11 γ) $$1'\ 2'\ 4'\ 3';\quad 1'\ 4'\ 3'\ 2';\quad 1'\ 3'\ 2'\ 4',$$

welchen einzeln die Bedingungen:

$$u_3 = u_4 = 1;\quad u_4 = u_2 = 1;\quad u_2 = u_3 = 1$$

entsprechen, statt. Die beiden Tetraeder T und T' sind also dann auf 6 *Arten* complanar mit der gemeinschaftlichen Collineationsebene γ_1.

Die vier Eckpunkte des zweiten Tetraeders T', sowie das Centrum $\mathfrak{c}_1$ werden unbestimmt (es verschwinden U und sämmtliche erste Minoren); d. h. $\mathfrak{a}_1'$ ist ein beliebiger Punkt der Ebene $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \alpha_1$, ebenso $\mathfrak{c}_1$; dagegen sind $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{a}_4'$ drei beliebig auf der Geraden $\mathfrak{b}_{(11)}$ annehmbare Punkte. Also auch hier schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken beider Tetraeder nicht nothwendig in dem Punkte $\mathfrak{c}_1$; wählt man aber $\mathfrak{a}_1'$ mit $\mathfrak{c}_1$ zusammenfallend beliebig in der Ebene α_1 und bestimmt $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{a}_4'$ als die Schnittpunkte der Verbindungslinien von $\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{c}_1$ mit $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$, so sind die beiden sechsfach complanaren Tetraeder auch einfach perspectiv.

Ein eigentliches Tetraeder T', welches auf die geforderte Art zu T nach den beiden Anordnungen (11) perspectiv läge, existirt nicht.

4) Die Forderung, dass ausser der Anordnung a) noch zugleich eine der Anordnungen d) z. B.

(12) $$\begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2' & 3' & 4' & 1' \end{cases}$$

stattfinden soll, ergiebt als Bedingungen dafür, dass sich je 4 Ebenen:

$$\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_2'\alpha_3';\ \alpha_1\alpha_3,\ \alpha_2'\alpha_4';\ \alpha_1\alpha_4,\ \alpha_1'\alpha_2';$$

$$\alpha_3\alpha_4,\ \alpha_1'\alpha_4';\ \alpha_2\alpha_4,\ \alpha_1'\alpha_3';\ \alpha_2\alpha_3,\ \alpha_3'\alpha_4'$$

in je einem Punkte schneiden, die Relationen:

$$u_3 - 1 = 0;\quad u_2u_4 - 1 = 0;\quad u_2 - 1 = 0;$$
$$u_1 - 1 = 0;\quad u_1u_3 - 1 = 0;\quad u_4 - 1 = 0$$

d. h.

(12 α) $$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1.$$

In diesem Falle verschwinden U und sämmtliche erste und zweite Minoren; die 4 Seitenflächen α_1', α_2', α_3', α_4' fallen sämmtlich untereinander und mit der Ebene γ_1 zusammen; die 4 Eckpunkte $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{a}_4'$, sowie $\mathfrak{c}_1$ werden unbestimmt.

Die beiden Tetraeder T und T' sind in diesem ganz speciellen Falle auf alle 24 (den Anordnungen a) bis e) entsprechende) Arten complanar; die im Allgemeinen — da die vier Eckpunkte $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{a}_4'$ willkürlich in der Ebene γ_1 annehmbar sind — nicht vorhandene einfache Perspectivität kann bewirkt werden, indem man z. B. $\mathfrak{a}_1'$ beliebig in γ_1 und $\mathfrak{c}_1$ beliebig auf $b_{11} = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1'|$ annimmt.

Also auch hier giebt es kein eigentliches Tetraeder T', welches nach den beiden Anordnungen (12) zu T perspectiv wäre.

5) Wenn ausser der Anordnung a) noch eine der drei Anordnungen e), z. B.

$$(13) \qquad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2' & 1' & 4' & 3' \end{cases}$$

stattfinden soll, so resultiren als Bedingungen dafür, dass sich je 4 Ebenen:

$$\alpha_1\,\alpha_3,\ \alpha_2'\,\alpha_4'; \quad \alpha_1\,\alpha_4,\ \alpha_2'\,\alpha_3';$$
$$\alpha_2\,\alpha_4,\ \alpha_1'\,\alpha_3'; \quad \alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_1'\,\alpha_4'$$

in je einem Punkte schneiden sollen, die Relationen:

$$(13\alpha) \qquad \begin{cases} u_2\,u_4 - 1 = 0, & u_2\,u_3 - 1 = 0 \\ u_1\,u_3 - 1 = 0, & u_1\,u_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

oder

$$(13\beta) \qquad u_3 = u_4 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_2},$$

oder wenn wir den Werth u_1 durch u bezeichnen:

$$(13\gamma) \qquad u_2 = u, \quad u_3 = u_4 = \frac{1}{u}.$$

Es ergiebt sich also hier ein eigentliches Tetraeder T', welches auf die *beiden* Arten der in (13) gegebenen Anordnungen zu T perspectiv liegt. Die genauere Untersuchung der durch zwei solche *zweifach* perspectiven Tetraeder gebildeten Figur wird in dem folgenden § 9 angestellt werden.

6) Sollen ausser der Anordnung a) noch zugleich *zwei* der Anordnungen e), z. B.

$$(14) \qquad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2' & 1' & 4' & 3' \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3' & 4' & 1' & 2' \end{cases}$$

bestehen, so resultiren ausser den Bedingungen (13β) noch:

$$(14\alpha) \qquad u_2 = u_4 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3}.$$

Aus (13β) und (14α) folgt:

$$(14\beta)\qquad \begin{cases} u_2 = u_3 = u_4 = u = \frac{1}{u} \\ \text{d. h.} \qquad u^2 = 1, \end{cases}$$

oder, da der Werth $u = 1$ den bereits erledigten Degenerationsfall 4) liefert

$$u = -1,$$

also:

$$(14\gamma)\qquad u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = -1.$$

Dann ist aber das so bestimmte eigentliche Tetraeder T' ausser nach den drei Anordnungen (14) auch noch entsprechend der dritten Anordnung c), nämlich nach der Anordnung:

$$(14\delta)\qquad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4' & 3' & 2' & 1' \end{cases}$$

zu dem Tetraeder T perspectiv liegend.

Dieser Fall von zwei *vierfach* perspectiven Tetraedern soll im § 10 genauer betrachtet werden.

§ 9.

Zweifach perspective Tetraeder.

1) Zufolge der im § 8, 5) gegebenen Relationen erhält man für die Seitenflächen und Eckpunkte eines Tetraeders T', welches nach den *beiden* Anordnungen:

$$(15\alpha)\qquad \begin{cases} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \\ \underline{1'\ \ 2'\ \ 3'\ \ 4'} \\ \mathfrak{c}_1 - \gamma_1 \end{cases} \qquad\qquad (15\beta)\qquad \begin{cases} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \\ \underline{2'\ \ 1'\ \ 4'\ \ 3'} \\ \mathfrak{c}_2 - \gamma_2 \end{cases}$$

zu dem Tetraeder T perspectiv liegt, folgende Werthe für die Coordinaten (vgl. § 7, Formeln (2α), (2β)):

$$(15\gamma)\begin{cases} \alpha_1' \cdots u & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_2' \cdots 1 & u & 1 & 1 \\ \alpha_3' \cdots 1 & 1 & \frac{1}{u} & 1 \\ \alpha_4' \cdots 1 & 1 & 1 & \frac{1}{u} \end{cases} \qquad (15\delta)\begin{cases} \mathfrak{a}_1' \cdots -1 & -\frac{1}{u} & 1 & 1 \\ \mathfrak{a}_2' \cdots -\frac{1}{u} & -1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{a}_3' \cdots\ \ 1 & 1 & -1 & -u \\ \mathfrak{a}_4' \cdots\ \ 1 & 1 & -u & -1; \end{cases}$$

die Determinante U (Formel 3) erhält den Werth:

$$(15\varepsilon)\qquad U = -\frac{(1-u)^4}{u^2},$$

und ebenso resultiren einfache Werthe für die ersten und zweiten Minoren derselben.

2) Während die sechs Schnittpunkte b_{ik} je zweier der ersten Anordnung (15α) entsprechenden Kanten (vgl. § 7 (4α) und (4β)) in der Ebene:

$$(16) \qquad \gamma_1 \ldots 1 \; 1 \; 1 \; 1$$

zu je dreien auf den vier Geraden $b_{(ii)}$ liegen, sind die sechs Schnittpunkte je zweier der zweiten Anordnung (15β) entsprechenden Kanten, nämlich:

$$(16\alpha) \qquad \begin{cases} \mathfrak{b}_{12}^{(2)} = (a_{12}\, a'_{12}) = \mathfrak{b}_{12} \cdots & 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathfrak{b}_{13}^{(2)} = (a_{13}\, a'_{24}) \qquad \cdots & -1 \quad 0 \quad u \quad 0 \\ \mathfrak{b}_{14}^{(2)} = (a_{14}\, a'_{23}) \qquad \cdots & -1 \quad 0 \quad 0 \quad u \\ & \\ \mathfrak{b}_{34}^{(2)} = (a_{34}\, a'_{34}) = \mathfrak{b}_{34} \cdots & 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\ \mathfrak{b}_{24}^{(2)} = (a_{24}\, a'_{13}) \qquad \cdots & 0 \quad -1 \quad 0 \quad u \\ \mathfrak{b}_{23}^{(2)} = (a_{13}\, a'_{14}) \qquad \cdots & 0 \quad -1 \quad u \quad 0 \end{cases}$$

in der Ebene:

$$(16\beta) \qquad \gamma_2 \ldots u \; u \; 1 \; 1$$

analog viermal zu dreien auf einer Geraden $b_{(ik)}$, nämlich:

$$(16\gamma) \qquad \begin{cases} \mathfrak{b}_{23}^{(2)}\, \mathfrak{b}_{34}\, \mathfrak{b}_{42}^{(2)} \text{ auf der Geraden } & b_{(12)} = |\alpha_1\, \alpha_2'| \\ \mathfrak{b}_{34}\, \mathfrak{b}_{41}^{(2)}\, \mathfrak{b}_{13}^{(2)} \quad ,, \quad ,, \quad ,, & b_{(21)} = |\alpha_2\, \alpha_1'| \\ \mathfrak{b}_{41}^{(2)}\, \mathfrak{b}_{12}\, \mathfrak{b}_{24}^{(2)} \quad ,, \quad ,, \quad ,, & b_{(34)} = |\alpha_3\, \alpha_4'| \\ \mathfrak{b}_{12}\, \mathfrak{b}_{23}^{(2)}\, \mathfrak{b}_{31}^{(2)} \quad ,, \quad ,, \quad ,, & b_{(43)} = |\alpha_4\, \alpha_3'| \end{cases}$$

den Eckpunkten des durch diese vier Geraden bestimmten vollständigen Vierseits entsprechend gruppirt.

Analog, wie die sechs durch je zwei der ersten Anordnung (15α) entsprechende Kanten gelegten Ebenen β_{ik} (vgl. § 7 (4γ) und (4δ)) nämlich:

$$(4\gamma') \qquad \begin{cases} \beta_{12} \ldots 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \beta_{13} \ldots u \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \beta_{14} \ldots u \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \beta_{34} \ldots 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\ \beta_{24} \ldots 0 \quad u \quad 0 \quad 1 \\ \beta_{23} \ldots 0 \quad u \quad 1 \quad 0 \end{array} \right|$$

sich in dem Punkte:

$$(17) \qquad \mathfrak{c}_1 \ldots 1 \; 1 \; -u \; -u$$

und zwar viermal zu dreien in einer Geraden b_{ii} schneiden, gehen die sechs durch je zwei der zweiten Anordnung (15β) entsprechende Kanten gelegten Ebenen, nämlich:

$$(17\alpha)\quad \begin{cases} \beta^{(2)}_{12} = [a_{(12)}\, a'_{(12)}] = \beta_{12} \cdots & 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \beta^{(2)}_{13} = [a_{(13)}\, a'_{(24)}] = \qquad \cdots & 1 \quad\;\; 0 \quad 1 \quad 0 \\ \beta^{(2)}_{14} = [a_{(14)}\, a'_{(23)}] = \qquad \cdots & 1 \quad\;\; 0 \quad 0 \quad 1 \\ \beta^{(2)}_{34} = [a_{(34)}\, a'_{(34)}] = \beta_{34} \cdots & 0 \quad\;\; 0 \quad 1 \quad -1 \\ \beta^{(2)}_{24} = [a_{(24)}\, a'_{(13)}] = \qquad \cdots & 0 \quad\;\; 1 \quad 0 \quad 1 \\ \beta^{(2)}_{23} = [a_{(23)}\, a'_{(14)}] = \qquad \cdots & 0 \quad\;\; 1 \quad 1 \quad 0 \end{cases}$$

durch den Punkt:

$$(17\beta)\qquad \mathfrak{c}_2 \cdots 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1$$

hindurch und zwar so, dass sie sich viermal zu dreien in einer Geraden b_{ik}, nämlich:

$$(17\gamma)\quad \begin{cases} \beta^{(2)}_{23}\,\beta_{34}\,\beta^{(2)}_{42} & \text{in der Geraden} \quad b_{12} = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2'| \\ \beta_{34}\,\beta^{(2)}_{41}\,\beta^{(2)}_{13} & \text{,, ,, ,,} \quad b_{21} = |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1'| \\ \beta^{(2)}_{41}\,\beta_{12}\,\beta^{(2)}_{24} & \text{,, ,, ,,} \quad b_{34} = |\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4'| \\ \beta_{12}\,\beta^{(2)}_{23}\,\beta^{(2)}_{31} & \text{,, ,, ,,} \quad b_{43} = |\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_3'| \end{cases}$$

schneiden, also den sechs Ebenen eines vollständigen durch diese vier Geraden bestimmten Vierkants entsprechen.

Auch hier gilt die Beziehung, dass je ein Punkt $\mathfrak{b}^{(2)}_{ik}$ und eine Ebene $\beta^{(2)}_{rs}$, z. B. $\mathfrak{b}^{(2)}_{13}$ und $\beta^{(2)}_{24}$; $\mathfrak{b}^{(2)}_{24}$ und $\beta^{(2)}_{13}$ u. s. w. incident sind; ferner aber die wichtige Relation, dass *der Punkt* $\mathfrak{c}_1$ *in der Ebene* γ_2, *der Punkt* $\mathfrak{c}_2$ *in der Ebene* γ_1 *liegt.* Der Punkt $\mathfrak{c}_2$, das zweite Perspectivitätscentrum, fällt hier mit dem bei der Figur zweier einfach perspectiven Tetraeder bestimmten Punkte:

$$\mathfrak{D}_{5,21} \cdots (\gamma_1;\ \delta_{23}\delta_{14};\ \delta_{13}\delta_{24})$$

(vgl. § 7 Formel (9β)) zusammen.

3) Die vollständige durch die 4 Ebenen α_r, die 4 Ebenen α_r', die 10 Ebenen β_{ik} und $\beta^{(2)}_{ik}$ und die beiden Collineationsebenen γ_1 und γ_2 gebildete Raumfigur ist dadurch ausgezeichnet, dass die 20 Ebenen derselben sich

α) in 16 Punkten zu je *acht*,

β) in 4 Punkten zu je *sieben*,

γ) in 72 Punkten zu je *vier* und

δ) in 32 Punkten zu je *drei*

schneiden.

Aus der nachfolgenden Zusammenstellung sind die Anordnungen dieser Schnittpunkte in Gruppen und die zugehörigen Coordinaten-

werthe zu ersehen; es ist auch hier meistens nur der erste Punkt einer Gruppe aufgeführt (vergleiche hierzu § 7 (5α), (5β), (5γ)).

(18α)	4 Punkte:	$\mathfrak{a}_1 = (\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4, \beta_{34}=\beta_{34}^{(2)}, \beta_{42}\beta_{23}\beta_{42}^{(2)}\beta_{23}^{(2)}) \cdots$		1	0	0	0
	4 „ :	$\mathfrak{a}_1' = (\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4', \beta_{34}^{(2)}=\beta_{34}, \beta_{13}^{(2)}\beta_{14}^{(2)}\beta_{42}\beta_{23}) \cdots$		-1	$-\frac{1}{u}$	1	1
	4 „ :	$\mathfrak{b}_{13} = (\alpha_2\,\alpha_4,\ \alpha_2'\alpha_4',\ \beta_{24},\ \beta_{13}^{(2)}\beta_{24}^{(2)},\ \gamma_1) \cdots$		1	0	-1	0
	4 „ :	$\mathfrak{b}_{13}^{(2)} = (\alpha_1'\alpha_3',\ \alpha_2\,\alpha_4,\ \beta_{24}^{(2)},\ \beta_{13}\,\beta_{24},\ \gamma_2) \cdots$		-1	0	u	0
(18β)	2 „ :	$\mathfrak{b}_{12} = \mathfrak{b}_{12}^{(2)} = (\alpha_3\alpha_4, \alpha_3'\alpha_4', \beta_{34}=\beta_{34}^{(2)}, \gamma_1\gamma_2) \cdots$		1	-1	0	0
		$\mathfrak{b}_{34} = \mathfrak{b}_{34}^{(2)} = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1'\alpha_2', \beta_{12}=\beta_{12}^{(2)}, \gamma_1\gamma_2) \cdots$		0	0	1	-1
	2 „ :	$\mathfrak{c}_1 = (\beta_{12}=\beta_{12}^{(2)}, \beta_{34}=\beta_{34}^{(2)}, \beta_{13}\beta_{24}\beta_{14}\beta_{23}, \gamma_2) \cdots$		1	1	$-u$	$-u$
		$\mathfrak{c}_2 = (\beta_{12}^{(2)}=\beta_{12}, \beta_{34}^{(2)}=\beta_{34}, \beta_{13}^{(2)}\beta_{24}^{(2)}\beta_{14}^{(2)}\beta_{23}^{(2)}, \gamma_1) \cdots$		1	1	-1	-1
(18γ)	4 „ :	$\mathfrak{a}_2^{[1]}$	$= (\alpha_1, \alpha_3'\alpha_4', \beta_{34}) \cdots$	0	$-\left(\frac{1}{u}+1\right)$	1	1
	4 „ :	$\mathfrak{a}_{(2)}^{[1']}$	$= (\alpha_1', \alpha_3\alpha_4, \beta_{34}) \cdots$	1	$-u$	0	0
	2 „ :	$\mathfrak{e}_{12}$	$= (\alpha_1\,\alpha_2,\ \beta_{12}\beta_{34}) \cdots$	0	0	1	1
	2 „ :	$\mathfrak{e}_{12}'$	$= (\alpha_1'\alpha_2',\ \beta_{12}\beta_{34}) \cdots$	-1	-1	$\frac{1+u}{2}$	$\frac{1+u}{2}$
	4 „ :	$\mathfrak{c}_1^{[1]}$	$= (\alpha_1, \beta_{23}\,\beta_{34}\,\beta_{42}) \cdots$	0	-1	u	u
	4 „ :	$\mathfrak{c}_1^{[1']}$	$= (\alpha_1', \beta_{23}\,\beta_{34}\,\beta_{42}) \cdots$	$\frac{2u-1}{u}$	1	$-u$	$-u$
	4 „ :	$\mathfrak{c}_2^{[1]}$	$= (\alpha_1, \beta_{23}^{(2)}\,\beta_{34}\,\beta_{42}^{(2)}) \cdots$	0	-1	1	1
	4 „ :	$\mathfrak{c}_2^{[1']}$	$= (\alpha_1', \beta_{13}^{(2)}\,\beta_{34}\beta_{41}^{(2)}) \cdots$	1	$2-u$	-1	-1
	4 „ :	$\mathfrak{f}_{11,34}$	$= (\alpha_1\ \alpha_1'\ \beta_{34}\ \gamma_1) \cdots$	0	-2	1	1
	8 „ :	$\mathfrak{f}_{11,42}$	$= (\alpha_1\ \alpha_1'\ \beta_{42}\ \gamma_1) \cdots$	0	-1	$1-u$	u
	4 „ :	$\mathfrak{f}_{12,34}^{(2)}$	$= (\alpha_1\ \alpha_2'\ \beta_{34}\ \gamma_2) \cdots$	0	$-\frac{2}{u}$	1	1
	8 „ :	$\mathfrak{f}_{12,42}^{(2)}$	$= (\alpha_1\ \alpha_2'\ \beta_{42}^{(2)}\ \gamma_2) \cdots$	0	1	$1-u$	-1
	4 „ :	$\mathfrak{g}_1$	$= (\beta_{23}\,\beta_{34}\ \beta_{42}\ \gamma_1) \cdots$	$2u-1$	1	$-u$	$-u$
	4 „ :	$\mathfrak{g}_1^{(2)}$	$= (\beta_{13}^{(2)}\,\beta_{34}\,\beta_{41}^{(2)}\ \gamma_2) \cdots$	1	$\frac{2}{u}-1$	-1	-1
	2 „ :	$\mathfrak{k}_2$	$= (\beta_{13}\ \beta_{24}\ \gamma_1\ \gamma_2) \cdots$	1	-1	$-u$	u
		$\mathfrak{k}_3$	$= (\beta_{14}\ \beta_{23}\ \gamma_1\ \gamma_2) \cdots$	1	-1	u	$-u$

$$
(18\gamma)\left\{\begin{array}{llllllll}
\text{2 Punkte:} & \mathfrak{k}_2^{(2)} = (\beta_{13}^{(2)}\,\beta_{24}^{(2)}\,\gamma_1\,\gamma_2) & & & & & \\
 & \quad = \mathfrak{D}_{5,32}\,^{*)} & \cdots & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 & \mathfrak{k}_3^{(2)} = (\beta_{14}^{(2)}\,\beta_{23}^{(2)}\,\gamma_1\,\gamma_2) & & & & & \\
 & \quad = \mathfrak{D}_{5,13}\,^{*)} & \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{l}_{13} = (\beta_{13}\,\beta_{14}^{(2)}\,\beta_{23}^{(2)}\,\gamma_1) & \cdots & 1 & u & -u & -1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{l}_{13}^{(2)} = (\beta_{13}^{(2)}\,\beta_{14}\,\beta_{23}\,\gamma_2) & \cdots & 1 & \frac{1}{u} & -1 & -u
\end{array}\right.
$$

$$
(18\delta)\left\{\begin{array}{llllllll}
4\ \text{,,}: & \mathfrak{h}_{13} = (\alpha_1\,\alpha_3'\,\beta_{24}) & \cdots & 0 & -\frac{1}{u} & 1-u & 1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{h}_{31} = (\alpha_3\,\alpha_1'\,\beta_{24}) & \cdots & 1-u & -\frac{1}{u} & 0 & 1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{h}_{13}^{(2)} = (\alpha_1\,\alpha_3'\,\beta_{23}^{(2)}) & \cdots & 0 & 1 & -1 & \frac{1-u}{u} \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{h}_{31}^{(2)} = (\alpha_3\,\alpha_1'\,\beta_{41}^{(2)}) & \cdots & 1 & 1-u & 0 & -1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{m}_{23,24} = (\alpha_1\,\beta_{23}\,\beta_{24}^{(2)}) & \cdots & 0 & -1 & u & 1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{m}_{24,23} = (\alpha_1\,\beta_{24}\,\beta_{23}^{(2)}) & \cdots & 0 & -1 & 1 & u \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{m}_{23,13}^{(2)} = (\alpha_1'\,\beta_{23}\,\beta_{13}^{(2)}) & \cdots & -u & -1 & u & u^2-u+1 \\
4\ \text{,,}: & \mathfrak{m}_{24,14}^{(2)} = (\alpha_1'\,\beta_{24}\,\beta_{14}^{(2)}) & \cdots & -u & -1 & u^2-u+1 & u.
\end{array}\right.
$$

Die *Schnittlinien* der 20 Ebenen sind *einmal* 8 Gerade, in welchen sich je *vier* Ebenen schneiden, nämlich:

$$
(19\alpha)\quad\left\{\begin{array}{l}
\text{4 Gerade: } a_{(13)} = |\alpha_1\,\alpha_3\,\beta_{13}\,\beta_{13}^{(2)}| = |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{b}_{24}\,\mathfrak{b}_{24}^{(2)}| = a_{24} \\
4\ \text{,,}:\ a'_{(13)} = |\alpha_1'\,\alpha_3'\,\beta_{24}^{(2)}\,\beta_{13}| = |\mathfrak{a}_2'\,\mathfrak{a}_4'\,\mathfrak{b}_{13}^{(2)}\,\mathfrak{b}_{24}| = a_{24}';
\end{array}\right.
$$

ferner 24 Gerade, in welchen sich je *drei* Ebenen schneiden, nämlich:

$$
(19\beta)\left\{\begin{array}{l}
\text{2 Gerade: } a_{(12)} \text{ und } a_{(34)};\quad a_{(12)} = |\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_{12}| = |\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{a}_4^{[3']}\,\mathfrak{a}_3^{[4']}| = a_{34} \\
2\ \text{,,}:\ a'_{(12)}\ \text{,,}\ a'_{(34)};\quad a'_{(12)} = |\alpha_1'\,\alpha_2'\,\beta_{12}| = |\mathfrak{a}_3'\,\mathfrak{a}_4',\ \mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{e}_{12}',\ \mathfrak{a}_4^{[3]}\,\mathfrak{a}_3^{[4]}| = a_{34}' \\
4\ \text{,,}:\ b_{(11)} = |\alpha_1\,\alpha_1'\,\gamma_1| = |\mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{b}_{42}\,\mathfrak{b}_{23},\ \mathfrak{f}_{11,34}\,\mathfrak{f}_{11,42}\,\mathfrak{f}_{11,23}| \\
4\ \text{,,}:\ b_{(12)} = |\alpha_1\,\alpha_2'\,\gamma_2| = |\mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{b}_{42}^{(2)}\,\mathfrak{b}_{23}^{(2)},\ \mathfrak{f}_{12,34}^{(2)}\,\mathfrak{f}_{12,42}^{(2)}\,\mathfrak{f}_{12,23}^{(2)}| \\
4\ \text{,,}:\ b_{11} = |\beta_{34}\,\beta_{42}\,\beta_{23}| = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1',\ \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{c}_1^{[1]}\,\mathfrak{c}_1^{[1']}| \\
4\ \text{,,}:\ b_{12} = |\beta_{34}\,\beta_{42}^{(2)}\,\beta_{23}^{(2)}| = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2',\ \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{g}_2^{(2)},\ \mathfrak{c}_2^{[1]}\,\mathfrak{c}_2^{[1']}| \\
2\ \text{,,}:\ d_2 \text{ und } d_3;\quad d_2 = |\beta_{13}^{(2)}\,\beta_{24}^{(2)}\,\gamma_1| = |\mathfrak{b}_{13}\,\mathfrak{b}_{24},\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{k}_2^{(2)},\ \mathfrak{l}_{14}\,\mathfrak{l}_{23}| \\
2\ \text{,,}:\ d_2^{(2)}\ \text{,,}\ d_3^{(2)};\quad d_2^{(2)} = |\beta_{13}\,\beta_{24}\,\gamma_2| = |\mathfrak{b}_{13}^{(2)}\,\mathfrak{b}_{24}^{(2)},\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{k}_2,\ \mathfrak{l}_{14}^{(2)}\,\mathfrak{l}_{23}^{(2)}|;
\end{array}\right.
$$

---

*) Vgl. Formel (9β) in § 7.

endlich 70 Gerade, in denen sich je zwei Ebenen schneiden. Die Summe der in ((18α) bis (18δ)) aufgeführten Schnittpunkte:

$$16 \cdot \binom{8}{3} + 4 \cdot \binom{7}{3} + 72 \cdot \binom{4}{3} + 32 \cdot \binom{3}{3} = 1356$$

muss also, da auf jeder der 8 Geraden (19α) vier, auf jeder der 24 Geraden (19β) sechs Schnittpunkte liegen, um

$$8 \cdot (4-1)\binom{4}{3} + 24(6-1)\binom{3}{3} = 216$$

vermindert werden, was in der That die richtige Anzahl

$$1140 = \binom{20}{3}$$

ergiebt.

Untersucht man die in einer der 20 Ebenen durch die Spuren der übrigen 19 Ebenen erzeugte Figur, so ergiebt sich, dass in jeder der 4 Ebenen:

$$\beta_{12} = \beta_{12}^{(2)}, \quad \beta_{34} = \beta_{34}^{(2)}, \quad \gamma_1 \text{ und } \gamma_2$$

sich 13 Gerade

7 mal zu vieren,
6 mal zu dreien,
18 mal zu zweien

schneiden. Die in jeder der anderen 16 Ebenen α_r, α_r', $\beta_{13}, \dots$, $\beta_{13}^{(2)} \dots$ entstehende Figur enthält dagegen 12 Gerade, welche sich

6 mal zu vieren,
5 mal zu dreien,
15 mal zu zweien

schneiden.

In jeder dieser 16 Ebenen entsteht derjenige im ersten Theil § 2 VI) betrachtete besondere Fall der Figur zweier *zweifach* perspectiven Dreiecke, in welchem zweimal je eine Ecke des zweiten Dreiecks auf je einer Seite des ersten Dreiecks liegt. (Vgl. die Relationen (16) und (16β) in § 2). In der Ebene α_4 z. B. hat man, wenn wir die Punkte

$$\mathfrak{b}_{23}^{(2)} \text{ durch } \mathfrak{a}_1^{[4]},$$
$$\mathfrak{b}_{13}^{(2)} \text{ durch } \mathfrak{a}_2^{[4]},$$

vgl. (5β) dieses Paragraphen) bezeichnen, folgende *zwei zweifach perspectiven* Dreiecke:

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_1^{[4]} & \mathfrak{a}_2^{[4]} & \mathfrak{a}_3^{[4]} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{c}_1^{(4)} - b_{(44)}} \end{array} & \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_2^{[4]} & \mathfrak{a}_1^{[4]} & \mathfrak{a}_3^{[4]} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{a}_3 - b_{(43)}} \end{array} \end{array} \right.$$

in der speciellen Beziehung, dass

$$\mathfrak{a}_1^{[4]} \text{ auf } |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3| \text{ und } \mathfrak{a}_2^{[4]} \text{ auf } |\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1|$$

liegt.

Von besonderen Eigenschaften der vorliegenden Raumfigur seien noch folgende erwähnt:

a) Auf den Kanten a_{12}, a_{34}, a'_{12} und a'_{34} liegen folgende *harmonische* Punktpaare:

auf a_{12} die Punktpaare $\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{c}_{34}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$,
„ a_{34} „ „ $\mathfrak{b}_{34}\mathfrak{c}_{12}$ „ $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$,
„ a'_{12} „ „ $\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{c}'_{34}$ „ $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$,
„ a'_{34} „ „ $\mathfrak{b}_{34}\mathfrak{c}'_{12}$ „ $\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}'_4$.

b) Auf der Schnittlinie der beiden Collineationsebenen γ_1 und γ_2 liegen die beiden Punktpaare:

$$k_2^{(2)}\,k_3^{(2)} \text{ und } k_2\,k_3$$

(s. (18γ)) harmonisch zu $\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}$; denn in der Ebene γ_1 ist das Dreieck $\mathfrak{c}_2 k_2^{(2)} k_3^{(2)}$ das Diagonaldreieck des durch die vier Geraden $\mathfrak{b}_{(ii)}$ (s. (19β)) gebildeten Vierseits, dessen Eckenpaare:

$$\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34},\ \mathfrak{b}_{13}\mathfrak{b}_{24},\ \mathfrak{b}_{14}\mathfrak{b}_{23}$$

sind, und in der Ebene γ_2 ist das Dreieck $\mathfrak{c}_1 k_2 k_3$ das Diagonaldreieck des durch die vier Geraden $b_{(ik)}$ gebildeten Vierseits, dessen Eckenpaare:

$$\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34},\ \mathfrak{b}_{13}^{(2)}\mathfrak{b}_{24}^{(2)},\ \mathfrak{b}_{14}^{(2)}\mathfrak{b}_{23}^{(2)}$$

sind.

c) Auf der Schnittlinie der beiden Ebenen β_{12} und β_{34} (der Verbindungslinie der beiden Centren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$) liegen die beiden Punktpaare:

$$\mathfrak{c}_{12}\mathfrak{c}_{34} \text{ und } \mathfrak{c}'_{12}\mathfrak{c}'_{34}$$

harmonisch zu $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$.

4) Der Nachweis, dass analog die 20 Punkte $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_r'$, $\mathfrak{b}_{ik}$ und $\mathfrak{b}_{ik}^{(2)}$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ zu je *acht* in 16 Ebenen (α_r, α_r', β_{13} . . ., $\beta_{13}^{(2)}$ . . .), zu je *sieben* in 4 Ebenen (β_{12}, β_{34}, γ_1, γ_2), ausserdem zu je *vier* in 72 Ebenen und zu je *drei* in 32 Ebenen liegen, ergiebt sich analytisch sofort, wenn das zweite Tetraeder T' zum Coordinatentetraeder gewählt wird. Ausser dem polar-reciproken Entsprechen der Punkte und Ebenen, sowie der Geraden (vgl. § 7 unter 4) Formeln (6) und (7)) in Beziehung auf die Fläche zweiter Ordnung F_1 zufolge der ersten Anordnung (15α) erhalten wir hier noch zufolge der zweiten Anordnung (15β) ein zweites polar-reciprokes Entsprechen der Ebenen und Punkte, sowie der Geraden in Beziehung auf eine zweite Fläche F_2 der zweiten Ordnung. (Vgl. auch die analoge Betrachtung bei zwei zweifach perspectiven Dreiecken § 2 unter 2)).

Die Gleichung der Oberfläche F_1, in Beziehung auf welche die beiden Tetraeder T und T' nach der ursprünglichen Anordnung

$$\begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{cases}$$

sich polarreciprok entsprechen, ist jetzt (vgl. Formel (7) in § 7):

$$(7\alpha)\quad \left.\begin{aligned} F_1 \equiv u x_1^2 + u x_2^2 + \frac{1}{u} x_3^2 + \frac{1}{u} x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ + 2x_1x_4 + 2x_3x_4 + 2x_2x_4 + 2x_2x_3 \end{aligned}\right\} = 0,$$

während die zweite Fläche F_2, in Bezug auf welche die beiden Tetraeder T und T' nach der zweiten Anordnung

$$\begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2' & 1' & 4' & 3' \end{cases}$$

sich polarreciprok entsprechen, durch:

$$(7\beta)\quad \left.\begin{aligned} F_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2u x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 \\ + \frac{2}{u} x_3x_4 + 2x_2x_4 + 2x_2x_3 \end{aligned}\right\} = 0$$

dargestellt wird.

Diese beiden Flächen zweiten Grades *berühren sich in zwei Punkten*, wie sofort aus:

$$(21\alpha)\quad \begin{cases} F_1 - F_2 \equiv \frac{u-1}{u}\,[u(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - x_4)^2] \\ \qquad\equiv \frac{u-1}{u}\,[\sqrt{u}(x_1 - x_2) + x_3 - x_4] \times \\ \qquad\qquad [\sqrt{u}(x_1 - x_2) - x_3 + x_4] = 0 \end{cases}$$

ersichtlich ist.

Die beiden Ebenen:

$$(21\beta)\quad \begin{cases} \pi_1 \cdots \sqrt{u} - \sqrt{u} \quad 1 \quad -1 \\ \pi_2 \cdots \sqrt{u} - \sqrt{u} \quad -1 \quad 1, \end{cases}$$

welche sich in der Geraden $|\beta_{12}\beta_{34}| = |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ schneiden und harmonisch zu dem Ebenenpaar $\beta_{12}\beta_{34}$ liegen, haben zu Polen in Beziehung auf beide Flächen F_1 und F_2 die Punkte:

$$(21\gamma)\quad \begin{aligned} \mathfrak{p}_1 \cdots \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}} \quad -1 \quad 1 \\ \mathfrak{p}_2 \cdots \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}} \quad 1 \quad -1, \end{aligned}$$

welche auf der reciproken Polaren von $|\beta_{12}\beta_{34}|$ in Bezug auf beide Flächen, d. h. der Geraden $|\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}| = |\gamma_1\gamma_2|$ harmonisch zu dem Punktpaar $\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}$ liegen, zu welchem auch die Punktpaare k_2k_3, $k_2^{(2)}k_3^{(2)}$ (Formel (18γ)) harmonisch sind.

Da diese Pole $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ bezüglich auf ihren Polarebenen π_1, π_2 und zugleich auf den beiden Flächen liegen, so folgt, dass diese Ebenen die beiden gemeinsamen Tangentenebenen sind, welche in den Punkten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ die beiden Flächen berühren, die Linie $|\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}|$ also die Berührungssehne ist.

Wir haben hier den besonderen Fall zweier sich doppelt berührenden Flächen zweiter Ordnung, in welchem die beiden ebenen Schnittcurven der beiden Flächen in zwei Linienpaare zerfallen, welche hier *imaginär* sind*). Das windschiefe Vierseit, in welches die gemeinsame Schnittcurve $C^{(4)}$ degenerirt, hat zwei reelle Ecken: die Berührungspunkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ auf der Berührungssehne $|\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}|$, während die beiden gegenüberliegenden der reellen Geraden $|\beta_{12}\beta_{34}|$ angehörigen Ecken $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$ imaginär sind. In diesen beiden imaginären Punkten $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$ haben die beiden Flächen ebenfalls eine doppelte Berührung, bei welcher die beiden gemeinsamen imaginären Berührungsebenen π_1', π_2' durch die Berührungssehne $|\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}|$ hindurchgehen. Man kann zufolge der dualen Betrachtung diese beiden Punkte $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$ als Scheitel der gemeinsamen Tangentenkegel, welche in die (reellen) Ebenen π_1, π_2 degenerirt sind, auffassen, ebenso auch die reellen Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ als Scheitel der gemeinsamen Tangentenkegel, welche in die imaginären Ebenen π_1', π_2' degenerirt sind, auffassen.

Die eben ausgesprochenen Beziehungen gelten für den Fall, dass *u positiv* ist, während umgekehrt für den Fall eines *negativen u* die Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und die Ebenen π_1, π_2 imaginär, dagegen die Punkte $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$ und die Ebenen π_1', π_2' *reell* werden. Man erkennt diess sofort aus den Formeln (21β) und (21γ) und den folgenden für die Coordinaten der Ebenen π_1', π_2' und der Punkte $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$:

$$(21\beta')\left\{\begin{array}{lcccc} \pi_1'\cdots & 2+(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} & 2+(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} & 1+\frac{1}{u} & 1+\frac{1}{u} \\ \pi_2'\cdots & 1+u & 1+u & 2+(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} & 2+(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} \end{array}\right.$$

$$(21\gamma')\left\{\begin{array}{lcccc} \mathfrak{p}_1'\cdots & 1+\frac{1}{u} & 1+\frac{1}{u} & -2-(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} & -2-(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} \\ \mathfrak{p}_2'\cdots & -2-(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} & -2-(1-u)\sqrt{-\frac{1}{u}} & 1+u & 1+u. \end{array}\right.$$

---

*) Vgl. über diesen besonderen Fall, welcher noch nicht genauer untersucht zu sein scheint, Schröter, Theorie der Oberflächen 2[ter] Ordnung, S. 699. Bei zwei geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, welche eine derartige doppelte Berührung haben und für die das windschiefe Vierseit reell ist, giebt es *zwei Paare* von reellen gemeinsamen Berührungspunkten (oder von Scheiteln gemeinsamer Tangentenkegel), wobei die Tangentenebenen des einen Paares durch die Berührungssehne des anderen Paares hindurchgehen. Hierdurch entsteht ein

Alle Punkte je einer der beiden reciproken Polaren $|\beta_{12}\beta_{34}|$ und $|\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34}|$ haben in Bezug auf beide Flächen F_1 und F_2 dieselbe durch die andere gehende Polarebene, und ebenso hat jede der durch die eine dieser Geraden gehende Ebene in Bezug auf beide Flächen denselben auf der anderen Geraden liegenden Pol. Da das Centrum $\mathfrak{c}_1$ als Pol zu γ_1 in γ_2 und das Centrum $\mathfrak{c}_2$ als Pol zu γ_2 in γ_1 liegt, so folgt, dass das Tetraeder

$$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{34} \text{ (oder } \gamma_1\gamma_2\beta_{12}\beta_{34})$$

ein für beide Flächen F_1 und F_2 gemeinsames Polartetraeder ist.

Die durch das zweifache Entsprechen der Punkte und Ebenen, sowie der Geraden der Figur in Beziehung auf beide Flächen F_1 und F_2 bedingten Eigenschaften derselben sollen hier im Einzelnen nicht weiter entwickelt und verfolgt werden. Ebenso begnügen wir uns darauf hinzuweisen, dass die in § 7 unter 5) und 6) hergeleiteten weiteren Lagenbeziehungen der Figur zweier einfach perspectiven Tetraeder sich auf die vorliegende Figur zweier zweifach perspectiven Tetraeder anwenden lassen und bei Berücksichtigung der erwähnten zweifach polaren Beziehungen besondere interessante Resultate ergeben.

5) Was die *Construction* zweier zweifach perspectiven Tetraeder anlangt, so sind die vier Ecken von T und eine Ecke $\mathfrak{a}_1'$ von T' willkürlich annehmbar. Zieht man dann in der Ebene $\beta_{34} = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1']$ eine beliebige Gerade b_{22} durch $\mathfrak{a}_2$, so erhält man $\mathfrak{c}_1 = (b_{11}, b_{22})$; die durch $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{c}_1$ bestimmte Ebene β_{12} schneidet die Ebene β_{34} in einer durch $\mathfrak{c}_1$ gehenden Geraden, welche $b_{21} = |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1'|$ in $\mathfrak{c}_2$ schneidet. Dann ergiebt sich $\mathfrak{a}_2' = (|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2|, |\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1|)$. Die beiden Eckpunkte $\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{a}_4'$ sind dann eindeutig in der Ebene β_{12} bestimmt, indem sich

$$\mathfrak{a}_3' = (|\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_1|, |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_2|) \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_4' = (|\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_1|, |\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_2|)$$

ergiebt. — Analog lässt sich die Construction der Seitenflächen α_2', α_3', α_4', wenn α_1' gegeben ist, leicht ausführen.

§ 10.

Vierfach perspective Tetraeder.

1) Sind zwei Tetraeder T und T' *vierfach* perspectiv, entsprechend den Anordnungen:

$$(22\alpha) \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline & \mathfrak{c}_1 - \gamma_1 & & \end{array} \right. \qquad (22\beta) \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2' & 1' & 4' & 3' \\ \hline & \mathfrak{c}_2 - \gamma_2 & & \end{array} \right.$$

Polartetraeder von besonderer Art (vgl. Schröter A. a. O. S. 100 und S. 143). Im obigen Falle ist nur je ein Paar dieser Berührungspunkte und gemeinsamen Tangentenebenen reell.

$$(22\gamma)\quad \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3' & 4' & 1' & 2' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{c}_3 - \gamma_3} \end{array}\right. \qquad (22\delta)\quad \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4' & 3' & 2' & 1' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{c}_4 - \gamma_4} \end{array}\right. ,$$

so haben den Werthen:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = -1$$

(vgl. § 8 unter 6)) gemäss die Seitenflächen und Ecken von T' folgende Coordinaten:

$$(22\varepsilon)\quad \left\{\begin{array}{lcccc} \alpha_1' \cdots & -1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_2' \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \alpha_3' \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \\ \alpha_4' \cdots & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$$(22\zeta)\quad \left\{\begin{array}{lcccc} \mathfrak{a}_1' \cdots & -1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{a}_2' \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{a}_3' \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathfrak{a}_4' \cdots & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right. ;$$

die Determinante U und die ersten Minoren derselben erhalten die Werthe:

$$(22\eta)\qquad U = -16, \quad U_{ii} = 4, \quad U_{ik} = -4.$$

2) In jeder der vier Collineationsebenen:

$$(23\alpha)\quad \left\{\begin{array}{lcccc} \gamma_1 \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_2 \cdots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_3 \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \gamma_4 \cdots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

liegen (vgl. § 7 (4α) und (4β) und § 9 unter 2)) je sechs Schnittpunkte $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ik}^{(2)}$, $\mathfrak{b}_{ik}^{(3)}$, $\mathfrak{b}_{ik}^{(4)}$ je zweier den Anordnungen $22(\alpha)$, (β), (γ), (δ) entsprechenden Kanten und zwar viermal zu dreien auf einer Geraden $b_{(ii)}$ und $b_{(ik)}$. Von den Schnittpunkten $\mathfrak{b}_{(ik)}^{(r)}$ fallen je zwei zusammen, so dass folgende 12 Punkte auftreten:

$$(23\beta)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcccc} \mathfrak{b}_{12} = \mathfrak{b}_{12}^{(2)} = (a_{12}a'_{12}) \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{b}_{13} = \mathfrak{b}_{13}^{(3)} = (a_{13}a'_{13}) \cdots & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \mathfrak{b}_{14} = \mathfrak{b}_{14}^{(4)} = (a_{14}a'_{14}) \cdots & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lcccc} \mathfrak{b}_{34} = \mathfrak{b}_{34}^{(2)} = (a_{34}a'_{34}) \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathfrak{b}_{24} = \mathfrak{b}_{24}^{(3)} = (a_{24}a'_{24}) \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \mathfrak{b}_{23} = \mathfrak{b}_{23}^{(4)} = (a_{23}a'_{23}) \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$(23\gamma)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lllll} \mathfrak{b}_{12}^{(3)} = \mathfrak{b}_{12}^{(4)} = (a_{12}\,a_{34}') \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{b}_{13}^{(2)} = \mathfrak{b}_{13}^{(4)} = (a_{13}\,a_{24}') \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{b}_{14}^{(2)} = \mathfrak{b}_{14}^{(3)} = (a_{14}\,a_{23}') \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lllll} \mathfrak{b}_{34}^{(3)} = \mathfrak{b}_{34}^{(4)} = (a_{34}\,a_{12}') \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \mathfrak{b}_{24}^{(2)} = \mathfrak{b}_{24}^{(4)} = (a_{24}\,a_{13}') \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathfrak{b}_{23}^{(2)} = \mathfrak{b}_{23}^{(3)} = (a_{23}\,a_{14}') \cdots & 0 & 1 & 1 & 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Von diesen 12 Punkten liegen die 6 der ersten Anordnung entsprechenden (23β) in der Ebene γ_1 viermal zu dreien auf einer Geraden $b_{(ii)}$ (siehe (4α) und (4β) in § 7), die 6 der zweiten Anordnung entsprechenden $\mathfrak{b}_{ik}^{(2)}$ in der Ebene γ_2 viermal zu dreien auf je einer Geraden $b_{(12)}, b_{(21)}, b_{(34)}, b_{(43)}$ (siehe § 9 — (16γ)); ferner von den 6 der dritten Anordnung entsprechenden $\mathfrak{b}_{ik}^{(3)}$ in der Ebene γ_3:

$$(23\delta)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{b}_{23}^{(3)}\mathfrak{b}_{34}^{(3)}\mathfrak{b}_{42} & \text{auf der Geraden} & b_{(13)} = | \alpha_1\,\alpha_3'\,\gamma_3 | \\ \mathfrak{b}_{34}^{(3)}\mathfrak{b}_{41}^{(3)}\mathfrak{b}_{13} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & b_{(24)} = | \alpha_2\,\alpha_4'\,\gamma_3 | \\ \mathfrak{b}_{41}^{(3)}\mathfrak{b}_{12}^{(3)}\mathfrak{b}_{24} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & b_{(31)} = | \alpha_3\,\alpha_1'\,\gamma_3 | \\ \mathfrak{b}_{12}^{(3)}\mathfrak{b}_{23}^{(3)}\mathfrak{b}_{31} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & b_{(42)} = | \alpha_4\,\alpha_2'\,\gamma_3 |; \end{array}\right.$$

und endlich von den 6 der vierten Anordnung entsprechenden $\mathfrak{b}_{ik}^{(4)}$ in der Ebene γ_4:

$$(23\varepsilon)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{b}_{34}^{(4)}\mathfrak{b}_{42}^{(4)} & \text{auf der Geraden} & b_{(14)} = | \alpha_1\,\alpha_4'\,\gamma_4 | \\ \mathfrak{b}_{34}^{(4)}\mathfrak{b}_{41}\,\mathfrak{b}_{13}^{(4)} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & b_{(23)} = | \alpha_2\,\alpha_3'\,\gamma_4 | \\ \mathfrak{b}_{41}\,\mathfrak{b}_{12}^{(4)}\mathfrak{b}_{24}^{(4)} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & b_{(32)} = | \alpha_3\,\alpha_2'\,\gamma_4 | \\ \mathfrak{b}_{12}^{(4)}\mathfrak{b}_{23}\,\mathfrak{b}_{31}^{(4)} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & b_{(41)} = | \alpha_4\,\alpha_1'\,\gamma_4 |. \end{array}\right.$$

Von den 12 Punkten (23β) und (23γ) liegen je zwei, nämlich ein der ersten Gruppe (23β) und ein der zweiten Gruppe (23γ) angehöriger auf je einer Kante der beiden Tetraeder T und T' und werden durch die Eckpunkte dieser Kante harmonisch getrennt. Bezeichnen wir die 6 Punkte der zweiten Gruppe kurz durch $\mathfrak{b}_{ik}'$, so liegen auf jeder Kante

$$(23\zeta)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{ik} \text{ des Tetraeders } T \text{ die Punkte } \mathfrak{b}_{ik}\,\mathfrak{b}_{ik}' \text{ harmonisch getrennt} \\ \qquad \text{durch } \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k, \\ a_{ik}' \text{ des Tetraeders } T' \text{ die Punkte } \mathfrak{b}_{ik}\,\mathfrak{b}_{rs}' \text{ harmonisch getrennt} \\ \qquad \text{durch } \mathfrak{a}_i'\,\mathfrak{a}_k'. \end{array}\right.$$

Analog gehen durch jedes der vier Centren:

$$(24\alpha)\quad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 \cdots 1 & 1 \quad\; 1 \quad\; 1 \\ \mathfrak{c}_2 \cdots 1 & 1 \quad -1 \quad -1 \\ \mathfrak{c}_3 \cdots 1 & -1 \quad\; 1 \quad -1 \\ \mathfrak{c}_4 \cdots 1 & -1 \quad -1 \quad\; 1 \end{cases}$$

je sechs durch zwei den vier Anordnungen (22α) bis (22δ) entsprechende Kanten gelegte Ebenen β_{ik}, $\beta_{ik}^{(2)}$, $\beta_{ik}^{(3)}$, $\beta_{ik}^{(4)}$ hindurch, indem sie sich je viermal zu dreien in einer Kante b_{ii} und b_{ik} schneiden. Solcher Ebenen sind, da je zwei zusammenfallen, zwölf vorhanden, nämlich:

$$(24\beta)\quad \begin{cases} \beta_{12} = \beta_{12}^{(2)} = [a_{(12)}\,a'_{(12)}] \cdots & 1 \quad -1 \quad\; 0 \quad\; 0 \\ \beta_{13} = \beta_{13}^{(3)} = [a_{(13)}\,a'_{(13)}] \cdots & 1 \quad\; 0 \quad -1 \quad\; 0 \\ \beta_{14} = \beta_{14}^{(4)} = [a_{(14)}\,a_{(14)}] \cdots & 1 \quad\; 0 \quad\; 0 \quad -1 \\ \beta_{34} = \beta_{34}^{(2)} = [a_{(34)}\,a'_{(34)}] \cdots & 0 \quad\; 0 \quad\; 1 \quad -1 \\ \beta_{24} = \beta_{24}^{(3)} = [a_{(24)}\,a'_{(24)}] \cdots & 0 \quad\; 1 \quad\; 0 \quad -1 \\ \beta_{23} = \beta_{23}^{(4)} = [a_{(23)}\,a'_{(23)}] \cdots & 0 \quad\; 1 \quad -1 \quad\; 0 \end{cases}$$

$$(24\gamma)\quad \begin{cases} \beta_{12}^{(3)} = \beta_{12}^{(4)} = [a_{(12)}\,a'_{(34)}] \cdots & 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \beta_{13}^{(2)} = \beta_{13}^{(4)} = [a_{(13)}\,a'_{(24)}] \cdots & 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \beta_{14}^{(2)} = \beta_{14}^{(3)} = [a_{(14)}\,a'_{(23)}] \cdots & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \beta_{34}^{(3)} = \beta_{34}^{(4)} = [a_{(34)}\,a'_{(12)}] \cdots & 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \beta_{24}^{(2)} = \beta_{24}^{(4)} = [a_{(24)}\,a'_{(13)}] \cdots & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \beta_{23}^{(2)} = \beta_{23}^{(3)} = [a_{(23)}\,a'_{(14)}] \cdots & 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0. \end{cases}$$

Die 6 der ersten Anordnung entsprechenden Ebenen (24β) schneiden sich viermal zu dreien in den durch das Centrum $\mathfrak{c}_1$ gehenden Geraden b_{ii} (siehe (4δ) in § 7), die 6 der zweiten Anordnung entsprechenden Ebenen $\beta_{ik}^{(2)}$ in den durch das Centrum $\mathfrak{c}_2$ gehenden Geraden b_{12}, b_{21}, b_{34}, b_{43} (siehe (17γ) in § 9); ferner schneiden sich von den sechs der dritten Anordnung entsprechenden Ebenen $\beta_{ik}^{(3)}$, deren Schnittpunkt $\mathfrak{c}_3$ ist,

$$(24\delta)\quad \begin{cases} \beta_{23}^{(3)}\beta_{34}^{(3)}\beta_{42} & \text{in der Geraden } b_{13} = |\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_3'\,\mathfrak{c}_3\,| \\ \beta_{34}^{(3)}\beta_{41}^{(3)}\beta_{13} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} \quad b_{24} = |\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_4'\,\mathfrak{c}_3\,| \\ \beta_{41}^{(3)}\beta_{12}^{(3)}\beta_{24} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} \quad b_{31} = |\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1'\,\mathfrak{c}_3\,| \\ \beta_{12}^{(3)}\beta_{23}^{(3)}\beta_{31} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} \quad b_{42} = |\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_2'\,\mathfrak{c}_3\,|; \end{cases}$$

und endlich von den 6 der vierten Anordnung entsprechenden Ebenen $\beta_{ik}^{(4)}$, deren Schnittpunkt $\mathfrak{c}_4$ ist,

$$(24\varepsilon)\quad \begin{cases} \beta_{23}\beta_{34}^{(4)}\beta_{42}^{(4)} \text{ in der Geraden } b_{14} = |\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4'\mathfrak{c}_4\,| \\ \beta_{34}^{(4)}\beta_{41}\beta_{13}^{(4)} \quad " \quad " \quad " \quad b_{23} = |\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3'\mathfrak{c}_4\,| \\ \beta_{41}\beta_{12}^{(4)}\beta_{24}^{(4)} \quad " \quad " \quad " \quad b_{32} = |\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2'\mathfrak{c}_4\,| \\ \beta_{12}^{(4)}\beta_{23}\beta_{31}^{(4)} \quad " \quad " \quad " \quad b_{41} = |\,\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1'\mathfrak{c}_4\,|. \end{cases}$$

Je zwei von den 12 Ebenen (24β) und (24γ), nämlich eine der Gruppe (24β) und eine der Gruppe (24γ) angehörige gehen durch je eine Kante der beiden Tetraeder hindurch und werden durch die beiden Seitenflächen des Tetraeders harmonisch getrennt. Werden die Ebenen der zweiten Gruppe (24γ) kurz durch β_{ik}' bezeichnet, so gehen durch jede Kante

$$(24\zeta)\quad \begin{cases} a_{(ik)} \text{ des Tetraeders } T \text{ die Ebenen } \beta_{ik}\,\beta_{ik}' \text{ harmonisch getrennt} \\ \qquad \text{durch } \alpha_i,\ \alpha_k, \\ a_{(ik)}' \text{ des Tetraeders } T' \text{ die Ebenen } \beta_{ik}\beta_{rs}' \text{ harmonisch getrennt} \\ \qquad \text{durch } \alpha_i',\ \alpha_k' \end{cases}$$

hindurch.

Jede Ebene $\beta_{ik}^{(r)}$ enthält drei der 12 Punkte $\mathfrak{b}_{rs}^{(i)}$ und durch jeden Punkt $\mathfrak{b}_{ik}^{(r)}$ gehen drei der 12 Ebenen $\beta_{rs}^{(i)}$ hindurch. Es entstehen so drei Tetraeder:

$$(25)\quad \begin{cases} \mathfrak{T} \ldots \begin{cases} \mathfrak{b}_{23}\ \mathfrak{b}_{14}\ \mathfrak{b}_{23}'\ \mathfrak{b}_{14}' \\ \beta_{23}\ \beta_{14}\ \beta_{23}'\ \beta_{14}' \end{cases} \\ \mathfrak{T}' \ldots \begin{cases} \mathfrak{b}_{13}'\ \mathfrak{b}_{24}'\ \mathfrak{b}_{13}\ \mathfrak{b}_{24} \\ \beta_{13}'\ \beta_{24}'\ \beta_{13}\ \beta_{24} \end{cases} \\ \mathfrak{T}'' \ldots \begin{cases} \mathfrak{b}_{12}'\ \mathfrak{b}_{34}'\ \mathfrak{b}_{12}\ \mathfrak{b}_{34} \\ \beta_{12}'\ \beta_{34}'\ \beta_{12}\ \beta_{34}, \end{cases} \end{cases}$$

deren Lagenbeziehung unter 3) noch genauer betrachtet werden wird.

Jede Ebene β_{ik} und β_{ik}' entspricht bez. dem Punkte $\mathfrak{b}_{ik}$ und $\mathfrak{b}_{ik}'$ als *harmonische Polarebene* in Beziehung auf das Tetraeder T, ebenso wie die Seitenflächen α_r' den gegenüberliegenden Ecken $\mathfrak{a}_r'$ des Tetraeders T' und die Collineationsebenen γ_r den Centren $\mathfrak{c}_r$ als harmonische Polarebenen in Beziehung auf T entsprechen.

Die Centren $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_4$ sind die Ecken, die Collineationsebenen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ die Seitenflächen eines Tetraeders, welches wir durch T'' bezeichnen wollen, so dass seine Elemente (Ecken oder Seiten) durch das gemeinsame Symbol:

$$(26\alpha)\qquad 1''\quad 2''\quad 3''\quad 4''$$

dargestellt werden. Auf jeder Kante dieses Tetraeders T'' liegen zwei der 12 Punkte $\mathfrak{b}_{ik}$ und $\mathfrak{b}_{ik}'$ harmonisch durch die Endpunkte dieser Kante getrennt, und durch jede Kante gehen zwei der 12 Ebenen

β_{ik} und β_{ik}' hindurch und werden durch die beiden Seitenflächen, deren Schnitt diese Kante ist, harmonisch getrennt. Man hat nämlich:

$$(26\beta)\quad \begin{cases} c_{12} = c_{(34)} = |\, \mathfrak{b}_{12}' \mathfrak{b}_{34}',\ \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \,| = |\, \beta_{12} \beta_{34},\ \gamma_3 \gamma_4 \,| \\ c_{13} = c_{(24)} = |\, \mathfrak{b}_{13}' \mathfrak{b}_{24}',\ \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_3 \,| = |\, \beta_{13} \beta_{24},\ \gamma_2 \gamma_4 \,| \\ c_{14} = c_{(23)} = |\, \mathfrak{b}_{14}' \mathfrak{b}_{23}',\ \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_4 \,| = |\, \beta_{14} \beta_{23},\ \gamma_2 \gamma_3 \,| \\ c_{34} = c_{(12)} = |\, \mathfrak{b}_{12} \mathfrak{b}_{34},\ \mathfrak{c}_3 \mathfrak{c}_4 \,| = |\, \beta_{12}' \beta_{34}',\ \gamma_1 \gamma_2 \,| \\ c_{24} = c_{(13)} = |\, \mathfrak{b}_{13} \mathfrak{b}_{24},\ \mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_4 \,| = |\, \beta_{13}' \beta_{24}',\ \gamma_1 \gamma_3 \,| \\ c_{23} = c_{(14)} = |\, \mathfrak{b}_{14} \mathfrak{b}_{23},\ \mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_3 \,| = |\, \beta_{14}' \beta_{23}',\ \gamma_1 \gamma_4 \,|. \end{cases}$$

3) Mit Hilfe der unter 1) und 2) aufgestellten Beziehungen können wir nun sofort die wichtigsten und charakteristischen Eigenschaften der Figur zweier vierfach perspectiven Tetraeder herleiten.

Aus den vier Zusammenstellungen (22α) bis (22δ) geht unmittelbar hervor, dass das Tetraeder T'', dessen Eckpunkte die 4 Centren $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_4$ und dessen Seiten die 4 Collineationsebenen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sind, zu jedem der beiden Tetraeder T und T' vierfach perspectiv liegt, so dass immer die Ecken des dritten Tetraeders die Centren, die Seitenflächen desselben die Ebenen der Perspectivität bilden.

Die nachfolgende Zusammenstellung lässt diese gegenseitige Beziehung übersichtlich erkennen:

$$(27\alpha)\quad \begin{array}{c|c|c|c} 1\ 2\ 3\ 4 & 1\ 2\ 3\ 4 & 1\ 2\ 3\ 4 & 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1'\ 2'\ 3'\ 4' & 2'\ 1'\ 4'\ 3' & 3'\ 4'\ 1'\ 2' & 4'\ 3'\ 2'\ 1' \\ \hline \mathfrak{c}_1 - \gamma_1 & \mathfrak{c}_2 - \gamma_2 & \mathfrak{c}_3 - \gamma_3 & \mathfrak{c}_4 - \gamma_4 \end{array}$$

$$(27\beta)\quad \begin{array}{c|c|c|c} 1\ 2\ 3\ 4 & 1\ 2\ 3\ 4 & 1\ 2\ 3\ 4 & 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1''\ 2''\ 3''\ 4'' & 2''\ 1''\ 4''\ 3'' & 3''\ 4''\ 1''\ 2'' & 4''\ 3''\ 2''\ 1'' \\ \hline \mathfrak{a}_1' - \alpha_1' & \mathfrak{a}_2' - \alpha_2' & \mathfrak{a}_3' - \alpha_3' & \mathfrak{a}_4' - \alpha_4' \end{array}$$

$$(27\gamma)\quad \begin{array}{c|c|c|c} 1'\ 2'\ 3'\ 4' & 1'\ 2'\ 3'\ 4' & 1'\ 2'\ 3'\ 4' & 1'\ 2'\ 3'\ 4' \\ 1''\ 2''\ 3''\ 4'' & 2''\ 1''\ 4''\ 3'' & 3''\ 4''\ 1''\ 2'' & 4''\ 3''\ 2''\ 1'' \\ \hline \mathfrak{a}_1 - \alpha_1 & \mathfrak{a}_2 - \alpha_2 & \mathfrak{a}_3 - \alpha_3 & \mathfrak{a}_4 - \alpha_4 \end{array}.$$

Die drei Tetraeder T, T', T'' bilden hiernach ein s. g. *desmisches* System, welches zuerst von Stephanos*), weiterhin von Veronese**),

---

*) Cyparissos Stephanos. Sur les systèmes desmiques de trois tetraèdres. Bulletin de sciences math. et astr. Sér. II. t. III, p. 424—456.

Stephanos erhält bei seinen Betrachtungen ein solches System als drei einem Flächenbüschel der vierten Ordnung angehörige Tetraeder.

**) Veronese. Atti d. r. Acc. dei Lincei 1880 vol. IV, S. 3ª. — Vgl. auch Cremona. Teoremi stereometrici etc. R. Acc. dei Lincei. Mem. della classe di scienze fis., math. e natur. 1877.

Schröter*), Reye**), Vietor***) u. A. betrachtet und mit Rücksicht auf besondere Probleme der Raumgeometrie genauer untersucht worden ist.

Durch jede der 12 Ecken dieser drei Tetraeder gehen ausser den drei Kanten vier der 16 Verbindungslinien b_{ii}, b_{ik} entsprechender Ecken je zweier Tetraeder hindurch, und in jeder der 12 Ebenen dieser drei Tetraeder liegen ausser den drei Kanten vier der 16 Schnittlinien $b_{(ii)}$, $b_{(ik)}$ entsprechender Seitenflächen je zweier Tetraeder.

Die drei Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ (Formel 25), deren Ecken auf den 18 Kanten der drei Tetraeder T, T', T'' harmonisch zu den Eckpunkten jeder Kante liegen und deren Seitenflächen durch die 18 Kanten dieser Tetraeder harmonisch zu den beiden in jeder Kante sich schneidenden Seitenflächen hindurchgehen, bilden ebenfalls ein *desmisches System.* †) Denn durch jeden der 12 Eckpunkte $\mathfrak{b}_{ik}$ gehen ausser den drei Kanten vier der 16 Geraden $b_{(ii)}$, $b_{(ik)}$, welche entsprechende Ecken verbinden, hindurch, und auf jeder der 12 Seitenflächen β_{ik} liegen ausser den drei Kanten vier der 16 Geraden b_{ii}, b_{ik}, welche Schnittlinien entsprechender Seitenflächen sind. Man entnimmt diese Beziehungen ohne Weiteres den oben aufgestellten Relationen; aus den Zusammenstellungen (4β) in § 7, (16γ) in § 9 und (23δ), (23ε) dieses Paragraphen folgt sofort, dass:

$$(28\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \mathfrak{b}_{12} = (b_{(33)}\ b_{(44)}\ b_{(34)}\ b_{(43)}) & \mathfrak{b}_{34} = (b_{(11)}\ b_{(22)}\ b_{(12)}\ b_{(21)}) \\ \mathfrak{b}_{13} = (b_{(44)}\ b_{(22)}\ b_{(42)}\ b_{(24)}) & \mathfrak{b}_{24} = (b_{(11)}\ b_{(33)}\ b_{(13)}\ b_{(31)}) \\ \mathfrak{b}_{14} = (b_{(22)}\ b_{(33)}\ b_{(23)}\ b_{(32)}) & \mathfrak{b}_{23} = (b_{(11)}\ b_{(44)}\ b_{(14)}\ b_{(41)}) \end{array}\right.$$

$$(28\beta)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \mathfrak{b}'_{12} = (b_{(31)}\ b_{(32)}\ b_{(41)}\ b_{(42)}) & \mathfrak{b}'_{34} = (b_{(13)}\ b_{(23)}\ b_{(14)}\ b_{(24)}) \\ \mathfrak{b}'_{13} = (b_{(21)}\ b_{(23)}\ b_{(41)}\ b_{(43)}) & \mathfrak{b}'_{24} = (b_{(12)}\ b_{(32)}\ b_{(14)}\ b_{(34)}) \\ \mathfrak{b}'_{14} = (b_{(21)}\ b_{(24)}\ b_{(31)}\ b_{(34)}) & \mathfrak{b}'_{23} = (b_{(12)}\ b_{(42)}\ b_{(13)}\ b_{(43)}) \end{array}\right. \text{ ist,}$$

und analog folgen die Beziehungen für die Ebenen β_{ik} und β'_{ik} und die in ihnen zu vier liegenden Geraden b_{ii} und b_{ik}, wenn man in (28α) und (28β) $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{b}'_{ik}$, $b_{(ii)}$, $b_{(ik)}$ bez. durch β_{ik}, β'_{ik}, b_{ii}, b_{ik} ersetzt.

Die nachfolgende Zusammenstellung lässt die desmische Lage der drei Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ deutlich erkennen; in ihr bedeutet das Symbol $i\,k$ oder $i'\,k'$ sowohl eine Ecke $\mathfrak{b}_{ik}$ oder $\mathfrak{b}'_{ik}$, als eine Seitenfläche β_{ik} oder β'_{ik}.

---

*) H. Schröter. Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., Jahrg. 28, S. 178 fg. und Journal f. r. u. a. Math. Bd. 93, S. 169.

**) Th. Reye. Die Hexaeder- und die Oktaeder-Configuration (12_6, 16_3). Acta math. I, p. 97—108.

***) A. Vietor. Die harmonische Configuration (24_4). Berichte über die Verhandlungen der naturf. Ges. zu Freiburg i/Br. VIII, 2. 1884.

†) Vgl. Stephanos l. c. S. 439 ff. Stephanos nennt die beiden Systeme T, T', T'' und $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ *conjugirte desmische Systeme.*

$$(29\alpha)\quad\left\{\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 1'3' & 2'4' & 13 & 24 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}'_{12} - \beta'_{12}} \end{array} &
\begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 2'4' & 1'3' & 24 & 13 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}'_{34} - \beta'_{34}} \end{array} &
\begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 13 & 24 & 1'3' & 2'4' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}_{12} - \beta_{12}} \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 24 & 13 & 2'4' & 1'3' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}_{34} - \beta_{34}} \end{array} &
\end{array}\right.$$

$$(29\beta)\quad\left\{\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 1'2' & 3'4' & 12 & 34 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}'_{13} - \beta'_{13}} \end{array} &
\begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 3'4' & 1'2' & 34 & 12 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}'_{24} - \beta'_{24}} \end{array} &
\begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 12 & 34 & 1'2' & 3'4' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}_{13} - \beta_{13}} \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} 23 & 14 & 2'3' & 1'4' \\ 34 & 12 & 3'4' & 1'2' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}_{24} - \beta_{24}} \end{array} &
\end{array}\right.$$

$$(29\gamma)\quad\left\{\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{cccc} 1'3' & 2'4' & 13 & 24 \\ 34 & 12 & 3'4' & 1'2' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}'_{14} - \beta'_{14}} \end{array} &
\begin{array}{cccc} 1'3' & 2'4' & 13 & 24 \\ 12 & 34 & 1'2' & 3'4' \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}'_{23} - \beta'_{23}} \end{array} &
\begin{array}{cccc} 1'3' & 2'4' & 13 & 24 \\ 3'4' & 1'2' & 34 & 12 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}_{14} - \beta_{14}} \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} 1'3' & 2'4' & 13 & 24 \\ 1'2' & 3'4' & 12 & 34 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\mathfrak{b}_{23} - \beta_{23}.} \end{array} &
\end{array}\right.$$

Analytisch kann man diese Beziehungen auch einfach bestätigen, wenn man das Tetraeder $\mathfrak{T}$ zum Coordinatentetraeder wählt, d. h. die Transformationsformeln:

$$(30)\qquad\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 - x_4 \\ y_3 = x_2 + x_3 \\ y_4 = x_1 + x_4 \end{array}\right.$$

anwendet; alsdann ergeben sich für die Coordinaten der Ecken und Seiten der Tetraeder $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ genau dieselben Werthe, wie beim früheren Coordinatensystem für diejenigen der Ecken und Seiten der Tetraeder T' und T''.

4) Die 24 Ebenen der vorliegenden Raumfigur, nämlich die 12 Ebenen α_r, α_r', γ_r' und die 12 Ebenen β_{ik} und β'_{ik} schneiden sich

α) in 24 Punkten zu je *neun*,

β) in 96 Punkten zu je *vier*.

Die nachfolgende Zusammenstellung giebt die Anordnung dieser Schnittpunkte in Gruppen, wobei meistens nur der erste Punkt einer Gruppe aufgeführt ist nebst den zugehörigen Coordinatenwerthen. [Vgl. hierzu § 7, (5α) — (5γ) und § 9 (18α) — (18γ)]:

$$
(31\alpha)\left\{\begin{array}{llll}
4\ \text{Punkte}: & \mathfrak{a}_1 & =(\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4,\ \beta_{23}\,\beta_{34}\,\beta_{42},\ \beta'_{23}\,\beta'_{34}\,\beta'_{42})\ldots & 1\quad 0\quad 0\quad 0\\
4\quad ,, : & \mathfrak{a}_1' & =(\alpha_2'\,\alpha_3'\,\alpha_4',\ \beta'_{12}\,\beta'_{13}\,\beta'_{14},\ \beta_{23}\,\beta_{34}\,\beta_{42})\cdots & -1\quad 1\quad 1\quad 1\\
4\quad ,, : & \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{c}_1\\ \mathfrak{c}_2\end{array}\right. & \begin{array}{l}=(\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4,\ \beta_{12}\beta_{34},\beta_{13}\beta_{24},\ \beta_{14}\beta_{23})\ldots\\ =(\gamma_3\,\gamma_4\,\gamma_1,\ \beta_{12}\beta_{34},\beta'_{13}\beta'_{24},\ \beta'_{14}\,\beta'_{23})\ldots\end{array} & \begin{array}{l}1\quad 1\quad 1\quad 1\\ 1\quad 1\ -1\ -1\end{array}\\
6\quad ,, : & \mathfrak{b}_{12} & =(\alpha_3\,\alpha_4,\ \alpha_3'\,\alpha_4',\ \gamma_1\,\gamma_2,\ \beta_{34}\,\beta'_{12}\,\beta'_{34})\ldots & 1\ -1\quad 0\quad 0\\
6\quad ,, : & \mathfrak{b}'_{12} & =(\alpha_3\,\alpha_4,\ \alpha_1'\,\alpha_2',\ \gamma_3\,\gamma_4,\ \beta'_{34}\,\beta_{12}\,\beta_{34})\ldots & 1\quad 1\quad 0\quad 0
\end{array}\right.
$$

$$
(31\beta')\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{lll}
4\ \text{Punkte}: \mathfrak{c}_1^{[1]} & =(\alpha_1\,\beta_{34}\,\beta_{42}\,\beta_{23})\ldots & 0\quad 1\quad 1\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{c}_2^{[1]} & =(\alpha_1\,\beta_{34}\,\beta'_{42}\,\beta'_{23})\ldots & 0\ -1\quad 1\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{c}_3^{[1]} & =(\alpha_1\,\beta'_{34}\,\beta_{42}\,\beta'_{23})\ldots & 0\quad 1\ -1\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{c}_4^{[1]} & =(\alpha_1\,\beta'_{34}\,\beta'_{42}\,\beta_{23})\ldots & 0\quad 1\quad 1\ -1
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{lll}
4\quad ,, : \mathfrak{c}_1^{[1']} & =(\alpha_1'\,\beta_{34}\,\beta_{42}\,\beta_{23})\ldots & 3\quad 1\quad 1\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{c}_2^{[1']} & =(\alpha_1'\,\beta_{34}\,\beta'_{41}\,\beta'_{13})\ldots & 1\quad 3\ -1\ -1\\
4\quad ,, : \mathfrak{c}_3^{[1']} & =(\alpha_1'\,\beta'_{14}\,\beta_{42}\,\beta'_{21})\ldots & 1\ -1\quad 3\ -1\\
4\quad ,, : \mathfrak{c}_4^{[1']} & =(\alpha_1'\,\beta'_{31}\,\beta'_{12}\,\beta_{23})\ldots & 1\ -1\ -1\quad 3
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{lll}
4\ \text{Punkte}: \mathfrak{g}_1 & =(\beta_{34}\,\beta_{42}\,\beta_{23}\,\gamma_1)\cdots & -3\quad 1\quad 1\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{g}_1^{(2)} & =(\beta_{34}\,\beta'_{41}\,\beta'_{13}\,\gamma_2)\cdots & -1\quad 3\quad 1\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{g}_1^{(3)} & =(\beta'_{14}\,\beta_{42}\,\beta'_{21}\,\gamma_3)\cdots & -1\quad 1\quad 3\quad 1\\
4\quad ,, : \mathfrak{g}_1^{(4)} & =(\beta'_{31}\,\beta'_{12}\,\beta_{23}\,\gamma_4)\cdots & -1\quad 1\quad 1\quad 3
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
(31\beta'')\left\{\begin{array}{l}
\begin{array}{lll}
12\quad ,, : \mathfrak{f}_{11,34} & =(\alpha_1\,\alpha_1'\,\beta_{34}\,\gamma_1)\ldots & 0\ -2\quad 1\quad 1
\end{array}\\
\left\{\begin{array}{lll}
4\quad ,, : \mathfrak{f}_{12,34}^{(2)} & =(\alpha_1\,\alpha_2'\,\beta_{34}\,\gamma_2)\ldots & 0\quad 2\quad 1\quad 1\\
8\quad ,, : \mathfrak{f}_{12,42}^{(2)} & =(\alpha_1\,\alpha_2'\,\beta'_{42}\,\gamma_2)\ldots & 0\quad 1\quad 2\ -1
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{lll}
4\quad ,, : \mathfrak{f}_{13,42}^{(3)} & =(\alpha_1\,\alpha_3'\,\beta_{42}\,\gamma_3)\ldots & 0\quad 1\quad 2\quad 1\\
8\quad ,, : \mathfrak{f}_{13,23}^{(3)} & =(\alpha_1\,\alpha_3'\,\beta'_{23}\,\gamma_3)\ldots & 0\ -1\quad 1\quad 2
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{lll}
4\quad ,, : \mathfrak{f}_{14,23}^{(4)} & =(\alpha_1\,\alpha_4'\,\beta_{23}\,\gamma_4)\ldots & 0\quad 1\quad 1\quad 2\\
8\quad ,, : \mathfrak{f}_{14,34}^{(4)} & =(\alpha_1\,\alpha_4'\,\beta'_{34}\,\gamma_4)\ldots & 0\quad 2\ -1\quad 1\,.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Die *Schnittlinien* der 24 Ebenen sind einmal 18 Gerade, in denen sich je *vier* Ebenen schneiden, nämlich:

$$
(32\alpha)\left\{\begin{array}{ll}
6\ \text{Gerade}: & a_{(12)}=|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_{12}\ \beta'_{12}|=|\mathfrak{a}_3\ \mathfrak{a}_4\ \mathfrak{b}_{34}\ \mathfrak{b}'_{34}|=a_{34}\\
6\quad ,, : & a'_{(12)}=|\alpha_1'\ \alpha_2'\ \beta'_{34}\ \beta_{12}|=|\mathfrak{a}_3'\ \mathfrak{a}_4'\ \mathfrak{b}'_{12}\ \mathfrak{b}_{34}|=a'_{34}\\
6\quad ,, : & \left\{\begin{array}{l}c_{(12)}=|\gamma_1\ \gamma_2\ \beta'_{12}\ \beta'_{34}|=|\mathfrak{c}_3\ \mathfrak{c}_4\ \mathfrak{b}_{12}\ \mathfrak{b}_{34}|=c_{34}\\ c_{(34)}=|\gamma_3\ \gamma_4\ \beta_{12}\ \beta_{34}|=|\mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_2\ \mathfrak{b}'_{12}\ \mathfrak{b}'_{34}|=c_{12}\,;\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

ferner 2 . 16 Gerade, in denen sich je *drei* Ebenen schneiden; nämlich:

$$(32\beta)\begin{cases}(32\beta')\begin{cases}4\ \text{Gerade}\ b_{(11)} = |\alpha_1\,\alpha_1'\,\gamma_1| = |\mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{b}_{42}\,\mathfrak{b}_{23},\ \mathfrak{f}_{11,34}\,\mathfrak{f}_{11,42}\,\mathfrak{f}_{11,23}| \\ 4\quad ,,\quad b_{(12)} = |\alpha_1\,\alpha_2'\,\gamma_2| = |\mathfrak{b}_{34}\,\mathfrak{b}_{42}'\,\mathfrak{b}_{23}',\ \mathfrak{f}^{(2)}_{12,34}\,\mathfrak{f}^{(2)}_{12,42}\,\mathfrak{f}^{(2)}_{12,23}| \\ 4\quad ,,\quad b_{(13)} = |\alpha_1\,\alpha_3'\,\gamma_3| = |\mathfrak{b}_{34}'\,\mathfrak{b}_{42}\,\mathfrak{b}_{23}',\ \mathfrak{f}^{(3)}_{13,34}\,\mathfrak{f}^{(3)}_{13,42}\,\mathfrak{f}^{(3)}_{13,23}| \\ 4\quad ,,\quad b_{(14)} = |\alpha_1\,\alpha_4'\,\gamma_4| = |\mathfrak{b}_{34}'\,\mathfrak{b}_{42}'\,\mathfrak{b}_{23},\ \mathfrak{f}^{(4)}_{14,34}\,\mathfrak{f}^{(4)}_{14,42}\,\mathfrak{f}^{(4)}_{14,23}|\end{cases} \\ (32\beta'')\begin{cases}4\ \text{Gerade}\ b_{11} = |\beta_{34}\,\beta_{42}\,\beta_{23}| = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1',\ \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{c}_1^{[1]}\,\mathfrak{c}_1^{[1']}| \\ 4\quad ,,\quad b_{12} = |\beta_{34}\,\beta_{42}'\,\beta_{23}'| = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2',\ \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{c}_2^{[1]}\,\mathfrak{c}_2^{[1]'}| \\ 4\quad ,,\quad b_{13} = |\beta_{34}'\,\beta_{42}\,\beta_{23}'| = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_3',\ \mathfrak{c}_3\,\mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{c}_3^{[1]}\,\mathfrak{c}_3^{[1']}| \\ 4\quad ,,\quad b_{14} = |\beta_{34}'\,\beta_{42}'\,\beta_{23}| = |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_4',\ \mathfrak{c}_4\,\mathfrak{g}_4,\ \mathfrak{c}_4^{[1]}\,\mathfrak{c}_4^{[1']}|;\end{cases}\end{cases}$$

endlich 72 Gerade, in welchen sich je zwei Ebenen schneiden.

Da auf jeder der 18 Geraden (32α) vier, auf jeder der 32 Geraden (32β) sechs Schnittpunkte liegen, so muss die Summe der in (31α) und $(31\beta'$ und $\beta'')$ aufgeführten Schnittpunkte:

$$24\cdot\binom{9}{3} + 96\cdot\binom{4}{3} = 2400$$

um

$$18\cdot(4-1)\binom{4}{3} + 16\cdot(6-1)\cdot\binom{3}{3} = 376$$

vermindert werden, wodurch sich die richtige Zahl

$$2024 = \binom{24}{3}$$

ergiebt.

Von den 18 Geraden (32α) bilden je sechs die Kanten der sechs Tetraeder; und zwar werden die Kanten der Tetraeder T, T', T'' bez. durch je 6 Gerade $a_{(ik)}$, $a'_{(ik)}$, $c_{(ik)}$ gebildet, während die Kanten

des Tetraeders $\mathfrak{T}$ durch $c_{(14)}\,c_{(23)}$; $a_{(14)}\,a_{(23)}$; $a'_{(14)}\,a'_{(23)}$,

,, ,, $\mathfrak{T}'$,, $c_{(24)}\,c_{(31)}$; $a_{(24)}\,a_{(31)}$; $a'_{(24)}\,a'_{(31)}$,

,, ,, $\mathfrak{T}''$,, $c_{(34)}\,c_{(12)}$; $a_{(34)}\,a_{(12)}$; $a'_{(34)}\,a'_{(12)}$

repräsentirt sind.

Die in einer der 24 Ebenen durch die Spuren der übrigen 23 Ebenen erzeugte Figur enthält 13 Gerade, welche sich

9 mal zu vieren
4 mal zu dreien
12 mal zu zweien

schneiden: diese wohlbekannte Figur entsteht, wenn man zu einem Punkt in der Ebene eines Dreiecks die harmonische Polare in Bezug auf dieses Dreieck construirt. Auf diese Figur sind wir auch im ersten Theil bei der Betrachtung von Specialfällen der *vierfach* perspectiven Dreiecke geführt worden (vgl. § 4 unter II)).

5) Aus den obigen Zusammenstellungen und Beziehungen ist

ebenso zu entnehmen, dass die 12 Punkte $\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_r', \mathfrak{c}_r$ und die 12 Punkte $\mathfrak{b}_{ik}$ und $\mathfrak{b}_{ik}'$

α) zu je *neun* in 24 Ebenen ($\alpha_r, \alpha_r', \gamma_r$; β_{ik}, β_{ik}'),

β) zu je *vier* in 96 Ebenen ($\gamma_1^{[1]}$, u. s. f.)

und ferner zu je *vier* auf den 18 Geraden (32α), zu je *drei* auf den 16 Geraden (32β), ausserdem zu je zwei auf 72 Geraden liegen. Die Ebenen $\gamma_1^{[1]}\ldots$ sind Polarebenen zu den Punkten $\mathfrak{c}_1^{[1]}\ldots$ in Beziehung auf die Fläche 2[ter] Ordnung:

$$(32\gamma) \qquad F \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

in Bezug auf welche die 6 Tetraeder sich selbst conjugirt sind.

Die 12 Ebenen $\alpha_r, \alpha_r', \gamma_r$ und die 12 Punkte $\mathfrak{b}_{ik}, \mathfrak{b}_{ik}'$ nebst den 16 Geraden (32β') einerseits und die 12 Ebenen β_{ik}, β_{ik}' und die 12 Punkte $\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_r', \mathfrak{c}_r$ nebst den 16 Geraden (32β'') andererseits bilden jede für sich eine

$$\text{Cf. } (12_6,\ 16_3),$$

wie sie von Th. Reye*) genauer untersucht worden ist, während der Verein der 24 Ebenen und der 24 Punkte nebst den 18 Geraden (32α) die von A. Vietor**) genauer untersuchte sogenannte *harmonische Configuration*

$$\text{Cf. } (24_9,\ 18_4)$$

bildet. Mit Rücksicht auf die beiden genannten Arbeiten, in welchen hauptsächlich die Verwandtschaften, nach welchen diese Configurationen sich gegenseitig bez. sich selbst entsprechen, einer genauen Untersuchung unterworfen sind, beschränken wir uns hier darauf, noch einige Eigenschaften der vollständigen Raumfigur, zumal auch im Anschluss an die vorhergehenden Betrachtungen hervorzuheben.

Jeder der 24 Anordnungen (27α)—(27γ) und (29α)—(29γ), nach welchen je zwei der drei Tetraeder T, T', T'' oder der drei Tetraeder $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$ perspectiv sind, entspricht eine (nicht geradlinige) Fläche 2[ter] Ordnung, in Bezug auf welche die beiden Tetraeder und damit alle Elemente der Raumfigur sich polarreciprok entsprechen. (Es sind dies die 24 Kernflächen der von A. Vietor betrachteten 24 Polarsysteme).

Von den vier einer vierfach perspectiven Lage von zwei Tetraedern entsprechenden Flächen 2[ter] Ordnung haben je zwei eine solche Lagenbeziehung, wie sie im § 9—4) betrachtet worden ist. Jede Fläche des Quadrupels hat mit jeder der drei anderen Flächen zwei imaginäre Linienpaare gemein, welche ein imaginäres räumliches Vierseit bilden; in den beiden reellen, wie in den beiden imaginären Eckpunkten dieses Vierseits berühren sich die beiden Flächen. Für die beiden Flächen F_1 und F_2, welche den beiden ersten Anordnungen in (27α) ent-

*) A. a. O. **) A. a. O.

sprechen erhält man, dem Werthe $u = -1$ entsprechend (vgl. § 9—4) Formeln 21(β) (γ) (β') (γ')):

$$(33\alpha)\begin{cases}\pi_1 \ldots i & -i & 1 & -1 \\ \pi_2 \ldots i & -i & -1 & 1\end{cases} \quad\Big|\quad (33\beta)\begin{cases}\mathfrak{p}_1 \ldots i & -i & -1 & 1 \\ \mathfrak{p}_2 \ldots i & -i & 1 & -1;\end{cases}$$

dagegen:

$$(33\alpha')\begin{cases}\pi_1' = \beta'_{12} \ldots 1 & 1 & 0 & 0 \\ \pi_2' = \beta'_{34} \ldots 0 & 0 & 1 & 1\end{cases} \quad\Big|\quad (33\beta')\begin{cases}\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{b}'_{34} \ldots 0 & 0 & 1 & 1 \\ \mathfrak{p}_2' = \mathfrak{b}'_{12} \ldots 1 & 1 & 0 & 0.\end{cases}$$

Je zwei Flächenpaare desselben Quadrupels haben dieselben zwei Berührungssehnen, jedoch so, dass diejenige Sehne, welche für das eine Flächenpaar die beiden *reellen* Berührungspunkte enthält (durch welche die *imaginären* Berührungsebenen hindurchgehen), für das zweite Paar den Träger der beiden *imaginären* Berührungspunkte (die Schnittlinie der beiden *reellen* Tangentenebenen) darstellt. Die sechs Berührungssehnen der Flächenpaare eines Quadrupels sind die Kanten des dritten Tetraeders, dessen Eckpunkte die Centren, dessen Seiten die Collineationsebenen der vierfachen Perspectivität für die beiden Tetraeder sind: *dieses Tetraeder ist für die vier Flächen des Quadrupels ein gemeinsames sich selbst conjugirtes Tetraeder.*

Jede der 24 Flächen wird von den drei anderen Flächen des Quadrupels in 6 Punkten berührt, welche den Eckpunkten eines Oktaeders entsprechen, das dem durch die gemeinsamen Berührungsebenen bestimmten Hexaeder eingeschrieben ist.*) Die 12 Berührungspunkte und die 12 gemeinsamen Tangentenebenen eines Quadrupels sind für die drei vierfach perspectiven Lagen der drei Tetraeder T, T', T'' (vgl. 27(α)—(γ)) die 12 Eckpunkte $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{b}'_{ik}$ und bez. die 12 Seiten β_{ik}, β'_{ik} der drei Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$, während umgekehrt diese 12 Berührungspunkte und gemeinsamen Tangentenebenen für die drei vierfach perspectiven Lagen der drei Tetraeder $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$ (vgl. 29(α)—(γ)) durch die 12 Eckpunkte $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_r'$, $\mathfrak{c}_r$ und bez. durch die 12 Seiten α_r, α_r', γ_r der drei Tetraeder T, T', T'' dargestellt werden.

Man wird die angegebenen interessanten Lagenbeziehungen der 24 Flächen analytisch aus der nachfolgenden Zusammenstellung der 24 Gleichungen derselben mit Leichtigkeit nachweisen. Die drei Quadrupel (34α) (β) (γ) d. h. die Flächen $F_1 - F_{[12]}$ entsprechen der Reihe nach den Anordnungen (27α) (β) (γ) für die desmische Lage der drei Tetraeder T, T', T'', die drei Quadrupel (35α) (β) (γ) d. h. die Flächen $F_{[13]} - F_{[24]}$ ebenso der Reihe nach den Anordnungen (29α)(β)(γ) für die desmische Lage der drei Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$. Zugleich sind bei jedem Quadrupel in der zweiten und dritten Columne die Gleichungen der beiden gemeinsamen Tangentenebenen, sowie deren Schnittlinie und die die reellen Berührungspunkte enthaltende Berührungssehne angegeben.

*) Vgl. Vietor a. a. O.

(34α)

$F_1 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} -2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4 \\ -2x_3x_4-2x_2x_4-2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$	$F_1-F_2 \equiv (x_1+x_2)(x_3+x_4)=0$ $c_{(12)} = c_{34} = \lvert\beta'_{12}\beta'_{34}\rvert$ $c_{12} = c_{(34)} = \lvert\mathfrak{b}'_{34}\mathfrak{b}'_{12}\rvert$	$F_3-F_4 \equiv (x_1-x_2)(x_3-x_4)=0$ $c_{(34)} = c_{12} = \lvert\beta_{12}\beta_{34}\rvert$ $c_{34} = c_{(12)} = \lvert\mathfrak{b}_{34}\mathfrak{b}_{12}\rvert$
$F_2 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} -2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4 \\ -2x_3x_4+2x_2x_4+2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$	$F_1-F_3 \equiv (x_1+x_3)(x_2+x_4)=0$ $c_{(13)} = c_{24} = \lvert\beta'_{13}\beta'_{24}\rvert$ $c_{13} = c_{(24)} = \lvert\mathfrak{b}'_{24}\mathfrak{b}'_{13}\rvert$	$F_2-F_4 \equiv (x_1-x_3)(x_2-x_4)=0$ $c_{(24)} = c_{13} = \lvert\beta_{13}\beta_{24}\rvert$ $c_{24} = c_{(13)} = \lvert\mathfrak{b}_{24}\mathfrak{b}_{13}\rvert$
$F_3 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} +2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4 \\ +2x_3x_4-2x_2x_4+2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$	$F_1-F_4 \equiv (x_1+x_4)(x_2+x_3)=0$ $c_{(14)} = c_{23} = \lvert\beta'_{14}\beta'_{23}\rvert$ $c_{14} = c_{(23)} = \lvert\mathfrak{b}'_{23}\mathfrak{b}'_{14}\rvert$	$F_2-F_3 \equiv (x_1-x_4)(x_2-x_3)=0$ $c_{(23)} = c_{14} = \lvert\beta_{14}\beta_{23}\rvert$ $c_{23} = c_{(14)} = \lvert\beta_{23}\beta_{14}\rvert$
$F_4 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} +2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4 \\ +2x_3x_4+2x_2x_4-2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$		

(34β)

$F_5 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} +2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4 \\ -2x_3x_4-2x_2x_4-2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$	$F_5-F_6 \equiv (x_1-x_2)(x_3+x_4)=0$ $a'_{(12)} = a'_{34} = \lvert\beta_{12}\beta'_{34}\rvert$ $a'_{12} = a'_{(34)} = \lvert\mathfrak{b}'_{34}\mathfrak{b}_{12}\rvert$	$F_7-F_8 \equiv (x_1+x_2)(x_3-x_4)=0$ $a'_{(34)} = a'_{12} = \lvert\beta'_{12}\beta_{34}\rvert$ $a'_{34} = a'_{(12)} = \lvert\mathfrak{b}_{34}\mathfrak{b}'_{12}\rvert$
$F_6 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} +2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4 \\ -2x_3x_4+2x_2x_4+2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$	$F_5-F_7 \equiv (x_1-x_3)(x_2+x_4)=0$ $a'_{(13)} = a'_{24} = \lvert\beta_{13}\beta'_{24}\rvert$ $a'_{13} = a'_{(24)} = \lvert\mathfrak{b}'_{24}\mathfrak{b}_{13}\rvert$	$F_6-F_8 \equiv (x_1+x_3)(x_2-x_4)=0$ $a'_{(24)} = a'_{13} = \lvert\beta'_{13}\beta_{24}\rvert$ $a'_{24} = a'_{(13)} = \lvert\mathfrak{b}_{24}\mathfrak{b}'_{13}\rvert$
$F_7 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} -2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4 \\ +2x_3x_4-2x_2x_4+2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$	$F_5-F_8 \equiv (x_1-x_4)(x_2+x_3)=0$ $a'_{(14)} = a'_{22} = \lvert\beta_{14}\beta'_{23}\rvert$ $a'_{14} = a'_{(23)} = \lvert\mathfrak{b}'_{23}\mathfrak{b}_{14}\rvert$	$F_6-F_7 \equiv (x_1+x_4)(x_2-x_3)=0$ $a'_{(23)} = a'_{14} = \lvert\beta'_{14}\beta_{23}\rvert$ $a'_{23} = a'_{(14)} = \lvert\mathfrak{b}_{23}\mathfrak{b}'_{14}\rvert$
$F_8 \equiv \sum_1^4 x_i^2 \left.\begin{matrix} -2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4 \\ +2x_3x_4+2x_2x_4-2x_2x_3 \end{matrix}\right\} = 0$		

$$(34\gamma)\left\{\begin{aligned}
F_9 &= -x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\\
F_{[10]} &\equiv x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\\
F_{[11]} &\equiv x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2=0\\
F_{[12]} &\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0
\end{aligned}\right.$$

$F_9 - F_{[10]} \equiv (x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$ $a_{(12)} = a_{34} = \|\beta_{12}\beta'_{12}\|$ $a_{12} = a_{(34)} = \|\mathfrak{b}'_{12}\mathfrak{b}_{12}\|$	$F_{[11]} - F_{[12]} \equiv (x_3-x_4)(x_3+x_4)=0$ $a_{(34)} = a_{12} = \|\beta_{34}\beta'_{34}\|$ $a_{34} = a_{(12)} = \|\mathfrak{b}'_{34}\mathfrak{b}_{34}\|$
$F_9 - F_{[11]} \equiv (x_1-x_3)(x_1+x_3)=0$ $a_{(13)} = a_{24} = \|\beta_{13}\beta'_{13}\|$ $a_{13} = a_{(24)} = \|\mathfrak{b}'_{13}\mathfrak{b}_{13}\|$	$F_{[10]} - F_{[12]} \equiv (x_2-x_4)(x_2+x_4)=0$ $a_{(24)} = a_{13} = \|\beta_{24}\beta'_{24}\|$ $a_{24} = a_{(13)} = \|\mathfrak{b}'_{24}\mathfrak{b}_{24}\|$
$F_9 - F_{[12]} \equiv (x_1-x_4)(x_1+x_4)=0$ $a_{(14)} = a_{23} = \|\beta_{14}\beta'_{14}\|$ $a_{14} = a_{(23)} = \|\mathfrak{b}'_{14}\mathfrak{b}_{14}\|$	$F_{[10]} - F_{[11]} \equiv (x_2-x_3)(x_2+x_3)=0$ $a_{(23)} = a_{14} = \|\beta_{23}\beta'_{23}\|$ $a_{23} = a_{(14)} = \|\mathfrak{b}'_{23}\mathfrak{b}_{23}\|$

$$(35\alpha)\left\{\begin{aligned}
F_{[13]} &\equiv x_3^2+x_4^2-2x_1x_2=0\\
F_{[14]} &\equiv x_1^2+x_2^2-2x_3x_4=0\\
F_{[15]} &\equiv x_3^2+x_4^2+2x_1x_2=0\\
F_{[16]} &\equiv x_1^2+x_2^2+2x_3x_4=0
\end{aligned}\right.$$

$F_{[13]} - F_{[14]} \equiv (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)=0$ $c_{(12)} = c_{34} = \|\gamma_1\gamma_2\|$ $c_{12} = c_{(34)} = \|\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_1\|$	$F_{[15]} - F_{[16]} \equiv (x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)=0$ $c_{(34)} = c_{12} = \|\gamma_3\gamma_4\|$ $c_{34} = c_{(12)} = \|\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_3\|$
$F_{[13]} - F_{[15]} \equiv x_1 \,.\, x_2 = 0$ $a_{(12)} = a_{34} = \|\alpha_1\alpha_2\|$ $a_{12} = a_{(34)} = \|\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\|$	$F_{[14]} - F_{[16]} \equiv x_3 \,.\, x_4 = 0$ $a_{(34)} = a_{12} = \|\alpha_3\alpha_4\|$ $a_{34} = a_{(12)} = \|\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_3\|$
$F_{[13]} - F_{[16]} \equiv (x_1+x_2-x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3-x_4)=0$ $a'_{(34)} = a'_{12} = \|\alpha'_3\alpha'_4\|$ $a'_{34} = a'_{(12)} = \|\mathfrak{a}'_4\,\mathfrak{a}'_3\|$	$F_{[14]} - F_{[15]} \equiv (-x_1+x_2+x_3+x_4)(\;x_1-x_2+x_3+x_4)=0$ $a'_{(12)} = a'_{34} = \|\alpha'_1\alpha'_2\|$ $a'_{12} = a'_{(34)} = \|\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}'_1\|$

(35β)	$F_{[17]} \equiv x_2^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 = 0$	$F_{[17]} - F_{[18]} \equiv (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4) = 0$ $c_{(13)} = c_{24} = \|\gamma_1\gamma_3\|$ $c_{13} = c_{(24)} = \|\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_1\|$	$F_{[19]} - F_{[20]} \equiv (x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4) = 0$ $c_{(24)} = c_{13} = \|\gamma_2\gamma_4\|$ $c_{24} = c_{(13)} = \|\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_2\|$
	$F_{[18]} \equiv x_1^2 + x_3^2 - 2x_2x_4 = 0$ $F_{[19]} \equiv x_2^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 = 0$	$F_{[17]} - F_{[19]} \equiv x_1 \,.\, x_3 = 0$ $a_{(13)} = a_{24} = \|\alpha_1\alpha_3\|$ $a_{13} = a_{(24)} = \|\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1\|$	$F_{[18]} - F_{[20]} \equiv x_2 \,.\, x_4 = 0$ $a_{(24)} = a_{13} = \|\alpha_2\alpha_4\|$ $a_{24} = a_{(13)} = \|\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_2\|$
	$F_{[20]} \equiv x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_4 = 0$	$F_{[17]} - F_{[20]} \equiv (x_1-x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4) = 0$ $a'_{(24)} = a'_{13} = \|\alpha_2'\alpha_4'\|$ $a'_{24} = a'_{(13)} = \|\mathfrak{a}_4'\,\mathfrak{a}_2'\|$	$F_{[18]} - F_{[19]} \equiv (-x_1+x_2+x_3+x_4)(\ x_1+x_2-x_3+x_4) = 0$ $a'_{(13)} = a'_{24} = \|\alpha_1'\alpha_3'\|$ $a'_{13} = a'_{(24)} = \|\mathfrak{a}_3'\,\mathfrak{a}_1'\|$
(35γ)	$F_{[21]} \equiv x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_4 = 0$	$F_{[21]} - F_{[22]} \equiv (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4) = 0$ $c_{(14)} = c_{23} = \|\gamma_1\gamma_4\|$ $c_{14} = c_{(23)} = \|\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_1\|$	$F_{[23]} - F_{[24]} \equiv (x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4) = 0$ $c_{(23)} = c_{14} = \|\gamma_2\gamma_3\|$ $c_{23} = c_{(14)} = \|\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_2\|$
	$F_{[22]} \equiv x_1^2 + x_4^2 - 2x_2x_3 = 0$ $F_{[23]} \equiv x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_4 = 0$	$F_{[21]} - F_{[23]} \equiv x_1 \,.\, x_4 = 0$ $a_{(14)} = a_{23} = \|\alpha_1\alpha_4\|$ $a_{14} = a_{(23)} = \|\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_1\|$	$F_{[22]} - F_{[24]} \equiv x_2 \,.\, x_3 = 0$ $a_{(23)} = a_{14} = \|\alpha_2\alpha_3\|$ $a_{23} = a_{(14)} = \|\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_2\|$
	$F_{[24]} \equiv x_1^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 = 0$	$F_{[21]} - F_{[24]} \equiv (x_1-x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3+x_4) = 0$ $a'_{(23)} = a'_{14} = \|\alpha_2'\alpha_3'\|$ $a'_{23} = a'_{14} = \|\mathfrak{a}_3'\,\mathfrak{a}_2'\|$	$F_{[22]} - F_{[23]} \equiv (-x_1+x_2+x_3+x_4)(\ x_1+x_2+x_3-x_4) = 0$ $a'_{(14)} = a'_{23} = \|\alpha_1'\alpha_4'\|$ $a'_{14} = a'_{(23)} = \|\mathfrak{a}_4'\,\mathfrak{a}_1'\|$

6) Von weiteren interessanten Beziehungen, welche sich für die gegenseitige Lage der 24 Flächen ergeben und aus den in (34) und (35) aufgestellten Ausdrücken analytisch leicht hergeleitet werden können, seien noch die folgenden erwähnt.

Zwei solche der 12 Flächen des ersten Systems ((34 α)—(γ)) oder der 12 Flächen des zweiten Systems ((35 α)—(γ)), welche *nicht* demselben Quadrupel angehören, haben zwei ebene, nicht zerfallende, aber imaginäre Schnittcurven und zwei gemeinsame, imaginäre Tangentenkegel; sie berühren sich also in zwei imaginären Punkten. Die reellen Ebenen der Schnittcurven und die reellen Scheitel der Tangentenkegel entsprechen sich resp. polar in Beziehung auf beide Flächen.

Die 2 . 48 = 96 Scheitel der Tangentenkegel werden für die 12 Flächen des ersten Systems durch die 4-fach auftretenden Eckpunkte der Tetraeder T, T', T'' und die 48 Punkte (31 β'), für die des zweiten Systems durch die 4-fach auftretenden Eckpunkte der Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$, und die 48 Punkte (31 β'') gebildet. Analog sind die 96 Ebenen der Schnittcurven für das erste System durch die 4-fach auftretenden Seitenflächen der Tetraeder T, T', T'' und die 48 Polarebenen der Punkte (31 β') in Bezug auf die Fläche F (32 γ), für das zweite System durch die 4-fach auftretenden Seiten der Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ und die 48 Polarebenen der Punkte (31 β'') repräsentirt. So hat man z. B.

$$(36\alpha) \qquad \begin{cases} F_1 - F_5 \equiv x_1(x_2+x_3+x_4) = 0 \\ \qquad b_{(11)} = |\alpha_1\, \gamma_1^{[1]}| \\ \qquad b_{11} = |\mathfrak{a}_1'\, \mathfrak{c}_1^{[1']}| \\ F_5 - 2F_9 \equiv (3x_1+x_2+x_3+x_4)(-x_1+x_2+x_3+x_4) = 0 \\ \qquad b_{(11)} = |\gamma_1^{[1']}\, \alpha_1'| \\ \qquad b_{11} = |\mathfrak{c}_1^{[1]}\;\; \mathfrak{a}_1| \end{cases}$$

$$(36\beta) \qquad \begin{cases} F_{[13]} - F_{[17]} \equiv (x_2-x_3)(2x_1+x_2+x_3) = 0 \\ \qquad b_{41} = |\beta_{23}\, \varphi_{41,23}| \\ \qquad b_{(41)} = |\mathfrak{b}_{13}'\;\; \mathfrak{f}_{41,13}| \\ F_{[13]} - F_{[24]} \equiv (x_1+x_3)(x_1+2x_2-x_3) = 0 \\ \qquad b_{41} = |\beta_{13}'\, \varphi_{41,13}| \\ \qquad b_{(41)} = |\mathfrak{b}_{23}\;\; \mathfrak{f}_{41,23}|. \end{cases}$$

Endlich sei erwähnt, dass jede der 24 Flächen $F_1 \ldots F_{(24)}$ mit der Fläche F (32 γ)

$$(32\gamma) \qquad F \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

sich in einem Kegelschnitt berührt, längs dessen beide Flächen von einem gemeinsamen Tangentenkegel umhüllt werden; man hat z. B.

$$(36\gamma')\qquad \begin{cases} 2F - F_1 \equiv (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0 \\ 2F - F_5 \equiv (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0 \\ 2F - F_9 \equiv x_1^2 = 0, \end{cases}$$

so dass für diese Paare der Reihe nach γ_1, α_1', α_1 die Ebene der Schnittcurve, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_1$ der Scheitel des gemeinsamen Tangentenkegels ist; analog ist z. B.

$$(36\gamma'')\qquad \begin{cases} F - F_{[13]} \equiv (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ F - F_{[17]} \equiv (x_1 + x_3)^2 = 0 \\ F - F_{[21]} \equiv (x_1 + x_4)^2 = 0, \end{cases}$$

so dass für diese Paare der Reihe nach β_{12}', β_{13}', β_{14}' die Ebene der Schnittcurve, $\mathfrak{b}_{12}'$, $\mathfrak{b}_{13}'$, $\mathfrak{b}_{14}'$ der Scheitel des gemeinsamen Tangentenkegels ist.

6) Die *Construction* zweier vierfach perspectiven Tetraeder und damit eines desmischen Systems ergiebt sich einfach aus dem Obigen auf folgende Art. Wenn das erste Tetraeder T und ein Element (Ecke oder Seite) des zweiten Tetraeders T' gegeben sind, so sind die übrigen Elemente eindeutig bestimmt.

Sind z. B. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{a}_1'$ gegeben, so lege man durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_1'$ die Ebene β_{34}. Die Spuren der Ebenen α_1 und α_2 in derselben schneiden sich in $\mathfrak{b}_{34}'$, dessen Verbindungslinie a_{12}' mit $\mathfrak{a}_1'$ die Kante $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ in $\mathfrak{b}_{12}$ schneidet. Dann ist $\mathfrak{a}_2'$ auf der Kante a_{12}' als der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{b}_{34}'$, $\mathfrak{b}_{12}$ und $\mathfrak{a}_1'$ zu construiren.

Die beiden anderen Eckpunkte $\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{a}_4'$ kann man analog in den Ebenen:

$\beta_{24} = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1']$ als vierten harmonischen Punkt auf a_{13}' zu $\mathfrak{b}_{24}'$, $\mathfrak{b}_{13}$ u. $\mathfrak{a}_1'$,
$\beta_{14} = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1']$ „ „ „ „ „ a_{14}' zu $\mathfrak{b}_{14}'$, $\mathfrak{b}_{23}$ u. $\mathfrak{a}_1'$

construiren, oder auch nachdem man in der Ebene β_{34}:

$$\mathfrak{c}_1 = (|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1'|,\ |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_2'|)$$
$$\mathfrak{c}_2 = (|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2'|,\ |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1'|)$$

bestimmt hat, in der durch $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ und c_{12} bestimmten Ebene β_{12} als Schnittpunkte:

$$\mathfrak{a}_3' = (|\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{c}_2|)$$
$$\mathfrak{a}_4' = (|\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{c}_1|).$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Construction, falls die gegebenen Elemente Ebenen sind.

7) Ein interessanter *Specialfall* für die Lage zweier vierfach perspectiven Tetraeder, auf welchen bereits Stéphanos, Reye und Vietor hingewiesen haben, ist durch die beiden *regulären* Tetraeder der *sogenannten* Kepler'schen *stella octangula*, deren Eckpunkte den

Ecken eines Würfels, deren Seitenflächen denjenigen eines concentrischen, diesem Würfel eingeschriebenen Oktaeders entsprechen, gegeben.

Die Eckpunkte des dritten Tetraeders T'' sind der gemeinsame Mittelpunkt des Würfels und Oktaeders und die drei unendlich fernen Punkte der Flächenaxen des Würfels, die Seiten von T'' sind die unendlich ferne Ebene und die drei zu jenen Flächenaxen senkrechten Symmetrieebenen.

Das zweite dem ersten *conjugirte* desmische System hat die Flächenmittelpunkte des Würfels (Eckpunkte des Oktaeders) und die 6 unendlich fernen Punkte der Diagonalen der Würfelflächen zu Eckpunkten, während die Seiten durch die 6 Würfelflächen und die 6 durch je zwei parallele Diagonalen bestimmten Ebenen gebildet werden. Je zwei gegenüberliegende Flächenmittelpunkte des Würfels und die unendlich fernen Punkte der durch diese gehenden Flächendiagonalen bilden eines der drei Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$. Man erkennt leicht, welche Gerade dieser speciellen Raumfigur den bei der allgemeinen Figur betrachteten Geraden entsprechen, ebenso auch die besondere Lage der übrigen Punkte und Ebenen $\mathfrak{c}_1^{[1]} \ldots$ und $\gamma_1^{[1]} \ldots$ (31β).

8) Analog, wie man eine ebene Figur durch Centralprojection auf eine concentrische Kugelfläche übertragen kann, lässt sich auch die Centralprojection einer Figur des dreidimensionalen (ebenen) Raums auf einen concentrischen dreidimensionalen *sphärischen* Raum betrachten. Jedem Punkt des dreidimensionalen ebenen Raums entspricht als Projection ein Punkt (und dessen Gegenpunkt) des dreidimensionalen sphärischen Raums, jeder Geraden ein Hauptkreis, jeder Ebene eine Haupt-(Diametral)-Kugel des sphärischen Raums.

Die centrale Projection eines ebenflächigen Tetraeders auf einen dreidimensionalen sphärischen Raum ist ein sphärisches Tetraeder (und dessen Gegenfigur), dessen vier Hauptkugeln den sphärischen Raum in 16 Tetraeder zertheilen, von denen je 8 in jedem der 8 Punkte zusammenstossen. Sind speciell diese vier Hauptkugeln zu einander orthogonal, so entsteht das durch 16 congruente reguläre Tetraeder gebildete reguläre sphärische Zellgewebe, welchem das reguläre (linear begrenzte) *Sechszehnzell* des 4-dimensionalen Raums *ein*-, das reguläre *Achtzell um*geschrieben ist.*) Die Mittelpunkte der 16 regulären Tetraeder liefern durch Hauptkugeln verbunden ein zweites reguläres Zellgewebe, welches von 8 regulären Hexaedern begrenzt wird, deren

---

*) Vgl. hierüber z. B. Schlegel: „*Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde*". Nova acta der ksl. Leop.-Carol. Akademie. Bd. XLIV, Nr. 4, Halle 1883, sowie des Verf. Abhandlung: „*Ueber reguläre Polytope höherer Art.*" Marburger Berichte 1885, Nr. 3 Mai.

Mittelpunkte die Ecken der Tetraeder sind. Diesem dem ersteren *conjugirten* Gewebe ist das reguläre *Achtzell* ein-, das reguläre *Sechszehnzell* umgeschrieben. Endlich ergiebt der Verein dieser beiden regulären Gewebe ein *drittes* reguläres Gewebe, dessen Eckpunkte die $8+16=24$ Eckpunkte der beiden sind und dessen Grenzpolyeder 24 reguläre Oktaeder sind. Diesem regulären Gewebe ist das reguläre *Vierundzwanzigzell* des vierdimensionalen Raums sowohl ein- als umgeschrieben, da die Mittelpunkte der 24 Oktaeder ein dem ersteren conjugirtes *congruentes* reguläres Gewebe bestimmen.

Das eben beschriebene Gebilde des dreidimensionalen sphärischen Raumes, welches wesentlich aus 24 Hauptkugeln besteht, welche sich zu 9 in 24 Punkten (und deren Gegenpunkten) und zu 4 in 18 Hauptkreisen schneiden oder allgemeiner ein *diesem collinear verwandtes Gebilde* lässt sich nun als durch Centralprojection der vollständigen Figur eines Systems dreier *desmischen* Tetraeder und des *conjugirten* Systems des dreidimensionalen ebenen Raums auf einen concentrischen sphärischen entstanden ansehen. Die 24 Eckpunkte des dritten Gewebes sind die Projectionen der Eckpunkte $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_r'$, $\mathfrak{c}_r$ der drei Tetraeder T, T', T'', während die Mittelpunkte der sphärischen Oktaeder die Projectionen der 12 Punkte $\mathfrak{b}_{ik}$, $\mathfrak{b}_{ik}'$ der Eckpunkte des zweiten Systems darstellen; die 24 Hauptkugeln entsprechen den 24 Ebenen α_r, α_r', γ_r und β_{ik}, β_{ik}'; die 18 Hauptkreise, in welchen sich je 4 Hauptkugeln schneiden, den 18 Kanten a_{ik}, a_{ik}', c_{ik} u. s. f. Die oben betrachteten *regulären* Gewebe gehen durch collineare Transformation aus dem durch Projection erhaltenen hervor; die *orthogonalen* Coordinaten der Eckpunkte dieser regulären Gewebe, wobei die vier Euklid'schen Räume des Coordinatensystems den Seitenflächen des Tetraeders T entsprechen, sind dann genau die früher von uns aufgestellten tetraedrischen Coordinaten der entsprechenden Eckpunkte des dreidimensionalen Gebildes.

Indem wir uns vorbehalten, diese Beziehungen bei einer anderen Gelegenheit weiter zu verfolgen, wollen wir nur noch erwähnen, dass die 24 Hauptkugeln des sphärischen Zellgewebes (z. B. für den Fall der Regelmässigkeit) den sphärischen Raum in 1152 (im Falle der Regelmässigkeit congruente) Tetraeder zertheilen und dass diese Tetraeder (oder ihre Mittelpunkte) im vierdimensionalen Raume als die geometrischen Bilder der 1152 Collineationen — wie sie für die Cf. $(24_9, 18_4)$ von Vietor angegeben sind — gedeutet werden können.

§ 11.

Ueber eine bemerkenswerthe Raumfigur. (Cf. 60_{15}, 72_5).

Wir wollen zum Schlusse noch eine bemerkenswerthe Raumfigur betrachten, welche aus einem Systeme dreier desmischen Tetraeder hergeleitet werden kann und bei welcher die im § 6 gewonnenen Eigenschaften der Figur eines 10-fach Brianchon'schen Sechsecks zur Anwendung kommen.*) Man kann diese Raumfigur als das räumliche Analogon der Figur eines ebenen 10-fach Brianchon'schen Sechsecks auffassen; sie bildet die interessante Cf. (60_{15}, 72_5) und ihre nach den in § 10—8) gegebenen Regeln zu erhaltende Projection auf den dreidimensionalen sphärischen Raum ergiebt zwei Zellgewebe, aus denen sich für den Fall der Regelmässigkeit das reguläre 600-Zell und 120-Zell als ein- oder umgeschriebene Vielräume ergeben.

1) Betrachten wir ein desmisches System dreier Tetraeder T, T', T'', deren Eckpunkte und Seiten wir bez. durch $\mathfrak{B}_r$, $\mathfrak{B}_r'$, $\mathfrak{B}_r''$ und β_r, β_r', β_r'' bezeichnen wollen. In jeder der 12 Seitenflächen wird durch die Spuren der 11 übrigen Ebenen, die Figur eines vollständigen Vierseits erzeugt, dessen Diagonaldreieck das Dreieck der betrachteten Seitenfläche ist. Man construire nun in jeder dieser 12 Ebenen die Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks (§ 6), indem man zu jedem Dreieck einer Seitenfläche die zugehörigen vier Dreiecke bestimmt [§ 6—8) und Formel (59δ) und (61)], welche die Eigenschaft haben, dass je zwei dieser fünf Dreiecke zu einander *dreifach* perspectiv sind und zwar so, dass die drei Centren auf einer Geraden liegen und die drei Axen sich in einem Punkte schneiden (vgl. auch § 3 unter II 2)). Aus den in § 6 entwickelten Eigenschaften folgt, dass wir bei der vorliegenden Figur die 12 Eckpunkte dieser gesuchten vier Dreiecke einfach dadurch erhalten, dass wir auf jeder Seite des Vierseits die drei durch die Ecken gebildeten Strecken in demselben Sinne nach dem *goldenen Schnitt* (im Verhältniss $1 : \operatorname{tang} \varphi$, s. Formel (35) in § 3) theilen. Die 15 Eckpunkte $\mathfrak{B}$ der 5 Dreiecke (einschliesslich der Eckpunkte des ge-

---

*) Soviel mir bekannt geworden, wird diese Raumfigur nur kurz in der Abhandlung von Stéphanos: „Sur une représentation des homographies binaires par des points de l'espace." Math. Ann. Bd. XII auf Seite 351 und in einer Anmerkung erwähnt. Die 60 Punkte derselben stellen zufolge der von Stéphanos angestellten Betrachtung die Drehungen dar, welche ein reguläres Dodekaeder mit sich selbst zur Deckung bringen. In der Anmerkung muss es in der fünften Zeile statt: „*cinq* de ces droites" heissen: „*six*".

Die im Obigen gegebene Herleitung, bei welcher in einfacher Weise die Eigenschaften eines desmischen Systems und eines 10-fach Brianchon'schen Sechsecks zur Anwendung kommen, ist meines Wissens noch nicht gegeben worden.

gebenen Dreiecks) liegen zu je zweien auf den 15 Geraden B (einschliesslich der drei Seiten des Diagonaldreiecks), welche sich ausserdem 10mal zu dreien in den Centren $\mathfrak{C}$ und 6mal zu fünfen in den Punkten $\mathfrak{G}$ schneiden, welche die Fundamentalpunkte der Figur, d. h. die Eckpunkte der 10 Gruppen von je zwei *vierfach* perspectiven Dreiecken sind. (§ 6—3)—5)). Die 15 Punkte $\mathfrak{B}$ liegen ferner 10mal zu dreien auf den Geraden C (einschliesslich der vier Seiten des Vierseits) und 6mal zu fünfen auf den Geraden G (§ 6 —7)).

Da in jeder der vier Seiten eines Vierseits sich je drei Ebenen der drei Tetraeder T, T', T'' schneiden (z. B. in der Ebene β_4 sind diese vier Seiten die Schnittlinien von β_4 mit $\beta_1' \beta_4''$, $\beta_2' \beta_3''$, $\beta_3' \beta_2''$, $\beta_4' \beta_1''$), so folgt, dass wenn die angegebene Construction der 4 Dreiecke in allen 12 Ebenen ausgeführt wird, $\frac{12.12}{3} = 48$ Eckpunkte, also mit den 12 Ecken der drei Tetraeder 60 Punkte $\mathfrak{B}$ erhalten werden.

Sowie nun je 15 der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ auf die angegebene Weise nebst den durch sie bestimmten Linien in jeder der 12 Seitenflächen der drei Tetraeder T, T', T'' liegen, so liegen sie ausserdem ganz auf dieselbe Art in weiteren 48 Ebenen β, so dass also 60 Ebenen β resultiren, welche je 15 Punkte $\mathfrak{B}$ in der gegebenen Anordnung enthalten. Betrachten wir eine Seitenfläche der 3 Tetraeder, so gehen von diesen weiteren 48 Ebenen je eine durch die zwölf Seiten der vier construirten Dreiecke, je zwei durch die 6 zu den vier Seiten des Vierseits hinzutretenden Geraden C und je vier durch die sechs Geraden G dieser Ebene hindurch.

Dass in der That die 60 Punkte $\mathfrak{B}$ die angegebene Lagenbeziehung haben, folgt analytisch sehr leicht aus den folgenden Coordinaten der 60 Punkte $\mathfrak{B}$ in Beziehung auf das Tetraeder T als Coordinatentetraeder. In den Formeln (37β)—(37δ) sind die Coordinaten der übrigen Punkte der Gruppe aus denjenigen des erstangeführten dadurch zu erhalten, dass man die vierte Coordinate ungeändert lässt und den drei ersten die Vorzeichencombinationen vorsetzt, in der Formel (37ε) dadurch, dass man die dritte Coordinate ungeändert lässt und den beiden ersten die Vorzeichencombinationen vorsetzt. Die Coordinatenwerthe sind mit Rücksicht auf eine noch folgende Anwendung mit solchen Factoren multiplicirt, dass ihre Quadratsumme gleich eins ist. Dabei ist (vgl. (35) in § 3):

$$(37)\qquad \begin{cases} \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\varphi \\ \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \\ \sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$
(37\,\alpha)\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{lcccc|llcccc}
\mathfrak{B}_1 & \ldots 1 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{B}_5 & = \mathfrak{B}_1' \cdots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\mathfrak{B}_2 & \ldots 0 & 1 & 0 & 0 & \mathfrak{B}_6 & = \mathfrak{B}_2' \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\mathfrak{B}_3 & \ldots 0 & 0 & 1 & 0 & \mathfrak{B}_7 & = \mathfrak{B}_3' \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\mathfrak{B}_4 & \ldots 0 & 0 & 0 & 1 & \mathfrak{B}_8 & = \mathfrak{B}_4' \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array} \\
\begin{array}{llcccc}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathfrak{B}_9 & = \mathfrak{B}_1'' \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathfrak{B}_{(10)} & = \mathfrak{B}_2'' \cdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathfrak{B}_{(11)} & = \mathfrak{B}_3'' \cdots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathfrak{B}_{(12)} & = \mathfrak{B}_4'' \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\end{array}\right.
$$

$$
(37\,\beta)\left\{
\begin{array}{lcccc}
\mathfrak{B}_{(13)} - \mathfrak{B}_{(16)} \cdots & 0 & \sin\frac{\pi}{10} & \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{5} \\
\mathfrak{B}_{(17)} - \mathfrak{B}_{(20)} \cdots & 0 & \cos\frac{\pi}{5} & \sin\frac{\pi}{10} & \frac{1}{2} \\
\mathfrak{B}_{(21)} - \mathfrak{B}_{(24)} \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{5} & \sin\frac{\pi}{10}
\end{array}\right.
$$

$$
(37\,\gamma)\left\{
\begin{array}{lcccc}
\mathfrak{B}_{(25)} - \mathfrak{B}_{(28)} \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \sin\frac{\pi}{10} & \cos\frac{\pi}{5} \\
\mathfrak{B}_{(29)} - \mathfrak{B}_{(32)} \cdots & \sin\frac{\pi}{10} & 0 & \cos\frac{\pi}{5} & \frac{1}{2} \\
\mathfrak{B}_{(33)} - \mathfrak{B}_{(36)} \cdots & \cos\frac{\pi}{5} & 0 & \frac{1}{2} & \sin\frac{\pi}{10}
\end{array}\right.
$$

$$
(37\,\delta)\left\{
\begin{array}{lcccc}
\mathfrak{B}_{(37)} - \mathfrak{B}_{(40)} \cdots & \sin\frac{\pi}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{5} \\
\mathfrak{B}_{(41)} - \mathfrak{B}_{(44)} \cdots & \cos\frac{\pi}{5} & \sin\frac{\pi}{10} & 0 & \frac{1}{2} \\
\mathfrak{B}_{(45)} - \mathfrak{B}_{(48)} \cdots & \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{5} & 0 & \sin\frac{\pi}{10}
\end{array}\right.
$$

$$
(37\,\varepsilon)\left\{
\begin{array}{lcccc}
\mathfrak{B}_{(49)} - \mathfrak{B}_{(52)} \cdots & \frac{1}{2} & \sin\frac{\pi}{10} & \cos\frac{\pi}{5} & 0 \\
\mathfrak{B}_{(53)} - \mathfrak{B}_{(56)} \cdots & \sin\frac{\pi}{10} & \cos\frac{\pi}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\
\mathfrak{B}_{(57)} - \mathfrak{B}_{(60)} \cdots & \cos\frac{\pi}{5} & \frac{1}{2} & \sin\frac{\pi}{10} & 0\,.
\end{array}\right.
$$

Die 60 Ebenen β, welche je 15 der Punkte $\mathfrak{B}$ enthalten, sind nun nichts anderes, als die *Polarebenen dieser Punkte* in Beziehung auf die Fläche der zweiten Ordnung:

(38) $$F_0 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

sodass die Coordinaten dieser Ebenen β genau mit den bez. Coordinaten der Pole $\mathfrak{B}$ übereinstimmen. In jeder der 60 Ebenen entsprechen sich die Punkte und Geraden der Figur polar in Beziehung auf den Kegelschnitt, in welchem diese Ebene die Fläche F_0 schneidet; wie dies in Beziehung auf die Ebene $\beta_4 \ldots x_4 = 0$ schon früher hinsichtlich des Kegelschnitts (vgl. (59α) in § 6)

(38α) $$K_0 \ldots x_1^2 + x_2 + x_3^2 = 0$$

nachgewiesen wurde. Man bestätigt leicht, dass die 12 Punkte $\mathfrak{B}_{(49)} - \mathfrak{B}_{(60)}$ in (37ε) genau den 12 Punkten $\mathfrak{B}_4 - \mathfrak{B}_{(15)}$ in (59δ) des § 6 entsprechen.

2) Die 60 Ebenen β, welche je 15 Punkte $\mathfrak{B}$ enthalten, gehen zu je 15 durch die 60 Punkte $\mathfrak{B}$ hindurch; ferner schneiden sie sich zu je 5 in den 72 Geraden G, von denen je sechs in einer Ebene auftreten, während 5 Punkte $\mathfrak{B}$ auf jeder dieser Geraden liegen. Die betrachtete Raumfigur stellt also nach Reyes Bezeichnung eine

(39) $$\text{Cf. } (60_{15},\ 72_5)$$

dar.

Um die vollständige durch die 60 Ebenen gebildete Raumfigur zu überblicken, beachte man, dass in jeder der 60 Ebenen (vgl. § 6—8) die 15 Geraden B, die 10 Geraden C und die 6 Geraden G sich

(40α)	zu je *sechsen*	(2 Gerade B, 2 Gerade C, 2 Gerade G)	in den 15 Punkten	$\mathfrak{B}$,
	„ „ *fünfen*	(5 Gerade B)	„ „ 6 „	$\mathfrak{G}$,
	„ „ *dreien*	(3 Gerade B)	„ „ 10 „	$\mathfrak{C}$,
	„ „ *dreien*	(1 Gerade B, 2 Gerade C)	„ „ 30 „	$\mathfrak{D}$,
	„ „ *zweien*	(1 Gerade B, 1 Gerade C)	„ „ 30 „	$\mathfrak{E}$,
	„ „ *zweien*	(1 Gerade B, 1 Gerade G)	„ „ 30 „	$\mathfrak{F}$

schneiden. Berücksichtigt man ferner die oben angegebene Zahl der Ebenen, welche durch je eine Gerade B, C, G hindurchgehen, so erhält man das Resultat, dass die Schnittpunkte der 60 Ebenen folgende sind:

(40β)	60 Punkte	$\mathfrak{B}$,	in denen sich je 15 Ebenen β schneiden,	
	360 „	$\mathfrak{H} = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})$,	„ „ „ „ 6 „ β „	,
	600 „	$\mathfrak{J} = (\mathfrak{C} + \mathfrak{E})$,	„ „ „ „ 4 „ β „	,
	300 „	$\mathfrak{D}$,	„ „ „ „ 6 „ β „	.

Die in (40α) aufgeführten Punkte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ ergeben die Punkte $\mathfrak{H}$, die Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{E}$ die Punkte $\mathfrak{J}$, sodass in jeder Ebene β 36 Punkte $\mathfrak{H}$ (30 Punkte $\mathfrak{F}$ und 6 Punkte $\mathfrak{G}$), 40 Punkte $\mathfrak{J}$ (10 Punkte $\mathfrak{C}$ und 30 Punkte $\mathfrak{E}$) liegen.

Als *Schnittlinien* der 60 Ebenen erhält man:

a) 450 Gerade B, in denen sich je zwei Ebenen β schneiden; auf jeder derselben liegen:

2 Punkte $\mathfrak{B}$, 4 Punkte $\mathfrak{H}$ (2 Punkte $\mathfrak{F}$, 2 Punkte $\mathfrak{G}$),
4 Punkte $\mathfrak{J}$ (2 Punkte $\mathfrak{C}$, 2 Punkte $\mathfrak{E}$) und 2 Punkte $\mathfrak{D}$;

b) 200 Gerade C, in denen sich je 3 Ebenen β schneiden; auf jeder derselben liegen:

3 Punkte $\mathfrak{B}$, 3 Punkte $\mathfrak{J} = \mathfrak{E}$ und 6 Punkte $\mathfrak{D}$;

c) 72 Gerade G, in welchen sich je 5 Ebenen β schneiden; auf jeder derselben liegen:

5 Punkte $\mathfrak{B}$ und 5 Punkte $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Zieht man mit Rücksicht hierauf von der Summe der Schnittpunkte aus (40β)

$$60 \cdot \binom{15}{3} + 360 \cdot \binom{6}{3} + 600 \cdot \binom{4}{3} + 300 \cdot \binom{6}{3} = 42900$$

die Summe aus b) und c)

$$200 \cdot 11 \cdot \binom{3}{3} + 72 \cdot 9 \cdot \binom{5}{3} = 8680$$

ab, so resultirt die richtige Zahl der Schnittpunkte

$$34220 = \binom{60}{3} \cdot$$

3) Von weiteren wichtigen Eigenschaften unsrer Raumfigur seien noch folgende erwähnt:

Die 60 Punkte $\mathfrak{B}$ und die 60 Ebenen β bilden 75 sich selbst in Bezug auf F_0 conjugirte Tetraeder, von welchen drei die zuerst betrachteten Tetraeder T, T', T'' sind. In jedem Eckpunkte $\mathfrak{B}$ stossen fünf solcher Polartetraeder zusammen, während jede Ebene β die Seitenflächen von fünf Tetraedern enthält. Diese 75 Polartetraeder ergeben 25 Systeme von je drei desmischen Tetraedern.

Die 60 Ebenen β zertheilen den Raum in 300 tetraedrische Räume, welche theils vollständig begrenzte Tetraeder theils solche sind, bei welchen je eine und je drei oder je zwei und je zwei Eckpunkte durch die unendlich ferne Ebene getrennt werden. Von diesen Tetraedern stossen je 20 in einem Punkte $\mathfrak{B}$ zusammen.

Betrachtet man z. B. die 12 Punkte

$$\mathfrak{B}_{(13)} - \mathfrak{B}_{(16)}, \quad \mathfrak{B}_{(25)} - \mathfrak{B}_{(28)}, \quad \mathfrak{B}_{(37)} - \mathfrak{B}_{(40)}$$

(s. Formeln (37β), (γ), (δ)), so lassen sich diese zu 20 Dreiecken mit je fünf in einer Ecke zusammenstossenden Flächen (der Oberfläche eines regulären Ikosaeders entsprechend) vereinigen. Die aus diesen 20 Dreiecken als Basen mit der gemeinschaftlichen Spitze $\mathfrak{B}_1$ gebildeten Pyramiden sind die 20 in dem Punkte $\mathfrak{B}_1$ zusammenstossenden Tetraeder.

4) Ueberträgt man gemäss den in § 10—8) gegebenen Vorschriften die durch die 60 Ebenen gebildete Raumfigur durch Centralprojection auf einen concentrischen dreidimensionalen sphärischen Raum, so erhält man 60 Hauptkugeln, welche sich

zu je 15 in 60 Punkten $\mathfrak{b}$ und deren Gegenpunkten,
„ „ 6 „ 360 „ $\mathfrak{h}=(\mathfrak{f}+\mathfrak{g})$ „ „ „ ,
„ „ 4 „ 600 „ $\mathfrak{i}=(\mathfrak{c}+\mathfrak{e})$ „ „ „ ,
„ „ 6 „ 300 „ $\mathfrak{d}$ „ „ „ ,

den Projectionen bez. der Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{D}$ (40β) schneiden und welche

zu je zweien durch 450 Hauptkreise b,
„ „ dreien „ 200 „ c,
„ „ fünfen „ 72 „ g,

nämlich bez. durch die Projectionen der Geraden B, C, G hindurchgehen.

Auf jeder der 60 Hauptkugeln entsteht die vollständige Figur eines *sphärischen* zehnfach Brianchon'schen Sechsecks, welche durch 15 Hauptkreise b, durch 10 Hauptkreise c und durch 6 Hauptkreise g gebildet wird, welche sich in den Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ entsprechend wie die Geraden B, C, G einer Ebene β in den Punkten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ (siehe (40α)) schneiden.*)

Der ganze sphärische Raum wird durch die 60 Hauptkugeln in 14400 sphärische Tetraeder (einschliesslich der Gegenfiguren) mit je einer Ecke $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{d}$ getheilt, so dass um jeden

der 120 Punkte $\mathfrak{b}$ je 120 dieser Elementartetraeder,
„ 720 „ $\mathfrak{h}$ „ 20 „ „ ,
„ 1200 „ $\mathfrak{i}$ „ 12 „ „ ,
„ 600 „ $\mathfrak{d}$ „ 24 „ „

herumliegen.

Für den speciellen Fall, dass die sphärischen Polartetraeder *orthogonal* werden und die sphärischen Figuren einer Hauptkugel in vollständige *reguläre* 10-fach Brianchon'sche Sechsecke übergehen, bei welchen z. B. die 6 Punkte $\mathfrak{g}$ und deren Gegenpunkte die Eckpunkte eines eingeschriebenen *regulären* Ikosaeders sind — es sind diese Bedingungen erfüllt, sobald die drei sphärischen Polartetraeder T, T', T'' orthogonal sind und in jeder der sie begrenzenden Hauptkugeln die oben angegebenen Strecken (Bogen) nach dem goldnen Schnitt getheilt werden —, gehen die betrachteten sphärischen Zellgewebe in *reguläre* über. Und zwar ist dem so erhaltenen regulären Gewebe, dessen Eck-

*) Vgl. die Fig. 29 und 30 in meinem Buche: „Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung", welche die stereographische Projection dieser sphärischen Figuren geben.

punkte die 120 Punkte $\mathfrak{b}$ sind, das *reguläre 600-Zell*, welches von 600 regulären zu je 20 in einer Ecke zusammenstossenden Tetraedern begrenzt wird, *ein*geschrieben, das *reguläre 120-Zell*, welches von 120 regulären zu je 4 in einer der 600 Ecken zusammenstossenden Pentagondodekaedern begrenzt wird, *um*geschrieben. Umgekehrt ist dem regulären Gewebe, dessen Eckpunkte die 600 Punkte $\mathfrak{d}$ sind und welches dem ersteren conjugirt ist, das 120-Zell *ein-*, das 600-Zell *um*geschrieben. Diejenigen Gewebe, deren Eckpunkte die 720 Punkte $\mathfrak{h}$ oder die 1200 Punkte $\mathfrak{i}$ sind, ergeben die festen *gleicheckigen* (und gleich*zelligen*) Vielräume dieser Gruppe.*)

Die *orthogonalen* Coordinaten der Eckpunkte dieser regulären Gewebe, wobei die vier Euklid'schen Räume des Coordinatensystems den Seitenflächen des Tetraeders T entsprechen, sind auch hier genau die oben aufgestellten tetraedrischen Coordinaten der Eckpunkte des dreidimensionalen Gebildes; dasselbe gilt für die Coordinaten der Euklid'schen Räume und bezüglich der Ebenen der dreidimensionalen Figur.**)

Indem wir uns vorbehalten, diese Beziehungen bei anderer Gelegenheit weiter zu verfolgen, wollen wir nur noch zum Schlusse darauf hinweisen, dass in diesen zuletzt betrachteten Geweben nicht nur die in § 10 — 8) untersuchten Gewebe, denen bez. das reguläre *Acht-*, *Sechszehn-* und *Vierundzwanzig-*Zell entspricht, sondern auch dasjenige reguläre Gewebe, welchem das einfachste linear begrenzte reguläre Gebilde des vierdimensionalen Raums, nämlich das *reguläre Fünfzell* und die aus ihm resultirenden gleicheckigen und gleichzelligen Vielräume entsprechen, in einfacher Weise enthalten sind.

Marburg i. H., im August 1886.

*) Vgl. des Verf. Abhandlung: „Ueber die regulären Polytope höherer Art."

**) Vgl. auch Puchta. Sitzungsber. der kaiserl. Akadem. der Wissensch. zu Wien. Mai- und Juni-Heft 1884.

Ueber gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel bei collinearen Räumen.

Von

Rud. Sturm in Münster i./W.

1. Die Untersuchung entsprechender gleicher Punktreihen und Strahlenbüschel bei zwei collinearen Feldern und entsprechender gleicher Ebenen- und Strahlenbüschel bei zwei collinearen Bündeln, welche Herr Schröter in den §§ 42, 44, 45 seines Buches über die Oberflächen 2. Ordnung und Raumcurven 3. Ordnung vorgenommen hat, hat mich veranlasst, die analoge Frage für zwei collineare Räume in Angriff zu nehmen.

Es handelt sich also darum, *in einem der beiden collinearen Räume die Congruenzen der Geraden p, e zu ermitteln, deren Punktreihen, bez. Ebenenbüschel mit den entsprechenden Punktreihen oder Ebenenbüscheln gleich sind, und das Nullsystem der Scheitel O und Ebenen ω der Strahlenbüschel zu beschreiben, welche mit ihren entsprechenden gleich sind.*

2. Beginnen wir mit den *gleichen Punktreihen.* Es sei φ die Fluchtebene des ersten der beiden collinearen Räume Σ, Σ', ferner f ihre unendlich ferne Gerade, die einzige unendlich ferne Gerade von Σ, der eine eben solche in Σ' entspricht. Es erhellt, dass *alle Geraden p in Σ die Gerade f treffen müssen.*

Ist ξ eine nicht zu φ parallele Ebene von Σ, ξ' ihre entsprechende, so haben die beiden collinearen Felder in ξ, ξ' zwei stets reelle Paare entsprechender Geraden mit gleichen Punktreihen, die in ξ befindlichen sind parallel zu $\varphi\xi$ und zu beiden Seiten gleich weit von ihr entfernt*). Nehmen wir ξ überdies senkrecht zu φ, so sehen wir, dass *die Congruenz der Geraden p vom Feldgrade* (*Classe*) 2 *und symmetrisch in Bezug auf φ ist.*

Die durch einen Punkt X gehenden Geraden p liegen in der Parallelebene π durch X zu φ; π und die entsprechende Ebene π' tragen affine Felder, also haben wir in π einfach unendlich viele Geraden p,

*) Schröter, a. a. O. S. 366.

welche 2 Büschel um zwei reelle oder imaginäre Punkte auf f bilden*), und durch X also zwei Gerade p, so dass *der Bündelgrad* (*Ordnung*) *der Congruenz der Geraden p ebenfalls* 2 *ist.* In den Ebenen π giebt es 2 zu einander senkrechte Richtungen s, t, deren entsprechende Richtungen s', t' wieder zu einander senkrecht sind. Die Richtungen nach den Scheiteln jener Büschel von Geraden p sind zu diesen Richtungen harmonisch; und so entsteht auf f eine Involution von Punktepaaren derartig, dass jeden zwei zu φ parallelen und von ihr gleichweit entfernten Ebenen π ein Punktepaar dieser Involution zugeordnet ist. Die Ebenenpaare π bilden ebenfalls eine Involution um f, mit φ und der unendlich fernen Ebene als Doppelebenen. *Die Congruenz der Geraden p entsteht durch zwei projective Involutionen von Punkten, bez. Ebenen, die den nämlichen Träger f haben; jeder Strahlenbüschel, dessen Scheitel und Ebene zu entsprechenden Paaren dieser Involutionen gehören, befindet sich in der Congruenz* (2, 2).

3. Einem reellen Punktepaare der einen Involution entspricht stets ein reelles Ebenenpaar der anderen, aber nicht umgekehrt. Es sei u eine φ schneidende Gerade, u' ihre entsprechende; wir bewegen π parallel zu φ, also π' parallel zur Fluchtebene von Σ'; durch $U \equiv u\pi$ seien in π die zu einander senkrechten Geraden s, t gezogen, deren entsprechende s', t' ebenfalls senkrecht sind; wir tragen auf s', t' vom Schnittpunkte U' aus die Strecken $U'S'$, $U'T'$ gleich der Längeneinheit auf, S, T seien S', T' entsprechend; S', T' bewegen sich auf zwei Parallelen zu u', demnach S, T auf zwei Geraden, die mit u in einem Punkte von φ zusammenlaufen.

Wir gehen mit π (und ihrer symmetrischen Ebene) von φ aus; zunächst sind US, UT beide kleiner als 1, da sie mit 0 beginnen; folglich enthalten die betreffenden Ebenen π noch keine reellen Geraden p; denn dazu ist nothwendig, dass eine der beiden Strecken US, UT grösser, die andere kleiner als die Längeneinheit sei**). Für π_s werde $US = 1$, während UT noch < 1 sei; die beiden Geraden p durch jeden Punkt von π_s vereinigen sich in die Gerade von der s-Richtung; der Ebene π_s und ihrer symmetrischen entspricht der unendlich ferne Punkt der s-Richtung, der eine Doppelpunkt der Punktinvolution auf f. So lange nun $US > 1$, aber $UT < 1$, haben die Ebenen π 2 reelle Büschel von Geraden p, bis zu den beiden Ebenen π_t, bei denen auch $UT = 1$ geworden ist: ihnen entspricht der andere Doppelpunkt. Weiterhin enthalten die Ebenen π keine reellen Geraden p.

---

*) Schröter, a. a. O. S. 418.

**) Vergl. Journ. für Math. Bd. 99, S. 318; dort bitte ich, auf S. 319 in der Formel für λ^2 den Factor $\frac{s^2}{t^2}$, der freilich für den Beweis ohne Bedeutung ist, hinzuzufügen.

Die reellen Geraden p befinden sich demnach zu beiden Seiten von φ innerhalb zweier Parallelebenen π_s, π_t zu φ.

Da bei der Bewegung von π_s nach π_t die beiden von U kommenden Geraden p von s nach t sich bewegen, die eine in dem einen, die andere in dem andern Winkel st, so ergeben sich nach und nach alle Richtungen der Parallelebenen π und jedes reelle Punktepaar der Involution auf f gehört zu einem reellen Ebenenpaare derjenigen um f.

Die Brennfläche dieser speciellen Congruenz (2, 2) besteht als Punktfläche aus den beiden reellen Ebenenpaaren der π_s und der π_t, als Ebenenfläche aus den 4 imaginären Bündeln um die Punkte der beiden Punktepaare, die den beiden Doppelebenen der Ebeneninvolution — der Ebene φ und der unendlich fernen Ebene — entsprechen.

4. Zwei in derselben Ebene befindliche gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel erzeugen einen Kreis, also gehen nach jedem der beiden unendlich fernen Kreispunkte I, J entsprechende Strahlen.

Zwei ungleichlaufende gleiche Strahlenbüschel derselben Ebene rufen auf der unendlich fernen Geraden eine Involution hervor; denn wenn die Strahlen x, y' parallel sind, so sind es auch x', y. Doppelpunkte derselben sind die unendlich fernen Punkte der parallelen entsprechenden Strahlen, also bilden auch I, J ein Paar, weil jene Punkte zu auf einander senkrechten Richtungen gehören; den Strahlen des einen Büschels, die nach I, J gehen, entsprechen demnach die Strahlen im andern nach J, I. Bei der Umklappung einer Ebene vertauschen sich I und J.

Auch die Umkehrungen sind richtig; eines Beweises bedarf nur die des zweiten Satzes. Wenn bei zwei projectiven Strahlenbüscheln S, S' den Strahlen SI, SJ des einen die Strahlen SJ, SI des andern entsprechen, so entsteht auf der unendlich fernen Geraden eine hyperbolische Involution, in der I, J ein Paar bilden; die beiden Büschel haben zwei Paare reeller paralleler entsprechender Strahlen in zu einander senkrechten Richtungen m, m'; n, n'. Ist $X \equiv Y'$, $X' \equiv Y$ ein beliebiges Paar der Involution, so sind m, n zu SX, SY harmonisch und halbiren deren Winkel, ebenso m', n' die von $S'X'$, $S'Y'$; da nun $m \parallel m'$, $SX \parallel S'Y'$, so ist $\angle(m, SX) = (m', S'Y') = -(m', S'X')$; womit bewiesen ist, dass die Büschel gleich, aber ungleichlaufend sind.

Bei jeder Bewegung bleibt der unendlich ferne Kreis fest, also bleibt die Incidenz einer Geraden mit demselben erhalten.

Zwei beliebig im Raume gelegene projective Strahlenbüschel sind demnach gleich, wenn den Strahlen des einen, welche den unendlich fernen Kugelkreis treffen, die Strahlen des andern entsprechen, die dasselbe thun.

5. Der unendlich ferne Punkt der Axe eines Ebenenbüschels und die unendlich ferne Gerade einer ihn rechtwinklig durchschneidenden

Ebene sind polar in Bezug auf den Kugelkreis. Zwei gleiche Ebenenbüschel werden von sie bez. rechtwinklig durchschneidenden Ebenen in gleichen Strahlenbüscheln geschnitten. Hieraus schliessen wir, dass *bei zwei gleichen Ebenenbüscheln den Ebenen des einen, welche den Kugelkreis tangiren, die Ebenen des andern entsprechen, die dasselbe thun; und umgekehrt, wenn dies bei zwei projectiven Ebenenbüscheln geschieht, so sind sie gleich.*

6. Es sei $C^2 \equiv K'^2$ der unendlich ferne Kugelkreis und also K^2 der ihm, insofern er zu Σ' gehört, in Σ entsprechende Kegelschnitt; beide in reellen Ebenen gelegen, K^2 in φ, und mit einem reellen Polarsysteme versehen; ferner sei Δ_4 die Developpable 4. Classe, welche C^2 und K^2 umgeschrieben ist. Die Schnittlinien von je zwei Tangentialebenen dieser Developpablen sind die Geraden e von Σ, deren Ebenenbüschel mit den entsprechenden in Σ' gleich sind; denn die beiden Tangentialebenen von Δ_4 tangiren selbst C^2, und weil sie K^2 tangiren, so berühren die entsprechenden in Σ' auch den Kugelkreis K'^2.

Die Congruenz der Geraden e ist also dual zu der Doppelsecantencongruenz der Raumcurve 4ter Ordnung erster Art, also *vom Bündelgrad* 6, *vom Feldgrad* 2. Die Developpable Δ_4 ist reell-imaginär (ihre Gleichung reell), sie erhält aus jedem reellen Punkte X des Raumes 2 Paare conjugirt imaginärer Tangentialebenen, die gemeinsamen Berührungsebenen der beiden reell-imaginären Kegel 2. Grades XC^2, XK^2; also sind 2 *von den* 6 *Schnittlinien oder Strahlen der Congruenz reell, die* 4 *übrigen imaginär;* sie liegen zu je zwei in den 3 Seitenflächen des gemeinsamen Polardreikants von XC^2, XK^2, das als Polardreikant des ersteren dieser beiden Kegel dreirechtwinklig ist, die beiden reellen in einer Seitenfläche. Diesem Polardreikant entspricht das ebenfalls dreirechtwinklige gemeinsame Polardreikant von $X'C'^2$, $X'K'^2$. Man vergleiche die auf andere Weise gefundenen Sätze des Herrn Schröter (a. a. O. S. 392) über collineare Bündel.

7. In einer Ebene befinden sich 2 Gerade e. Dieselben können sowohl reell als imaginär sein. Die beiden Kegelschnitte C^2, K^2 constituiren, als Flächen 2. Classe, eine Schaar confocaler Flächen 2. Grades, für welche K^2 die imaginäre Focalcurve ist. Seien E^2, H^2 die beiden reellen, so haben dieselben bekanntlich solche gegenseitige Lage, dass es nur Ebenen giebt, welche beide reell schneiden, oder die eine reell, die andere imaginär. In den Ebenen der ersteren Art sind die beiden Geraden e reell, in denen der letzteren imaginär; denn in einem Büschel von Flächen 2. Ordnung mit imaginärer Grundcurve, von dessen Kegeln immer zwei reell und zwei reell-imaginär sind*),

*) Cremona, Journ. f. Math. Bd. 68, S. 124.

liegen die beiden reellen Kegel so, dass jeder innere Punkt des einen ein äusserer des andern ist; durch einen solchen Punkt geht eine Fläche des Büschels ohne reelle Geraden, durch einen Punkt hingegen, der ausserhalb beider Kegel liegt, ein Hyperboloid mit einem Fache*).

8. Den Feldgrad 2 der Congruenz der Geraden e erhält man auch auf folgende Weise. Es seien ξ, ξ' zwei entsprechende Ebenen, N_ξ, $N_{\xi'}'$ die unendlich fernen Punkte der auf ihnen bez. normalen Geraden, N_ξ', $N_{\xi'}$ die ihnen entsprechenden Punkte. Eine zu ξ senkrechte Ebene, deren entsprechende zu ξ' senkrecht ist, muss durch $n \equiv N_\xi N_{\xi'}$ und die entsprechende durch $n' \equiv N_\xi' N_{\xi'}'$ gehen. Alle Ebenen, welche mit ξ den Winkel $\alpha \left(\gtrless \frac{\pi}{2}\right)$ bilden, umhüllen einen gewissen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ in der unendlich fernen Ebene; die Ebene ξ' führt zu einem ebensolchen Kegelschnitte $\mathfrak{L}'^2$, dem der Kegelschnitt $\mathfrak{L}^2$ in φ entspricht. Die Ebenen also, welche mit ξ den Winkel α und derer entsprechende ihn mit ξ' bilden, umhüllen die $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ umgeschriebene Developpable. Sei x eine Gerade, die vom Punkte ξn tangential an die Schnittcurve 4. Classe dieser Developpablen mit ξ kommt, η die durch x gehende zu ξ normale Ebene, ζ die eine durch x gehende Ebene, welche den Winkel α mit ξ bildet; so bilden auch η' und ζ' mit ξ' die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und α und die beiden Büschel um x, x' sind gleich. Diesen Schluss können wir machen, weil das eine Paar gleicher Winkel rechte sind; denn bei zwei beliebigen projectiven Ebenenbüscheln hat man zwei Systeme entsprechender gleicher Winkel und jedes Paar entsprechender Ebenen gehört zu 2 Paaren entsprechender gleicher Winkel; das Paar entsprechender rechter Winkel $\sigma\tau$, $\sigma'\tau'$ gehört zu beiden Systemen; d. h. zu σ, σ' oder τ, τ' giebt es nur ein Paar entsprechender Ebenen τ, τ' oder σ, σ', sodass $\sphericalangle\, \sigma\tau = \sigma'\tau'$ ist**).

Ist nun η_1 die zweite Ebene durch x, welche mit ξ den Winkel α bildet, so ist auch $\sphericalangle\, \eta_1'\xi' = \alpha$; folglich ist x Doppeltangente jener Curve 4[ter] Classe, und die 4 von ξn an sie kommenden Tangenten sind 2 Doppeltangenten.

Die Brennfläche unserer Congruenz (6, 2) ist die oben besprochene Developpable Δ_1.

9. *Die Strahlenbüschel (O, ω) von Σ, welche mit ihren entsprechenden in Σ' gleich sind, bewirken ein höheres Nullsystem. Wir haben die 3 Charakteristiken desselben aufzusuchen, erstens die Anzahl α der Ebenen ω, die zu jedem O gehören, zweitens die Anzahl β der Punkte O, die zu jedem ω gehören, und drittens die Anzahl γ der Strahlenbüschel (O, ω), zu denen ein gegebener Strahl l gehört.*

---

*) Cremona a. a. O. und Sturm, Flächen 3. Ordnung, S. 309.

**) Schröter, a. a. O. § 3.

Die Zahl α hat schon Herr Schröter a. a. O. S. 392 gefunden; es giebt in jedem Bündel O 6 Strahlenbüschel, die mit ihren entsprechenden in einem collinearen Bündel O' gleich sind; die Ebenen gehen zu je zweien durch dieselbe Kante des dreirechtwinkligen Dreikants von O, dessen entsprechendes ebenfalls dreirechtwinklig ist; zwei durch dieselbe Kante gehende sind reell, die übrigen imaginär, und zwar liegt jene Kante derjenigen Seitenfläche des Dreikants gegenüber, in der sich die von O ausgehenden reellen Geraden e befinden (Nr. 6).

Nach Nr. 5 aber sind die 6 Ebenen nichts anderes als die 6 Verbindungsebenen der 4 Schnittkanten der beiden Kegel OC^2, OK^2; woraus die obigen und auch die von Herrn Schröter angegebenen Winkel-Eigenschaften folgen.

10. Ist ω gegeben, so haben wir 4 Schnittpunkte C_1, C_2, K_1, K_2 mit C^2, K^2. *Die Begegnungspunkte* $O_1 \equiv (C_1K_1, C_2K_2)$, $O_2 \equiv (C_1K_2, C_2K_1)$ *sind die beiden zu* ω *gehörigen Punkte* O*; sie sind beide reell*, denn sie sind Schnittpunkte conjugirt imaginärer Geraden.

Doch dies ist bekannt, denn zwei collineare Felder ω, ω' haben stets zwei reelle Paare entsprechender gleicher Strahlenbüschel*).

11. Um die dritte Charakteristik γ**) des Nullsystems zu erhalten, drehen wir um eine Gerade l eine Ebene ω und ermitteln die Ordnung der Curve der Punkte O_1, O_2. Jede der Ebenen des Büschels giebt 2 Paare von sich schneidenden Geraden, und auf dieses einfach unendliche System wenden wir Schubert's Strahlenpaar-Formel erster Dimension***) (mit Unterdrückung des gemeinsamen Factors σ) an:

$$g + h - p - e = \varepsilon .$$

In unsern Strahlenpaaren ergeben sich die beiden Geraden gleichartig; deshalb ist $g = h$ gleich der Zahl der Strahlenpaare, bei denen eine Gerade einer gegebenen Geraden begegnet, offenbar 8, da alle Geraden, welche l, C^2, K^2 treffen, eine Fläche 8. Grades erzeugen; ferner e, p sind die doppelten Zahlen der Strahlenpaare, bei denen die Ebene durch einen gegebenen Punkt geht, bez. der Schnittpunkt auf eine gegebene Ebene fällt, die doppelten, weil eben jeder der beiden Strahlen als Strahl g oder h aufgefasst werden kann. Daher ist $e = 2 \cdot 2$, p aber ist die doppelte gesuchte Ordnung. Da es keine Ebene durch l giebt, welche C^2 und K^2 zugleich tangirt, so ist $\varepsilon = 0$; demnach ist die Ordnung $\frac{1}{2}(8 + 8 - 2 \cdot 2) = 6$. Also hat die Curve mit l

---

*) Schröter, a. a. O. S. 367.

**) Modul von Herrn Ameseder genannt (Journ. f. Math. Bd. 97, S. 62).

***) Calcül der abzählenden Geometrie S. 60, F. 21); hinsichtlich der 3 Charakteristiken eines Nullsystems oder Systems 3. Stufe von Strahlenbüscheln: p^3, e^3, $\widehat{pe}$ sehe man S. 300.

vier Punkte gemein. *Es giebt vier Strahlenbüschel* (O, ω), *zu denen* l *gehört.*

Man kann auch auf l eine Punktcorrespondenz $[4, 4]$ herstellen, in der 2 Punkte sich entsprechen, von denen nach C^2, K^2 Treffgeraden ausgehen, die in dieselbe Ebene durch l fallen. Sie führt zu 4 doppelt zu rechnenden Coincidenzen, den Scheiteln der 4 Strahlenbüschel.

Die 3 Charakteristiken des Nullsystems sind also: $\alpha = 6$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$.

Die obige Ordnung 6 ergiebt sich auch aus der Formel, welche Herr Cayley durch eine indirecte Methode gewonnen hat, für die Ordnung der ausser den Leitcurven und vielfachen Erzeugenden noch vorhandenen Doppelcurve einer Regelfläche mit Leitcurven von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 (in unserm Falle 2, 2, 1) *).

Während der Punkt O, *wenn* ω *einen Ebenenbüschel beschreibt, sich auf einer Curve* 6. *Ordnung bewegt, welche der Axe des Büschels viermal begegnet; umhüllt* ω, *wenn* O *eine Gerade durchläuft, eine Developpable* 10. *Classe, welche* 4 *Ebenen durch die Gerade sendet.*

12. *Bei zwei affinen Räumen* Σ, Σ' *bilden in jedem die Geraden* p, *deren Punktreihen mit den entsprechenden gleich sind, einen Complex;* in jeder Ebene zerfällt die Complexcurve in 2 Strahlenbüschel mit unendlich fernen Scheiteln. *Also treffen alle Complexstrahlen einen gewissen in der unendlich entfernten Ebene gelegenen Kegelschnitt* E^2.

Wir schlagen um einen beliebigen Punkt O' von Σ' eine Kugel S'; ihr entspricht um O als Mittelpunkt ein Ellipsoid S, dessen Axen die Kanten des dreirechtwinkligen Dreikants aus O sind, dessen entsprechendes ebenfalls dreirechtwinklig ist. Schneiden wir S mit der ihm concentrischen mit S' gleichen Kugel S_1, so ist der Kegel, welcher aus O die Schnittcurve SS_1 projicirt, *der Kegel des Complexes aus* O. Der Leitkegelschnitt E^2 gehört also zu dem Büschel der beiden Kegelschnitte C^2, K^2, denn S geht durch K^2. Dieser Kegelschnitt E^2 und der Complex brauchen nicht reell zu sein.

Ist (r, s, t), (r', s', t') *irgend eins der* ∞^3 *Paare entsprechender und gleichzeitig dreirechtwinkliger Dreikante, und sind* ϱ, σ, τ *die (absoluten) Verhältnisse entsprechender Strecken auf* r, r'; s, s'; t, t'; *so ist zur Realität des Complexes erforderlich, dass nicht alle drei Verhältnisse grösser oder alle drei kleiner als* 1 *sind.*

Münster, Juli 1886.

---

*) Salmon-Fiedler, anal. Geometrie des Raumes Bd. II, 3. Auflage, Nr. 240.

Zur Theorie der Collineation und Correlation.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Ich erlaube mir, im Folgenden einige Nachträge zu meinen Untersuchungen über Collineation und Correlation mitzutheilen.

I.

1. *Jede räumliche Correlation* führt bekanntlich zu zwei Kernflächen; die eine, die Punktkernfläche F^2, ist der Ort der Punkte des ersten Raums, die in ihre entsprechenden Ebenen im zweiten Raume fallen; dieselben Punkte incidiren dann auch als Punkte des zweiten Raums mit ihren entsprechenden Ebenen im ersten. Diese in beiderlei Sinne genommenen Polarebenen der Punkte von F^2 umhüllen die zweite Kernfläche, die Ebenenkernfläche Φ_2.

Die Strahlen führen zu einem analogen Gebilde, einem Complexe 2. Grades, den man also *den Kerncomplex der räumlichen Correlation* nennen kann. Da den Strahlen eines Büschels des einen Raums die Strahlen eines Büschels im andern polar sind, so erkennt man unmittelbar, dass es in jedem Büschel des einen Raums zwei Gerade giebt, welche ihre polare Gerade im andern treffen. *Die Geraden jedes der beiden Räume, welche mit ihren polaren incidiren, erzeugen einen Complex 2. Grades.*

Der Schnittpunkt zweier polaren Geraden a, a', die sich begegnen, ist ersichtlich ein Punkt von F^2, ihre Ebene eine Tangentialebene von Φ_2.

Sei $A \equiv B'$ ein Punkt von F^2, A', B seien seine beiden Polarebenen; sowohl die Strahlen des Büschels (B, B'), als die des Büschels (A, A') treffen, insofern sie zum ersten Raume gerechnet werden, ihre entsprechenden Geraden im zweiten, denn sie sind mit B', bez. A' incident; aber ebenso sind die Strahlen derselben beiden Büschel, zum zweiten Raume gerechnet, mit ihren entsprechenden im ersten Raume incident. Daraus ergeben sich die Resultate:

Für die Punkte der Punktkernfläche zerfällt der Complexkegel, und zwar in dem einen Raume in dieselben beiden Strahlbüschel wie im andern Raume.

Folglich ist der Kerncomplex für beide Räume derselbe. Er entsteht also durch die Strahlbüschel um die Punkte der Punktkernfläche je in den beiden zugehörigen Polarebenen oder, wie es die Dualität erfordert, durch die Strahlbüschel in den Tangentialebenen der Ebenenkernfläche je um die beiden zugehörigen Pole.

Die beiden Kernflächen bilden also seine Singularitätenfläche.

2. Folglich muss auch jeder Punkt von Φ_2, jede Berührungsebene von F^2 zu zwei Strahlbüscheln des Complexes führen. Es sei $C \equiv D'$ ein Punkt von Φ_2, Γ', Δ seien seine beiden Polarebenen, welche F^2 tangiren, da F^2 und Φ_2 sich in beiderlei Sinne in der Correlation entsprechen; $l \equiv m'$, $n \equiv q'$ seien die beiden Geraden von Φ_2, die sich in $C \equiv D'$ schneiden; die ihnen in dem einen Sinn polaren Geraden l', n' werden durch Γ', die im andern Sinne polaren m, q durch Δ aus F^2 geschnitten. Eine beliebige Ebene durch $l \equiv m'$ geht, als Berührungsebene von Φ_2, durch ihre beiden auf l', bez. m gelegenen Pole; folglich trifft der in ihr aus $C \equiv D'$ nach dem einen oder andern dieser Pole gezogene Strahl in demselben den polaren Strahl und gehört deshalb zum Kerncomplexe. Zu Aehnlichem führt jede Ebene durch $m \equiv q'$. Der Complexkegel also aus dem Punkte $C \equiv D'$ von Φ_2 zerfällt in die beiden Strahlbüschel in den Ebenen, die von diesem Punkte nach l' und q, bez. nach n' und m gehen. Ebenso sind die Scheitel der beiden Büschel in einer Tangentialebene von F^2 die beiden Spuren der vier Geraden, die den von ihr aus F^2 ausgeschnittenen Geraden polar sind*).

Ist die Correlation eine Polarcorrelation (Polarsystem), so wird der Kerncomplex der Tangentencomplex der Basisfläche; im Falle des Nullsystems aber wird er durch den doppelt gerechneten zugehörigen linearen Complex dargestellt, und es ergiebt sich so ein Unterschied mit den Kernflächen, die sich ja im Falle des Nullsystems auf den ganzen Raum ausdehnen. —

3. Sei $ABCD$ das Hauptvierseit der Correlation, d. h. das Vierseit, in dem sich die beiden Kernflächen durchschneiden, und werden die Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC zu Coordinatenebenen

---

*) Ich hatte diese mir schon längere Zeit bekannten Sätze eben niedergeschrieben, als ich Kenntniss erhielt von der Schrift des Herrn Dom. Montesano: La corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio (Napoli 1885), in der der Kerncomplex und das Zerfallen seiner Singularitätenfläche in die beiden Kernflächen, sowie andere interessante Eigenschaften desselben gefunden sind. Ich unterdrücke meine Mittheilung nicht, weil jene Schrift doch in Deutschland weniger bekannt sein dürfte.

$x_1 = 0, \cdots, x_4 = 0$ gewählt; so ist die Beziehung zwischen conjugirten Punkten x_i, y_i der beiden Räume:

$$a_{13} x_1 y_3 + a_{24} x_2 y_4 + a_{31} x_3 y_1 + a_{42} x_4 y_2 = 0;$$

die Gleichung des Kerncomplexes ist:

$$(a_{13} a_{42} + a_{31} a_{24}) p_{14} p_{23} - (a_{31} a_{42} + a_{13} a_{24}) p_{12} p_{34} + a_{13} a_{31} p_{31}^2 + a_{24} a_{42} p_{24}^2 = 0.$$

Für $a_{31} = a_{13}$, $a_{42} = a_{24}$ (Polarsystem) ergiebt sich:

$$2 a_{13} a_{24} (p_{14} p_{23} - p_{12} p_{34}) + a_{13}^2 p_{31}^2 + a_{24}^2 p_{24}^2 = 0,$$

d. i. die Bedingungsgleichung für p_{ik}, damit sie die Basisfläche

$$a_{13} x_1 x_3 + a_{24} x_2 x_4 = 0$$

berühre.

Ist aber $a_{31} = - a_{13}$, $a_{42} = - a_{24}$ (Nullsystem), so erhält man:

$$2 a_{13} a_{24} (p_{14} p_{13} + p_{12} p_{34}) + a_{13}^2 p_{31}^2 + a_{24}^2 p_{24}^2 = 0,$$

oder:

$$(a_{13} p_{31} - a_{24} p_{24})^2 = 0;$$

$a_{13} p_{31} - a_{24} p_{24} = 0$ ist aber der dem Nullsysteme zugehörige lineare Complex.

II.

4. *Es giebt drei ausgezeichnete lineare Systeme von Flächen 2. Grades bez. 1., 2., 3. Stufe, die in sich dual sind, so dass sie zugleich lineare Gewebe derselben Stufe sind.*

Dasjenige dritter Stufe ist dadurch definirt, dass zweimal Pol und und Polarebene P und Π, P' und Π' für seine Flächen gegeben sind; ich habe an anderer Stelle*) bewiesen, dass die sämmtlichen Flächen desselben sich in 2 festen Punkten tangiren.

Das System 1. Stufe, das zugleich Büschel und Schaar ist, ist dadurch definirt, dass zwei Paare Polaren p und p', q und q' für seine Flächen gegeben sind. Herr Cayley hat es in einer kurzen Note**) besprochen. Nach einem Satze, den Herr Cayley als ihm von Herrn Klein mitgetheilt bezeichnet, sind auch die beiden Treffgeraden r, r' von p, p', q, q' Polaren in Bezug auf alle Flächen des Systems und diese gehen durch das windschiefe Vierseit, das die Doppelpunkte der beiden Involutionen zu Gegenecken hat, welche auf r, r' durch die beiden Schnittpunktenpaare mit p, p'; q, q' constituirt werden.

5. Dagegen scheint *das System 2. Stufe, das zugleich Netz und Schaarschaar (oder Gewebe im engern Sinne) ist und für dessen Flächen Pol und Polarebene P und Π und zwei Polaren p und p' gegeben sind,* noch nicht behandelt. Dieses Netz-Gewebe ist dasjenige, das sich mir

*) Math. Ann. Bd. 19, S. 483.

**) Quarterly Journal of Mathematics. Bd. XV, S. 124.

ergab, als ich kürzlich die Transformation einer Fläche 2. Grades in sich selbst durch Collineation auf die zweite Art untersuchte*).

Wir ziehen die durch P gehende Gerade, welche p und p' trifft; die Treffpunkte seien G, H und der mit Π sei Q. Die Involution: P, Q; G, H habe die Doppelpunkte A, C; die Schnittpunkte von p, p' mit Π seien B, D. Wenn nun E, F irgend zwei zu B, D harmonische Punkte sind, dann hat jede Fläche 2. Grades, die durch das Vierseit $AECF$ geht, sowohl P und Π zu Pol und Polarebene, als auch p, p' oder BG und DH zu Polaren. Denn die Diagonalen AC und EF des Vierseits sind Polaren für die Fläche, also geht die Polarebene des auf AC gelegenen Punktes P durch $EF \equiv BD$, sodann aber auch durch Q; folglich ist sie mit Π identisch. Ferner sind auf p, p' die Punkte G, H zu A, C und die Punkte B, D zu E, F harmonisch; also sind jene wie diese conjugirt in Bezug auf die Fläche; die Polarebenen der Punkte G, H gehen, weil diese auf AC liegen, durch $BD \equiv EF$; also ist auch G zu D, H zu B conjugirt; woraus folgt, dass $p \equiv GB$ und $p' \equiv HD$ Polaren sind.

Bewegt man das Paar E, F durch die Involution BB, DD, so erhält man sämmtliche verlangten Flächen. Jeder der beiden Punkte A, C repräsentirt 4 Grundpunkte des Netzes, jede der beiden Ebenen BDA, BDC 4 gemeinsame Berührungsebenen der Schaarschaar. Die Grundcurve des Büschels, der aus dem Netze durch den Punkt X ausgesondert wird, erhält man so: X' sei harmonisch zu X in Bezug auf B und die Ebene ACD; die Grundcurve besteht aus den beiden Kegelschnitten in den Ebenen ACX, ACX', welche in A und C die Ebenen ABD, CBD tangiren und durch X, bez. X' gehen.

III.

6. In dem eben erwähnten Aufsatze in Bd. 26 der Annalen ist in Nr. 34, 35 gezeigt worden, dass, wenn durch eine Collineation eine cubische Raumcurve in sich selbst transformirt wird, das Haupttetraeder (sich selbst entsprechende Tetraeder) der Collineation ein Schmiegungstetraeder (Nr. 31 a. a. O.) der Curve ist, und alle cubischen Raumcurven, die es in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben, auch in sich selbst übergehen.

Betrachten wir also den Bündel von cubischen Raumcurven, welche ein Tetraeder $ABCD$ *so zum Schmiegungstetraeder haben, dass* A, C *Punkte der Curve,* AB, CD *ihre Tangenten und also* ABD, CDB *ihre Schmiegungsebenen sind.* X, X' seien zwei unendlich nahe Punkte einer Curve dieses Bündels; wir bestimmen eine Collineation dadurch, dass $ABCD$ ihr Haupttetraeder ist und X, X' sich entsprechen. Diese

*) Math. Ann. Bd. 26, S. 465, Theil I, Abschnitt III.

infinitesimale Collineation transformirt jene Curve in sich, da durch das Schmiegungstetraeder mit der obigen genaueren Festsetzung und durch einen Punkt eine Curve des Bündels eindeutig bestimmt ist; folglich transformirt sie alle Curven des Bündels in sich, und zwar so, dass entsprechende Punkte je auf derselben Curve unendlich nahe sind. *Der Complex der Tangenten des Curvenbündels ist* demnach der Complex der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier collinearer Räume, also *ein tetraedraler Complex.*

7. *Der constante Werth des Doppelverhältnisses $x(ACBD)$, das irgend eine Tangente x einer Curve des Bündels mit den Ecken des gemeinsamen Schmiegungstetraeders bildet, ist* $\frac{1}{4}$. Ich habe a. a. O. Nr. 40 gezeigt, dass die Tangente x zwei Gerade CB_1, AD_1 trifft, deren Punkte B_1, D_1 in folgender Weise construirt werden: Man schneide, wenn X der Berührungspunkt von x ist, die Ebene ACX mit BD in Z; so ist B_1 harmonisch zu B in Bezug auf D und Z, D_1 harmonisch zu D in Bezug auf B und Z.

Es ist demnach

$$x(ACBD) = (D_1 B_1 BD);$$

aus:

$$(BB_1 DZ) = -1, \quad (DD_1 BZ) = -1$$

oder:

$$(BDB_1 Z) = 2, \quad (DBD_1 Z) = 2$$

folgt:

$$(BDB_1 D_1) = 4$$

oder:

$$(D_1 B_1 BD) = \frac{1}{4}.$$

Wir können dies auch als Resultat für eine einzige cubische Raumcurve aussprechen:

Ist $ABCD$ ein Schmiegungstetraeder einer cubischen Raumcurve und zwar so, dass A, C die Punkte der Curve, AB, CD deren Tangenten sind, so umfasst jede Tangente der Curve mit den 4 *Ecken A, C, B, D einen Wurf vom Doppelverhältnisse* $\frac{1}{4}$.

IV.

8. Wir betrachten *zwei collineare Räume Σ, Σ'.* Dieselben induciren bekanntlich*) einen tetraedralen Complex, für den das Haupttetraeder (sich selbst entsprechende Tetraeder) das zugehörige ist. Jeder seiner Strahlen ist Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen, Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte der beiden Räume und trifft, man mag ihn zu Σ oder Σ' rechnen, seine entsprechende Gerade im andern Raume. *In diesem Complexe befinden sich zwei zu einander*

*) Reye, Geometrie der Lage, Abth. II, 18. Vortrag der 2. Aufl.

duale Systeme 4. Stufe von Regelschaaren: die einen rühren von den projectiven Ebenenbüscheln um entsprechende Geraden, die andern von den projectiven Punktreihen auf entsprechenden Geraden her. Wir wollen das vierstufige System der Trägerflächen der ersteren hinsichtlich seiner Charakteristiken untersuchen.

Herr Reye beweist a. a. O., dass ein tetraedraler Complex nicht blos aus einer, sondern aus ∞^2 räumlichen Collineationen sich ergiebt; wir dürfen nur durch irgend einen Complexstrahl zwei Ebenen α, α' legen; durch sie als entsprechende Ebenen und durch das Haupttetraeder als das sich selbst entsprechende ist eine Collineation eindeutig bestimmt, und der gegebene tetraedrale Complex, der ja durch das Tetraeder und einen Strahl ebenfalls eindeutig bestimmt ist, gehört zu ihr. Aber alle diese doppelt unendlich vielen Collineationen führen, wie zu demselben Complex, so auch zu denselben zwei vierstufigen Flächensystemen. Denn jede Fläche z. B. des ersten Systems geht durch die Ecken des Haupttetraeders; und irgend zwei Strahlen des Complexes liegen mit den Ecken, weil sie mit ihnen projective Ebenenwürfe bilden, auf derselben Fläche 2. Grades und bestimmen sie eindeutig; alle übrigen Geraden der Flächen aus der nämlichen Schaar gehören ebenfalls zum Complexe; wir erhalten so aus ihm $\frac{\infty^3 \cdot \infty^3}{\infty^2} = \infty^4$ Flächen.

Die ∞^2 Paare, die man aus den Geraden der Leitschaar einer der Regelschaaren bilden kann, sind entsprechende Geraden in den ∞^2 Collineationen.

Das Flächensystem ist nicht linear; immerhin enthält es doch ∞^4 Büschel und ∞^3 Netze. Bewegen sich die erzeugenden Axen in entsprechenden Strahlbüscheln, so haben alle Flächen die Schnittlinie der Trägerebenen der beiden Büschel und die cubische Raumcurve gemein, die durch die collinearen Bündel um die beiden Scheitel entsteht. Diese Raumcurve — eine Ordnungscurve des tetraedralen Complexes nach Herrn Reye — ist allen Flächen gemein, deren erzeugende Axen die ganzen Bündel durchlaufen.

9. Es sei $P \equiv Q'$ ein beliebiger Punkt, P', Q seien die ihm entsprechenden Punkte; so sind $g \equiv PQ$ und $g' \equiv P'Q'$ zwei in ihm sich schneidende entsprechende Geraden und die einzigen. Jede zwei entsprechende Geraden l, l', welche g und g' treffen, führen zu einer durch unsern Punkt gehenden Fläche des Systems. Sind also P_1, P_2, P_3, P_4 vier beliebige Punkte, so seien g_1, g_1'; g_2, g_2'; g_3, g_3'; g_4, g_4' die je in ihnen sich schneidenden entsprechenden Geraden; l_1, l_2 seien die beiden Treffgeraden von $g_1, \ldots, g_4$; so sind die entsprechenden Geraden l_1', l_2' die Treffgeraden von $g_1', \ldots, g_4'$; l_1, l_1' und l_2, l_2' führen zu den beiden Flächen des Systems, die durch P_1, P_2, P_3, P_4 gehen. *Also ist*, wenn wir die elementaren Bedingungen: durch einen gegebenen

Punkt zu gehen, eine gegebene Gerade oder Ebene zu tangiren, in der üblichen Weise mit μ, ν, ϱ bezeichnen:

$$\mu^4 = 2.$$

Man kann dies aber sofort verallgemeinern: wenn den erzeugenden Axen auferlegt ist, in zwei entsprechenden Strahlengewinden s, s' (speciellen linearen Complexen) oder, wenn man will, in zwei entsprechenden linearen Complexen sich zu bewegen, so ist für das entstehende dreistufige Flächensystem $\mu^3 = 2$; oder allgemeiner: jede Charakteristik $\mu^h \nu^i \varrho^k (h + i + k = 3)$ für dieses System ist gleich der Charakteristik $\mu^{h+1} \nu^i \varrho^k$ für das es umfassende vierstufige.

10. Wir gehen jetzt zu der Bedingung ϱ, eine gegebene Ebene zu berühren. Die Ebenen von Σ, welche mit ihren entsprechenden in Σ' sich auf einer Ebene E schneiden, umhüllen einen Torsus 3. Classe, welcher die 4 Ebenen des Haupttetraeders tangirt; denn die durch einen beliebigen Bündel O in Σ und seinen entsprechenden in Σ' erzeugte cubische Raumcurve hat drei Sehnen in E. Also führen alle in einer Tangentialebene dieses Torsus gelegenen Geraden l und ihre entsprechenden zu Flächen des Systems, welche E tangiren. Die Zahl der Flächen des Systems, welche vier gegebene Ebenen tangiren, oder ϱ^4 ist mithin gleich der Zahl der Geraden, welche in Tangentialebenen von 4 Torsen 3. Classe liegen, die vier gemeinsame Berührungsebenen haben, oder dual, gleich der Zahl der Geraden, welche 4 cubische Raumcurven mit 4 gemeinsamen Punkten treffen*).

In gleicher Weise ergeben sich $\mu^3\varrho$, $\mu^2\varrho^2$, $\mu\varrho^3$ gleich den Zahlen der Geraden, welche 3 Gerade und eine cubische Raumcurve treffen, bez. 2, 1 Gerade und 2, 3 cubische Raumcurven mit 4 gemeinsamen Punkten treffen. *Wir erhalten also unmittelbar:*

$$\mu^3\varrho = 6,$$
$$\mu^2\varrho^2 = 14.$$

11. Die beiden andern Zahlen $\mu\varrho^3$, ϱ^4 kann man auch in der bekannten Weise ermitteln, wobei freilich die gemeinsamen Punkte die Abzählung etwas erschweren. Ich will lieber zeigen, wie man durch eine eindeutige Transformation die beiden Fragen mit früher von mir erhaltenen Sätzen in Zusammenhang bringen kann.

Wir denken einen Raum $\mathfrak{S}$ auf drei Weisen correlativ auf einen andern $\mathfrak{S}'$ bezogen; wir erhalten dann eine eindeutige Transformation, bei welcher jedem Punkte von $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{S}'$ der Schnittpunkt der drei Polarebenen in $\mathfrak{S}'$ oder $\mathfrak{S}$ entspricht**). Wir nehmen aber an, dass

*) In diese Form hat Herr Reye die Frage in einer Correspondenz mit mir gebracht, in der er auch $\mu^4 = 2$ in der obigen Weise ermittelte.

**) Math. Ann. Bd. 19, S. 480; vergl. auch Cremona, Gött. Nachr. 1871 S. 129.

in allen drei Correlationen 4 festen Punkten von $\mathfrak{S}$ dieselben 4 festen Ebenen in $\mathfrak{S}'$ polar sind und also den Verbindungsebenen jener die Schnittpunkte dieser. Dann entspricht jeder Geraden, bez. jeder durch die 4 festen Punkte (Hauptpunkte) gehenden cubischen Raumcurve von $\mathfrak{S}$ eine cubische Raumcurve durch die 4 Hauptpunkte, bez. eine Gerade in $\mathfrak{S}'$.

Aus dem Satze, dass es 30 cubische Raumcurven durch 4 gegebene Punkte giebt, welche 4 gegebene Geraden treffen*), folgt, dass es 30 Gerade giebt, welche 4 gegebene cubische Raumcurven mit 4 gemeinsamen Punkten (ausserhalb derselben) treffen.

Die cubischen Raumcurven durch 4 gegebene Punkte, welche 3 gegebene Geraden treffen, erzeugen eine Fläche 30. Ordnung, auf welcher die 4 festen Punkte 17-fach sind (a. a. O. Nr. 31); folglich giebt es durch die 4 Punkte $3 \,.\, 30 - 4 \,.\, 17 = 22$ cubische Raumcurven, welche drei gegebene Geraden und eine gegebene ebenfalls durch die 4 Punkte gehende cubische Raumcurve treffen. Daraus erhält man vermöge der obigen Transformation, dass 3 cubische Raumcurven mit 4 gemeinsamen Punkten und eine Gerade von 22 Geraden zugleich getroffen werden**). *Somit haben wir:*

$$\mu\varrho^3 = 22,$$
$$\varrho^4 = 30.$$

12. Man überzeugt sich leicht, dass in dem vierstufigen Flächensysteme keine zu Kegelschnitten degenerirten Flächen enthalten sind. Also ist in jedem in ihm befindlichen einstufigen Systeme $\varphi = 0$ und demnach $\nu = 2\mu$. Damit sind wir im Stande, alle übrigen Charakteristiken zu berechnen.

Wir haben:

---

*) Journ. f. Math. Bd. 79, S. 99, Nr. 29; Schubert, abzählende Geometrie S. 172: $P^4\nu^4 = 30$ (dort steht durch Druckfehler $P^4\nu^3$).

**) Durch die Transformation erhalten wir auch einen Zusammenhang zwischen folgenden Sätzen:

1) Aus einem Punkte kommt an eine cubische Raumcurve eine Doppelsecante.

1') Durch 5 Punkte geht eine cubische Raumcurve, welche eine gegebene Gerade zweimal trifft.

2) Zwei cubische Raumcurven mit 4 gemeinsamen Punkten haben keine gemeinsame Sehne, die sie in 4 getrennten Punkten trifft; es sei denn, sie liegen auf einer Fläche 2. Grades, in welchem Falle es dann ∞^1 gemeinsame Sehnen giebt.

2') Durch 4 gegebene Punkte giebt es keine cubische Raumcurve, welche jede von zwei gegebenen Geraden zweimal trifft; es sei denn, dass die 4 Punkte und die beiden Geraden auf einer Fläche 2. Grades liegen, in welchem Falle es dann ∞^1 cubische Raumcurven giebt.

U. s. w.

$$\begin{array}{lllll}
\mu^4 = 2, & \mu^3\varrho = 6, & \mu^2\varrho^2 = 14, & \mu\varrho^3 = 22, & \varrho^4 = 30; \\
\nu\mu^3 = 4, & \nu\mu^2\varrho = 12, & \nu\mu\varrho^2 = 28, & \nu\varrho^3 = 44; & \\
\nu^2\mu^2 = 8, & \nu^2\mu\varrho = 24, & \nu^2\varrho^2 = 56; & & \\
\nu^3\mu = 16, & \nu^3\varrho = 48; & & & \\
\nu^4 = 32. & & & &
\end{array}$$

Die beiden Relationen XI, XII in Schuberts abzählender Geometrie S. 79 werden erfüllt.

13. Da es in einem Flächenbüschel 2. Ordnung zwei Flächen giebt, welche eine gegebene Gerade berühren, so bilden die Geraden des einen Raums, deren Ebenenbüschel je mit den entsprechenden Flächen erzeugen, welche eine gegebene Gerade tangiren, einen quadratischen Complex. Also sind $\nu\mu^3$, $\nu^2\mu^2$, $\nu^3\mu$, ν^4 auch die Zahlen der Geraden, die sich auf 3, 2, 1, 0 Gerade stützen und zu 1, 2, 3, 4 solchen Complexen gehören; folglich nach Plücker $2 \cdot 1^3 \cdot 2$, $2 \cdot 1^2 \cdot 2^2$, $2 \cdot 1 \cdot 2^3$, $2 \cdot 2^4$. Auch $\nu\mu^2\varrho$, $\nu^2\mu\varrho$, $\nu^3\varrho$ kann man in dieser Weise erhalten.

Münster, April 1886.

Ueber höhere räumliche Nullsysteme.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

1. Vor einigen Jahren habe ich*) auf einige *höhere räumliche Nullsysteme* hingewiesen: *Correspondenzen zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes, bei denen entsprechende Elemente durchweg incidiren.* Im Anschlusse daran hat dann Herr A. Ameseder in der Einleitung seines Aufsatzes über das allgemeine räumliche Nullsystem 2. Grades**) einige allgemeine Eigenschaften der höheren Nullsysteme besprochen. Ungefähr gleichzeitig erschienen die beiden Aufsätze des Herrn Voss über Punkt-Ebenen-Systeme.***) Herrn Voss ist es darum zu thun, die Analogie der Eigenschaften der Punkt-Ebenen-Systeme, welche in der That Nullsysteme sind, mit denen zu zeigen, welche den Gegenstand der Flächentheorie bilden. Ich beabsichtige im Folgenden nur, einige interessante Beispiele von Nullsystemen hervorzuheben und für sie ihre 3 Charakteristiken zu ermitteln.

2. *Diese drei Charakteristiken sind:*

1) *die Zahl α der Ebenen, welche einem Punkte entsprechen,*
2) *die Zahl β der Punkte, die einer Ebene entsprechen,*
3) *die Zahl γ, wie oft eine gegebene Gerade Strahl eines der ∞^3 Strahlenbüschel wird, welche durch die Punkte und zugehörigen Ebenen gebildet werden.*

Nennen wir die Strahlen dieser Strahlenbüschel Nullstrahlen des Nullsystems†); Herr Voss nennt sie, in Folge der erwähnten Analogie, die Tangenten des Punkt-Ebenen-Systems.

Bei Herrn Ameseder heissen nur α, β die Charakteristiken des Nullsystems, γ (bei ihm, wie bei Herrn Voss $n-1$) der Modul

---

*) Math. Ann. Bd. 19, S. 461 (Nr. 19, 24).

**) Journal für Mathematik Bd. 97, S. 62.

***) Math. Ann. Bd. 23, S. 45, 359.

†) Beim gemeinen Nullsysteme heissen sie gewöhnlich Leitstrahlen; diesem Worte hat Herr Ameseder beim quadratischen Nullsysteme eine andere Bedeutung gegeben.

desselben. Aber schon Herr Schubert hat bei seiner Betrachtung von Strahlenbüschelsystemen beliebiger Stufe*) die 3 Zahlen α, β, γ — in seiner symbolischen Bezeichnung p^3, e^3, $\widehat{pe}$ — als die drei Charakteristiken des dreistufigen Systems eingeführt; jedes Nullsystem ist ein solches. Sie treten in der Charakteristikenformel für die Anzahl der gemeinsamen Strahlenbüschel eines drei- und eines zweistufigen Systems (Formel 4, S. 300) ganz gleichartig auf.

$\alpha + \gamma$ ist die Ordnung der Fläche der Nullpunkte der Ebenen eines Bündels, welche den Bündelscheitel zum α-fachen Punkte hat, oder die Classe des Torsus der Nullebenen der Punkte einer Geraden, von denen γ durch diese Gerade gehen; $\beta + \gamma$ giebt die dualen Gradzahlen.

Das gemeine Nullsystem unterscheidet sich hinsichtlich der Nullstrahlen wesentlich von den höheren. Bei ihm ist $\gamma = 0$, also eine beliebige Gerade im Allgemeinen nicht Nullstrahl; die Mächtigkeit der Nullstrahlen ist nur ∞^3; sie bilden ja den zum Nullsystem gehörigen linearen Complex; jeder von ihnen gehört aber zu ∞^1 Strahlenbüscheln. Ist $\gamma > 0$, so giebt es ∞^4 Nullstrahlen und jeder gehört zu einer endlichen Zahl von Strahlenbüscheln.

3. Die Strahlenbüschel, welche zu einem gegebenen Strahlenbüschel (S, σ) so projectiv sind, dass die Strahlen in ihnen, welche fünf gegebene Geraden treffen, fünf gegebenen Strahlen von (S, σ) entsprechen, erzeugen ein Nullsystem mit den Charakteristiken:

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = 6.$$

Man vergleiche dazu mein „Problem der ebenen Projectivität"**) Abschnitt II und Herrn Schuberts Kalkül § 30 in der Tabelle $p^3 e^2 p'^3 \zeta^5$, $p^3 e^2 \widehat{p' e'} \zeta^5$.

Oder ein Tetraeder $ABCD$ ist gegeben; zu jedem Punkte P erhält man die zugeordnete Ebene, indem man die Polarebene des Strahles PA in Bezug auf das Trieder an der Ecke A mit der Gegenebene BCD schneidet und die Schnittlinie mit P verbindet.

Die Charakteristiken des entstehenden Nullsystems findet man leicht:

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = 2.$$

Lässt man BCD sich ins Unendliche entfernen, so ist jeder Punkt P Schwerpunkt des Schnitts seiner Nullebene mit dem genannten Trieder. Demnach bilden die Schwerpunkte der Schnitte der Ebenen eines Büschels oder Bündels eine cubische Raumcurve,***) eine cubische Fläche. Steiner's Sätze 56—62 im zweiten Aufsatze über Maximum

*) Kalkül der abzählenden Geometrie § 40.

**) Math. Ann. Bd. 1, S. 533.

***) Cf. Bermann, über Schwerpunktsörter und Umhüllungsflächen bei Triederschnitten (Progr. des Gymn. zu Liegnitz 1874), wo die Ordnung dieser Curve und einige andere Resultate nicht richtig angegeben sind.

und Minimum*), mit denen ich mich, da sie noch manche unerledigte Fragen enthalten, neuerdings eingehend beschäftigt habe, haben mich zu diesem Nullsysteme geführt. —

Eine Collineation zwischen zwei Räumen führt in jedem der beiden Räume zu einem Nullsysteme der Strahlenbüschel, die mit ihren entsprechenden im andern gleich sind; seine Charakteristiken sind:

$$\alpha = 6,\ \beta = 2,\ \gamma = 4.$$ **)

4. Jedes System 1. Stufe von Flächen führt zu einem Nullsysteme, wenn jedem Punkte des Raumes die Tangentialebenen der durch ihn gehenden Flächen des Systems zugeordnet werden. Sind μ, ϱ, ν die bekannten Charakteristiken des Flächensystems, so ist:

$$\alpha = \mu,\ \beta = \varrho,\ \gamma = \nu.$$

Diese Zuordnung ist der Ausgangspunkt für Herrn Voss gewesen; er nennt diese Punkt-Ebenen-Systeme, welche er schon in einer frühern Arbeit***) untersucht hat, specielle Punkt-Ebenen-Systeme 1. Art.

Das von Herrn Ameseder behandelte „polare quadratische Nullsystem" subsumirt sich hierunter: es ergiebt sich bei einem Büschel sich längs eines Kegelschnitts tangirender Flächen 2. Grades. —

Jede Strahlencongruenz ferner, deren beide Gradzahlen > 1 sind, veranlasst ein Nullsystem; wenn n, n' Bündel-, bez. Feldgrad (Ordnung, bez. Classe) der Congruenz sind, so entsprechen jedem Punkte die $\alpha = \frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungsebenen der n von ihm ausgehenden, jeder Ebene die $\beta = \frac{1}{2}n'(n'-1)$ Schnittpunkte der n' in ihr gelegenen Congruenzstrahlen; hat die Congruenz eine Brenncurve, so wird man nur die nicht auf dieselbe fallenden Schnitte nehmen (ähnlich im dualen Falle). Auf diese Nullsysteme macht Herr R. Schumacher†) aufmerksam; die dritte Charakteristik γ, bei Herrn Schumacher ϱ, dient ihm zu einer weiteren Classification der Strahlencongruenzen derselben Ordnung und Classe; z. B. bei den Congruenzen 3. Ordnung 2. Classe oder 2. Ordnung 3. Classe unterscheidet er noch die 3 Arten: $\varrho = 0, 1, 2$.

Auch Herr Voss wird durch die Punkt-Ebenen-Systeme zu Strahlencongruenzen geführt; man sehe in § V, VI des zweiten Aufsatzes in Bd. 23, wie er zur Strahlencongruenz 2. Ordnung 3. Classe gelangt. —

5. Am meisten interessirten mich zunächst *die Nullsysteme, welche bei jedem doppelt unendlich unendlichen Raumcurvensysteme entstehen, indem jedem Punkte des Raumes die Schmiegungsebenen der durch ihn*

---

*) Gesammelte Werke Bd. II, S. 290.

**) Vergl. meinen Aufsatz über gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel bei collinearen Räumen. Math. Ann. Bd. XXVIII, p. 261—267.

***) Math. Ann. Bd. 16, S. 556.

†) Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2. Classe: Dissertation, München 1885.

gehenden Raumcurven zugeordnet werden; Herr Voss zeigt (Bd. 23, S. 51), dass jedes Punkt-Ebenen-System zu einer solchen Zuordnung führt.

Die Charakteristiken sind die Zahl α *der Curven durch jeden Punkt des Raumes, die Zahl* β *der Curven, welche eine gegebene Ebene osculiren, und die Zahl* γ *der Curven, welche eine gegebene Gerade zum Schmiegungsstrahle haben;* wobei unter einem Schmiegungsstrahle einer Raumcurve jeder Strahl verstanden wird, der durch einen Punkt der Curve in der zugehörigen Schmiegungsebene geht.*)

Ich habe früher**) einige einfachere zweistufige Systeme von cubischen Raumcurven betrachtet, nämlich *die der cubischen Raumcurven, welche durch* 5, 4, 2, 1, 0 *gegebene Punkte gehen und* 0, 1, 3, 4, 5 *gegebene Geraden zu Sehnen haben;* mit Absicht ist der eine Fall, in dem 3 Punkte und 2 Sehnen gegeben sind, ausgelassen, weil in ihm nicht durch jeden Punkt des Raumes eine Curve geht; wir erhalten da ein eigenthümlich ausgeartetes Nullsystem.

Die Charakteristik α *ist in allen* 5 *Fällen gleich* 1, *die Charakteristik* β *aber* $= 6, 3, 6, 6, 21.$***).

Die dritte Charakteristik γ wird a. a. O. von mir noch nicht ermittelt; auch in den Untersuchungen des Herrn Schubert über cubische Raumcurven (§ 25 des Kalküls) wird diese doppelte Bedingung für eine Raumcurve, eine gegebene Gerade zum Schmiegungsstrahl zu haben, nicht berücksichtigt, findet dort ja auch die zugehörige einfache Bedingung, dass ein Schmiegungsstrahl einem gegebenen Strahlenbüschel angehöre, nur vorübergehend Erwähnung. Herrn Schubert's Buch bietet aber natürlich Mittel genug, um γ in einfachster Weise zu erhalten. Die vielen Sätze und Formeln desselben mit ihrem reichen geometrischen Inhalte haben noch längst nicht die gebührende Verwerthung gefunden; und ich möchte, indem ich aus Schubert'schen Formeln durch einfache Betrachtungen Resultate ableite, die mir sonst nicht leicht zu ermitteln scheinen, von neuem auf den hohen Werth des Buches aufmerksam machen.

6. Wir paaren bei einem System 1. Stufe von Curven irgend einen Punkt p einer Curve mit einem beliebigen Punkte q derselben Curve und benutzen die beiden Formeln 3) und 4) S. 44 des Schubert'schen Buches (wobei ich die Kenntniss der dortigen Bezeichnungen voraussetze):

$$\varepsilon g_p = p^3 \;\; + q^3 \;\; + g_s,$$
$$\varepsilon g_e = p g_e + q g_e - g_s.$$

Die erste reducirt sich, da in unserm Falle $p^3 = q^3 = 0$, indem ja nicht durch jeden Punkt des Raumes eine Curve des Systems geht, auf:

$$\varepsilon g_p = g_s.$$

*) Schubert, Kalkül, S. 163.

**) Journal für Mathematik, Bd. 79 S. 99, Bd. 80 S. 128.

***) Vergl. die Tabelle S. 149 in Bd. 80.

Die Zahl links bedeutet den Bündelgrad (die Ordnung) der Congruenz der Tangenten der Curven des Systems, die Zahl rechts den doppelten Grad des Complexes der Sehnen derselben; den doppelten deshalb, weil jeder der beiden verbundenen Punkte sowohl p, wie q sein kann. Also haben wir das interessante Resultat: *In einem Systeme* 1. *Stufe von Raumcurven ist der Bündelgrad der Congruenz der Tangenten immer doppelt so gross als der Grad des Complexes der Sehnen.* Durch Elimination von g_s aus beiden Formeln ergiebt sich:

$$\varepsilon g_p = p g_e + q g_e - \varepsilon g_e.$$

Seien nun in unsern fünf Systemen von cubischen Raumcurven die einfach unendlichen durch diejenigen Curven gebildet, welche eine feste Gerade l treffen; so ist εg_e, der Feldgrad oder die Classe der Tangentencongruenz, gleich der Zahl der Curven des doppelt unendlichen Systems, welche die Gerade l treffen und eine gegebene Ebene berühren, also nach der oben erwähnten Tabelle 10, 8, 12, 18, 40; $p g_e$ ist die Zahl der Curven, welche, ausser l, noch die Schnittlinie der Ebenen der Bedingungen p und g_e treffen, also der Curven, welche zwei gegebene Geraden treffen, aber doppelt, weil jeder der beiden weiteren Schnittpunkte der Curve mit der Ebene von g_e als Punkt q angesehen werden kann, folglich ist nach jener Tabelle: $p g_e = 2.5$, $2.4, 2.6, 2.9, 2.20$; und $q g_e$ hat denselben Werth. Mithin erhalten wir $\varepsilon g_p = 10, 8, 12, 18, 40 = \varepsilon g_e$.

Die Tangentencongruenzen der fünf einfach unendlichen Systeme derjenigen cubischen Raumcurven in unsern doppelt unendlichen Systemen, welche eine gegebene Gerade treffen, haben gleichen Bündel- und Feldgrad, nämlich 10, 8, 12, 18, 40.*)

7. Nun paaren wir in den Systemen 2. Stufe irgend einen Punkt p einer Curve und eine beliebige Tangente g derselben Curve und wenden auf dieses vierfach unendliche System von Elementenpaaren die mit p multiplicirte Formel 22) auf S. 84 des Schubert'schen Buches an, also die Formel:

$$p^2 e \varepsilon = p^3 e + p^2 g_p;$$

$p^3 e = 2$ in allen 5 Fällen, denn in jedem der 5 Systeme geht durch einen beliebigen Punkt eine Curve, und die Verbindungsebenen desselben mit den Tangenten der Curve umhüllen einen Kegel 2. Grades, so dass 2 die Bedingung e erfüllen; $p^2 g_p$ ist der Bündelgrad der Tangentencongruenz derjenigen Curven des Systems, welche die Gerade l von p^2 treffen; endlich $p^2 e \varepsilon$ ist die Classe des Torsus der Schmiegungsebenen in diesen Treffpunkten, aber doppelt gerechnet; denn in jeder dieser Schmiegungsebenen kann jeder der beiden äussern Punkte von

---

*) Die beiden ersten Resultate sind von mir schon durch synthetische Ueberlegungen in Nr. 9, 23 des ersten der beiden in Nr. 5 erwähnten Aufsätze gefunden.

den 3 unendlich nahen, die sie mit der Curve gemein hat, als Punkt p, die Verbindungslinie der beiden andern als Tangente g des Coincidenz-Elementenpaars angesehen werden; als Classe dieses Torsus oder, nach Herrn Ameseder, *als Ordnungszahl* $\alpha + \gamma$ *des Nullsystems erhält man demnach* 6, 5, 7, 10, 21. *Folglich ist, da* $\alpha = 1$, *die dritte Charakteristik* (oder Ameseder's Modul) 5, 4, 6, 9, 20 *und die Classenzahl* $\beta + \gamma = 11, 7, 12, 15, 41$.

8. Jedoch kann man die Charakteristik γ auch direct aus Schubert's Formeln finden; wir combiniren dazu die obige Formel:

$$p^2 e \varepsilon = p^3 e + p^2 g_p$$

mit der Formel 23) von S. 84:

$$p^3 \varepsilon = p^3 g - p^3 e,$$

durch Subtraction, was, da nach Formel XIII S. 33:

$$p^2 e - p^3 = \frown{pe}$$

ist, zu:

$$\frown{pe}\varepsilon = 2p^3 e + p^2 g_p - p^3 g$$

führt; $\frown{pe}\varepsilon$ ist die doppelte Zahl der Curven des Systems, welche die Gerade von $\frown{pe}$ so treffen, dass auch die Schmiegungsebene durch sie geht, also 2γ; $p^3 g$ ist gleich dem Range 4 der cubischen Raumcurve, $p^3 e = 2$; demnach $2\gamma = \frown{pe}\varepsilon = p^2 g_p = 10, 8, 12, 18, 40$.

Wir haben noch eine Bestätigung, indem wir die beiden Formeln 8) und 11) S. 81, die für Elementenpaare aus Punkt und Ebene gelten:

$$p^3 e + p^2 e^2 = p^2 e \varepsilon, \quad p^2 e^2 = \frown{pe}\varepsilon$$

durch Elimination von $p^2 e^2$ combiniren:

$$\frown{pe}\varepsilon = p^2 e \varepsilon - p^3 e.$$

Wir bilden die Paare p, e aus irgend einem Punkte einer Curve des zweistufigen Systems und irgend einer Schmiegungsebene derselben Curve: $p^3 e = 3$; $p^2 e\varepsilon$ ist die dreifache Ordnungszahl des Nullsystems, $\frown{pe}\varepsilon$ die ebenfalls dreifache Charakteristik γ, beide dreifach deshalb, weil jeder der 3 Punkte in einer Schmiegungsebene als zugehöriges p im Coincidenz-Elementenpaar angesehen werden kann. Zugleich sehen wir, dass die Classe der Fläche der Schmiegungsebenen der Curven des Systems, die eine Gerade treffen, oder die Ordnung der Osculationspunkte der durch eine gegebene Gerade gehenden Schmiegungsebenen von Curven des Systems, d. i. $p^2 e^2$, gleich 3γ ist.

9. Betrachten wir in Kürze noch *das ausgeartete Nullsystem, das sich bei dem System von cubischen Raumcurven ergiebt, welche drei Punkte und zwei Sehnen gemein haben.* Einem beliebigen Punkte des Raumes entspricht keine Nullebene, jeder Punkt der Fläche 2. Grades

F^2 aber, welche durch die 3 Punkte und die beiden Sehnen geht und auf welcher alle Curven des Systems liegen, hat ∞^1 Nullebenen, welche einen Kegel 2. Grades umhüllen. Zu jeder beliebigen Ebene gehören drei Nullpunkte, vergl. die obenerwähnte Tabelle; wir finden aus derselben $pg_e = qg_e = 2 \cdot 4$, $\varepsilon g_e = 8$, also vermöge der obigen Formeln $\varepsilon g_p = 8$; ferner $p^3 e = p^3 g = 0$ und daraus $p^2 e \varepsilon = \widehat{pe}\, \varepsilon = 2 \cdot 4$, so dass hier, wie ja wegen $\alpha = 0$ auch nothwendig, die Ordnungszahl mit der dritten Charakteristik übereinstimmt. *Also haben wir* $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$.

Einer geraden Punktreihe ist ein Torsus 4. Classe zugeordnet, der aber in zwei Kegel 2. Grades zerfällt, welche allein von den Schnittpunkten der Geraden mit der Trägerfläche F^2 des Curvensystems herrühren; einem Ebenenbündel ist zugeordnet eine Fläche 4. Ordnung, nämlich diese Trägerfläche doppelt gerechnet, einem Ebenenbüschel eine Curve 7. Ordnung auf dieser Fläche, einem Felde eine Fläche 7. Classe, die Enveloppe der ∞^1 Kegel 2. Grades, die den auf der F^2 gelegenen Punkten des Feldes zugehören.

10. *Das einfachste doppelt unendliche System von Raumcurven 3. Ordnung entsteht durch alle diejenigen Curven, die ein gegebenes Tetraeder in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben.**) *Bei ihm ist* $\alpha = \beta = 1$ (vergl. Nr. 32 a. eben a. O.).

Bewegt sich der eine Curve des Systems bestimmende Punkt X auf einer Geraden, so durchläuft, wie leicht einzusehen, die Spur der Tangente von X in einer der beiden gemeinsamen Schmiegungsebenen ABD, CDB eine projective gerade Punktreihe und die Schmiegungsebene von X geht stets durch den Punkt $Z \equiv (ACX, BD)$, verbindet so drei entsprechende Punkte dreier projectiven Punktreihen und umhüllt demnach einen Torsus 3. Classe. Folglich ist $\alpha + \gamma = \beta + \gamma = 3$ und *die dritte Charakteristik* γ *ist gleich* 2.

Die Schubert'schen Formeln sind in diesem Falle weniger bequem, da das System ∞^1 ausgeartete Curven besitzt, unter ihnen stets solche, welche die Coincidenzbedingungen der Formeln erfüllen. Wir haben z. B. in jeder der beiden Ebenen des Tetraeders, die durch die gemeinsamen Punkte A, C gehen, einen Büschel von zum System gehörigen ebenen Curven 3. Ordnung mit Rückkehrpunkt.

Münster, Juli 1886.

*) Math. Ann. Bd. 26, S. 487.

Die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung.

Von

Karl Rohn in Dresden.

Die Regelflächen 4. Ord. sind sowohl in geometrischer als auch in analytischer Methode von verschiedenen Mathematikern behandelt worden. Ich erwähne als die hauptsächlichsten Arbeiten diejenigen der Herren Chasles*), Cayley**), Cremona***), welche sich eingehend mit der *Classification* der Regelflächen beschäftigt haben. Einen ersten Grund zur Eintheilung der Regelflächen in Classen giebt die Natur der Doppelcurve, und man unterscheidet demgemäss Regelflächen mit 2 windschiefen Doppelgeraden, weiter solche mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt, ferner solche mit einer Raumcurve 3. Ord. als Doppelcurve, endlich Regelflächen mit einer dreifachen Geraden. Die aufgezählten Classen zerfallen wiederum in verschiedene Arten je nach den weiteren singulären Eigenschaften, die an den Flächen hervortreten.

Nun können sich die Flächen einer und derselben Art noch wesentlich durch ihre *Realitätsverhältnisse* unterscheiden, und so soll hier nicht nur eine vollständige Aufzählung aller Flächenarten, sondern auch eine Uebersicht ihrer Realitätsverhältnisse†) gegeben werden. Sehen wir von den Regelflächen mit einer dreifachen Geraden††), die

---

*) Chasles, Mémoire sur les surfaces du 3. et 4. degrée, Comptes rendus, v. 53, p. 888.

**) Cayley, First, second and third memoir on Skew surfaces, otherwise Scrolls, Phil. Trans. v. 153, p. 453, v. 154, p. 559, v. 159, p. 111.

***) Cremona, Sulle superficie gobbe di quarto grado; Mem. della R. Istoria di Bologna VIII, p. 15.

†) Schon früher habe ich die Realitätsverhältnisse der Regelflächen 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden in einer Abhandlung: „Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche", Math. Annal. v. XVIII, p. 138 u. 156 untersucht.

††) Die Resultate über die Regelflächen mit einer dreifachen Geraden sind aus meiner Arbeit: „Flächen 4. Ord. mit dreifachem Punkte", Math. Annal. v. XXIV, p. 145 f. herübergenommen und nur der Vollständigkeit halber hier angegeben.

im letzten Paragraphen kurz erledigt werden, ab, so besitzen alle übrigen eine Doppelcurve. Die Punkte dieser Doppelcurve — mag dieselbe nun irreducibel sein oder nicht — werden durch die Erzeugenden der Fläche zwei-zweideutig auf einander bezogen; wir legen desshalb unseren Betrachtungen *die zweizweideutige Beziehung zweier binärer Gebiete* zu Grunde. Hierdurch werden wir sowohl eine übersichtliche Eintheilung der Regelflächen in Arten, als auch eine bequeme Darlegung der Realitätsverhältnisse gewinnen; zugleich dürfte dieser Weg die grösste Eleganz der Darstellung, sowie der Flächengleichungen bieten.

Im ersten Paragraphen findet sich eine allgemeine Behandlung der zwei-zweideutigen Verwandtschaft. Hier werden auch die speciellen Fälle einer solchen Verwandtschaft aufgestellt. Besonders ist hervorzuheben, dass es gewisse lineare Transformationen der binären Gebiete giebt, welche ihre zwei-zweideutige Beziehung ungeändert lassen. Im zweiten und dritten Paragraphen findet man die Regelflächen mit zwei windschiefen Doppelgeraden, respective einer Selbstberührungsgeraden. Im Paragraph vier werden die Regelflächen mit einer Doppelcurve 3. Ord. behandelt, deren gestaltlichen Verhältnisse interessante Resultate liefern. Besonders interessant ist eine Art von Flächen, *welche unendlich viele lineare Transformationen in sich zulässt.* In den beiden letzten Paragraphen folgen dann noch die Flächen mit einem Doppelkegelschnitt und einer Doppelgeraden, respective mit einer dreifachen Geraden.

Die vorliegende Note ist im Anschluss an eine Serie von 10 Modellen entstanden, die ich bei L. Brill in Darmstadt habe anfertigen lassen, in dessen Verlag dieselben gegenwärtig erscheinen*).

§ 1.

Die zwei-zweideutige Verwandtschaft.

1) Zwei Werthgebiete λ und μ — oder homogen geschrieben $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ — werden durch die Gleichung:

$$\lambda^2(a_1\mu^2+2a_2\mu+a_3)+2\lambda(b_1\mu^2+2b_2\mu+b_3)+(c_1\mu^2+2c_2\mu+c_3)=0$$

oder:

$$\mu^2(a_1\lambda^2+2b_1\lambda+c_1)+2\mu(a_2\lambda^2+2b_2\lambda+c_2)+(a_3\lambda^2+2b_3\lambda+c_3)=0$$

in die allgemeinste zwei-zweideutige Beziehung gebracht. In jedem der beiden Werthgebiete giebt es *vier singuläre Punkte*, denen im

*) In den folgenden Paragraphen sind die Flächen, deren Modelle in jener Serie enthalten sind, einzeln angeführt.

andern Gebiete zwei zusammenfallende Punkte entsprechen; sie sind durch das Verschwinden der Discriminante der ersten resp. zweiten Gleichung charakterisirt.

2) Wir legen uns nun die Frage vor, ob es möglich sei durch geeignete lineare Transformationen der beiden Werthgebiete λ und μ die obige Gleichung der zwei-zweideutigen Correspondenz in eine *symmetrische in Bezug auf λ und μ* zu verwandeln. Eine solche symmetrische Gleichung will besagen, *dass jedem Werthe, mag er nun dem Gebiete λ oder μ angehören, die nämlichen beiden Werthe in dem andern Gebiete zugeordnet sind.* Es ist evident, dass man blos eins der beiden Gebiete, etwa λ, zu transformiren braucht, um den gedachten Zweck zu erreichen, falls derselbe sich überhaupt erreichen lässt. Setzen wir demgemäss:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta},$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$\begin{aligned}
&\lambda'^2[\mu^2(a_1\alpha^2 + 2b_1\alpha\gamma + c_1\gamma^2) + 2\mu(a_2\alpha^2 + 2b_2\alpha\gamma + c_2\gamma^2)\\
&+ (a_3\alpha^2 + 2b_3\alpha\gamma + c_3\gamma^2)] + 2\lambda'[\mu^2(a_1\alpha\beta + b_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_1\gamma\delta)\\
&+ 2\mu(a_2\alpha\beta + b_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_2\gamma\delta) + (a_3\alpha\beta + b_3(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_3\gamma\delta)]\\
&+ [\mu^2(a_1\beta^2 + 2b_1\beta\delta + c_1\delta^2) + 2\mu(a_2\beta^2 + 2b_2\beta\delta + c_2\delta^2)\\
&+ (a_3\beta^2 + 2b_3\beta\delta + c_3\delta^2)] = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird symmetrisch, wenn die Transformationscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relationen:

$$\begin{aligned}
a_1\beta^2 + 2b_1\beta\delta + c_1\delta^2 &= a_3\alpha^2 + 2b_3\alpha\gamma + c_3\gamma^2,\\
a_2\beta^2 + 2b_2\beta\delta + c_2\delta^2 &= a_3\alpha\beta + b_3(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_3\gamma\delta,\\
a_2\alpha^2 + 2b_2\alpha\gamma + c_2\gamma^2 &= a_1\alpha\beta + b_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_1\gamma\delta,
\end{aligned}$$

erfüllen. Fasst man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als Raumcoordinaten auf, so stellen diese Gleichungen drei Flächen 2. Grades dar; sie schneiden sich in 8 Punkten, die jedoch, wie sogleich hervorgehoben werden soll, paarweise zusammenfallen. Dementsprechend existiren 4 lineare Transformationen, welche die Gleichung der zwei-zweideutigen Correspondenz in eine symmetrische verwandeln. *Eine solche Correspondenz mag kurz eine symmetrische genannt werden. Jede zwei-zweideutige Correspondenz kann auf vierfache Weise in eine symmetrische verwandelt werden; den singulären Punkten gehören in beiden Gebieten die gleichen Parameter zu.*

Hieraus können wir noch weitere Folgerungen ziehen. Zunächst ergiebt sich hier in einfachster Weise der bekannte Satz, dass das Doppelverhältniss der singulären Punkte in beiden Werthgebieten gleich ist. Und da solche Punktquadrupel nur auf 4 Weisen eindeutig auf

einander bezogen werden können, so folgt daraus nachträglich, dass die 8 Schnittpunkte der vorher angegebenen Flächen 2. Grades paarweise zusammenfallen müssen. Das Quadrupel der singulären Punkte des *einen* Werthgebietes kann auf vierfache Weise in das Quadrupel des *andern* Werthgebietes transformirt werden; jede dieser 4 Transformationen verwandelt die zwei-zweideutige Beziehung in eine *symmetrische*.

3) Wir setzen nun die ursprünglich gegebene zwei-zweideutige Transformation als eine reelle voraus, d. h. als eine solche, deren Gleichungen reelle Coefficienten enthält. Im Gebiete λ giebt es dann entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre, oder zwei Paar conjugirt imaginäre singuläre Punkte. Im ersten Fall sind die singulären Punkte des Gebietes μ entweder alle vier reell, oder paarweise conjugirt imaginär; ebenso im letzten Falle. Im zweiten Falle dagegen sind auch von den singulären Punkten des Gebietes μ nothwendiger Weise zwei reell und zwei conjugirt imaginär. Der Grund hiervon liegt darin, dass im ersten und dritten Fall das Doppelverhältniss reell, im zweiten aber imaginär ist.

Hierzu ist noch weiter zu bemerken, dass zwei Quadrupel von je zwei reellen und zwei imaginären Punkten nur so eindeutig auf einander bezogen werden können, dass das reelle Punktepaar des einen Quadrupels dem reellen oder dem conjugirt imaginären des andern entspricht. Der Grund hiervon liegt darin, dass das Doppelverhältniss und also auch der absolute Betrag desselben für beide Quadrupel gleich sein muss. Bilden nun die reellen Punkte das eine Paar und die imaginären das andere Paar des Quadrupels, so ist der absolute Betrag des Doppelverhältnisses gleich 1; bei jeder anderen Eintheilung des Quadrupels ist derselbe jedoch von 1 verschieden.

Ebenso lassen sich zwei Quadrupel mit je zwei Paar imaginären Punkten nur so auf einander eindeutig beziehen, dass zwei conjugirt imaginären Punkten des einen auch im andern zwei conjugirt imaginäre Punkte entsprechen.

Aus dem Gesagten folgt weiter, dass die linearen Transformationen, welche die zwei-zweideutige Beziehung in eine *symmetrische* verwandeln, alle vier reell sind, wenn die Quadrupel der singulären Punkte in beiden Gebieten entweder nur aus reellen oder nur aus imaginären Punkten bestehen. Von den genannten Transformationen sind zwei reell und zwei imaginär, wenn die beiden Quadrupel je zwei reelle und zwei imaginäre Punkte enthalten. Besitzt endlich das eine Quadrupel nur reelle, das andere nur imaginäre Punkte, so sind die vier Transformationen imaginär.

4) Will man die symmetrische Gleichung der zwei-zweideutigen Verwandtschaft auf ihre einfachste analytische Form bringen, so hat

man im Anschluss an die Reduction der Gleichung 4. Grades auf ihre Normalform folgendermassen zu verfahren. Man theile die vier singulären Punkte des Gebietes λ in zwei Paare und mache die Punkte, welche beide Paare zugleich harmonisch trennen, zu Null- und Unendlichkeitspunkt, dann werden die Parameter der singulären Punkte, abgesehen vom Vorzeichen, paarweise gleich. Jetzt kann man den Einheitspunkt noch so wählen, dass das eine Punktepaar die reciproken Werthe des andern zu Parametern erhält, so dass die singulären Punkte durch die Parameter: $\lambda_0, -\lambda_0, \frac{1}{\lambda_0}, -\frac{1}{\lambda_0}$ gegeben sind. Damit die Gleichung der zwei-zweideutigen Beziehung symmetrisch bleibe, hat man im Gebiete der μ genau die gleichen Schritte zu thun, wie im Gebiete der λ.

Geht man von der allgemeinen symmetrischen Gleichung aus:

$$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\lambda+\mu)^2 + a_{33} + 2a_{23}(\lambda+\mu) + 2a_{13}\lambda\mu$$
$$+ 2a_{12}\lambda\mu(\lambda+\mu) = 0,$$

deren Discriminante:

$$\mu^4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) + 2\mu^3(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})$$
$$+ \mu^2(a_{13}^2 + 2a_{13}a_{22} - 2a_{12}a_{23} - a_{11}a_{33})$$
$$+ 2\mu(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})$$

durch Nullsetzen die singulären Punkte liefert, und führt man die vorher erwähnte Transformation durch, so muss man eine neue symmetrische Gleichung zwischen λ und μ erhalten, deren Discriminante die folgenden Eigenschaften hat. Es müssen einerseits die Coefficienten von μ^3 und μ in derselben verschwinden, andererseits muss der Coefficient von μ^4 gleich dem constanten Gliede werden. Denke ich mir also die neue Gleichung mit den nämlichen Coefficienten geschrieben wie die frühere, so müssen zwischen diesen Coefficienten die 3 Relationen bestehen:

$$a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} = 0, \qquad a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} = 0,$$
$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a_{23}^2 - a_{22}a_{33}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt entweder:

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0,$$

was mit Hülfe der dritten Gleichung zu:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \quad \text{und:} \quad a_{23}^2 - a_{22}a_{33} = 0,$$

d. h. zum Verschwinden des Coefficienten von μ^4 und des constanten Gliedes führen würde, was im Allgemeinen nicht stattfinden kann; oder es folgt: $a_{12} = 0$, $a_{23} = 0$, und also nach der dritten Gleichung $a_{11} = a_{33}$, was in der That zulässig ist.

5) Durch lineare Transformationen der Werthgebiete λ und μ kann also jede zwei-zweideutige Beziehung in die *symmetrische* Form*):

(1) $$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\lambda^2 + \mu^2) + a_{11} + 2a_{13}\lambda\mu = 0$$

gebracht werden, deren singuläre Punkte sich durch die Gleichung:

(2) $$\mu^4 + 1 + \mu^2 \frac{a_{11}^2 + a_{22}^2 - a_{13}^2}{a_{11}a_{22}} = 0$$

bestimmen. *Sind in beiden Gebieten λ und μ alle vier singulären Punkte reell, oder sind sie in beiden alle vier imaginär*, so sind die linearen Transformationen, welche zu der Gleichung (1) hinleiten, *reell.*

Giebt es in beiden Gebieten λ und μ je zwei reelle und zwei imaginäre singuläre Punkte, so wähle man die Einheitspunkte der Art, dass die singulären Punkte die Parameter: λ_0, $-\lambda_0$, $\frac{i}{\lambda_0}$, $-\frac{i}{\lambda_0}$ erhalten; alsdann sind die bez. linearen Transformationen wiederum reell, und an Stelle von (1) tritt jetzt die *symmetrische* Gleichung:

(3) $$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\lambda^2 + \mu^2) - a_{11} + 2a_{13}\lambda\mu = 0.$$

Sind endlich die singulären Punkte im Gebiete λ alle vier reell, aber im Gebiete μ alle vier imaginär, dann wähle man, um wieder reelle Transformationen zu gewinnen, die Einheitspunkte so, dass die Parameter der singulären Punkte: λ_0, $-\lambda_0$, $\frac{1}{\lambda_0}$, $-\frac{1}{\lambda_0}$, respective: $i\lambda_0$, $-i\lambda_0$, $-\frac{i}{\lambda_0}$, $\frac{i}{\lambda_0}$ werden. Die hierdurch sich ergebende Gleichung der zwei-zweideutigen Verwandtschaft wird jetzt selbstverständlich nicht mehr symmetrisch, vielmehr nimmt sie die Form:

(4) $$a_{11}\lambda^2\mu^2 - a_{22}(\lambda^2 - \mu^2) - a_{11} + 2a_{13}\lambda\mu = 0$$

an, welche wir als *halbsymmetrisch* bezeichnen können.

6) Nachdem wir soeben die allgemeinen zwei-zweideutigen Beziehungen untersucht und auf gewisse Normalformen reducirt haben, erübrigt uns ein Gleiches für die *speciellen* zwei-zweideutigen Verwandtschaften durchzuführen. Es sind nun hier noch verschiedene Specialfälle zu unterscheiden.

Erstens können zwei singuläre Punkte des einen Gebietes coincidiren, was einen gleichen Vorgang in dem andern Gebiete involvirt. Dann wähle man Null-, Einheits- und Unendlichkeitspunkte in beiden Gebieten so, dass den coincidirenden Punkten der Parameter 0, den beiden andern singulären Punkten aber gleiche Parameter mit entgegengesetztem Vorzeichen zukommen. An Stelle der Gleichungen (1), (3) und (4) tritt jetzt die Gleichung:

(5) $$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\mu^2 \pm \lambda^2) + 2a_{13}\lambda\mu = 0.$$

*) Hierin hat das a_{13} eine andere Bedeutung als vorher, indem der Coefficient von $2\lambda\mu$ vorher: $a_{12} + a_{22}$ lautete.

Dabei gilt das *obere* Vorzeichen, wenn die beiden singulären Punkte, welche ausser $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ noch existiren, in *beiden* Gebieten *reell* oder *imaginär* sind; dagegen gilt das *untere* Zeichen, wenn die singulären Punkte des *einen* Gebietes *reell* und im *andern imaginär* sind.

Zweitens können drei singuläre Punkte des einen Gebietes und somit auch des andern zusammenfallen. Hier lege man die Nullpunkte in die dreifachen und die Unendlichkeitspunkte in die einfachen singulären Punkte, ferner mache man die beiden Punkte, welche den einfachen singulären Punkten entsprechen, zu Einheitspunkten. Dann wird die Gleichung der zwei-zweideutigen Correspondenz:

(6) $$\lambda^2\mu^2 + (\lambda - \mu)^2 - 2\lambda\mu(\lambda + \mu) = 0.$$

Drittens können in beiden Gebieten zwei Mal zwei singuläre Punkte coincidiren, die man dann zu Null- und Unendlichkeitspunkten macht. Unter dieser Annahme wird die Gleichung der Verwandtschaft:

(7) $$(\lambda + \mu)^2 + 2a\lambda\mu = 0,$$

oder:

(7 a) $$(\lambda + n\mu)\left(\lambda + \frac{1}{n}\mu\right) = 0.$$

In diesem Falle wird unsere Verwandtschaft reducibel, sie zerfällt in zwei lineolineare Correspondenzen.

Fallen viertens alle 4 singulären Punkte in beiden Gebieten zusammen, so lässt sich die Gleichung der Verwandtschaft in die Form:

(8) $$\lambda^2\mu^2 \pm (\lambda - \mu)^2 = 0$$

bringen, die ebenfalls in zwei lineare Factoren zerfällt

Ein specieller Fall hiervon entsteht schliesslich, wenn beide lineare Factoren g l e i c h werden, d. h. wenn die Gleichung der Verwandtschaft sich auf:

(9) $$(\lambda - \mu)^2 = 0$$

reducirt.

Die aufgezählten Möglichkeiten erschöpfen die sämmtlichen Specialfälle der zwei-zweideutigen Verwandtschaft.

7) Es sollen in diesem Paragraphen noch kurz die linearen Transformationen eine Berücksichtigung finden, welche die zwei-zweideutige Verwandtschaft ungeändert lassen. Geht man von der Gleichung (1) aus, so erkennt man sofort, dass dieselbe ungeändert bleibt, wenn man darin für λ und μ entweder $-\lambda$ und $-\mu$, oder $\frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\mu}$, oder endlich $-\frac{1}{\lambda}$ und $-\frac{1}{\mu}$ setzt; andere lineare Transformationen mit der verlangten Eigenschaft giebt es ersichtlich nicht. *Es giebt also* — abgesehen von der Identität — *noch drei lineare Transformationen, welche eine zwei-zweideutige Verwandtschaft ungeändert lassen.* Auf

die Gleichungen (3) und (4) lässt sich das Resultat leicht übertragen. Bei der Gleichung (5) giebt es nur noch *eine* solche Transformation, sie verwandelt λ und μ in $-\lambda$ und $-\mu$.

§ 2.

Die Regelflächen 4. Ordnung mit zwei Doppelgeraden.

8) Wir wollen die bisher gewonnenen Resultate zunächst auf die Regelflächen mit zwei windschiefen Doppelgeraden anwenden. In erster Linie behandeln wir die Regelflächen mit *reellen* Doppelgeraden, indem wir das Werthgebiet der λ auf der einen und das der μ auf der andern Doppelgeraden ausbreiten. Dabei wird es geeignet sein die beiden Doppelgeraden zu den Kanten: $z=0$, $w=0$, respective: $x=0$, $y=0$ des Coordinatentetraeders zu machen, und folglich:

$$\lambda = \frac{x}{y}, \quad \mu = \frac{z}{w}$$

zu setzen.

Es bleiben dann der Hauptsache nach 4 Fälle zu unterscheiden, indem erstens die singulären Punkte auf beiden Doppelgeraden reell, zweitens auf beiden imaginär, drittens auf beiden theilweise reell und theilweise imaginär, und endlich viertens auf einer Doppelgeraden reell und auf der andern imaginär sein können. Jeder dieser Fälle kann noch weitere Singularitäten aufweisen. Die singulären Punkte auf den Doppelgeraden werde ich dem Gebrauche gemäss weiterhin *Pinch-points* nennen.

9) Die Gleichung (1) repräsentirt den Fall, in dem *sämmtliche Pinch-points reell* sind, falls die Wurzeln der Discriminante reell sind, d. h. falls $\frac{(a_{11}+a_{22})^2 - a_{13}^2}{a_{11}a_{22}} < 0$ ist. Unter dieser Bedingung stellt:

$$(10) \qquad a_{11}(x^2z^2 + y^2w^2) + a_{22}(x^2w^2 + y^2z^2) + 2a_{13}xyzw = 0$$

die Gleichung der *Regelflächen mit* 8 *reellen Pinch-points* dar. Die Fläche enthält nämlich alle Punkte mit den Coordinaten $x, y, \varrho z, \varrho w$, und ihre Gleichung geht aus (1) hervor, wenn man für λ und μ die Werthe $\frac{x}{y}$ und $\frac{z}{w}$ einsetzt.

Die Pinch-points theilen die Doppelgeraden in je 4 Segmente, welche abwechselnd reell und isolirt auf der Fläche verlaufen. Sind A, B, C, D die Pinch-points und $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die reellen Segmente der einen Doppelgeraden, sind ebenso A', B', C', D' die entsprechenden Pinch-points der andern, so treffen die beiden Erzeugenden durch einen beliebigen Punkt von $\overline{AB}$ das Segment*) $\overline{A'B'}$, und die Er-

*) Man kann das immer erreichen, da man die symmetrische Form auf vierfache Weise darstellen kann.

zeugenden durch einen Punkt von $\overline{CD}$ das Segment $\overline{C'D'}$. *Die ganze Fläche*) besteht aus zwei Theilen;* der *eine* Theil entsteht durch die Bewegung einer Erzeugenden, welche gleichzeitig an $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ einmal auf- und abgleitet, bis sie wieder ihre ursprüngliche Lage annimmt. Analog entsteht der andere Flächentheil.

10) Die Gleichung (10) stellt eine *Regelfläche mit* 8 *imaginären Pinch-points* dar, wenn: $\frac{(a_{11}+a_{22})^2 - a_{13}^2}{a_{11}a_{22}} > 0$ ist. Es sind hier noch zwei Fälle zu unterscheiden. Entsprechen dem Punkte $\lambda = 0$ zwei *reelle* Punkte der andern Geraden, d. h. ist $a_{11} > 0$ und $a_{22} < 0$, so tritt Gleiches für alle Punkte λ ein und *die Doppelgeraden verlaufen ganz reell auf der Fläche;* sind dagegen die correspondirenden Punkte von $\lambda = 0$ *imaginär,* d. h. ist $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$, *so sind die Doppelgeraden völlig isolirt.*

Letztere Fläche ist — mit Ausnahme der Doppelgeraden — *ganz imaginär.*

*Erstere Fläche**) besteht aus zwei reellen Mänteln, die sich in den Doppelgeraden gegenseitig durchsetzen.* Ein solcher Mantel entsteht, indem eine Erzeugende längs der beiden Doppelgeraden hingeleitet und dabei die unendlich fernen Punkte derselben passirt, bis sie in ihre Anfangslage zurückgelangt.

11) *Die Regelfläche mit zwei reellen und zwei imaginären Pinch-points auf jeder Doppelgeraden* hat die Gleichung:

$$(11) \quad a_{11}(x^2z^2 - y^2w^2) + a_{22}(x^2w^2 + y^2z^2) + 2a_{13}xyzw = 0,$$

welche aus (3) hervorgeht. *Diese Fläche besteht nur aus einem einzigen Theile,* welcher gestaltet ist, wie die Theile der Fläche in Nr. 9.

12) *Besitzt die Regelfläche auf einer Doppelgeraden* 4 *reelle, auf der andern* 4 *imaginäre Pinch-points,* so wird nach Gleichung (4) ihre Gleichung:

$$(12) \quad a_{11}(x^2z^2 - y^2w^2) - a_{22}(x^2w^2 - y^2z^2) + 2a_{13}xyzw = 0.$$

*Die Fläche***) besteht aus zwei Theilen,* die sich längs der *einen* Doppelgeraden gegenseitig durchsetzen. Sind A, B, C, D die Pinch-points der Reihe nach, so erhält man den einen Flächentheil, indem man eine Erzeugende an dem Segment $\overline{AB}$ einmal auf- und abgleiten lässt, während dieselbe an der andern Doppelgeraden längs deren ganzen Erstreckung hingleitet. Analog entsteht der andere Theil.

13) Die *Specialfälle* der Regelflächen mit zwei Doppelgeraden entstehen durch Zusammenrücken zweier, respective dreier Pinch-points

---

*) Diese Fläche bildet das *erste Modell* der in der Einleitung genannten Serie.

**) Zweites Modell der Serie.

***) Drittes Modell der Serie.

auf beiden Doppelgeraden. Auf die übrigen Specialisirungen brauchen wir hier nicht einzugehen, da sie reducible zwei-zweideutige Verwandtschaften und in Folge dessen auch reducible Flächen liefern.

Fallen von den Pinch-points auf jeder Doppelgeraden zwei zusammen, so wird die Gleichung der zugehörigen Fläche:

$$a_{11}x^2z^2 + a_{22}(y^2z^2 \pm x^2w^2) + 2a_{13}xyzw = 0, \tag{13}$$

woraus man erkennt, dass *die Gerade* $x = 0$, $z = 0$ *doppelte Erzeugende* unserer Fläche ist.

Gilt in der voranstehenden Gleichung das obere Zeichen und ist: $\frac{a_{13}^2 - a_{22}^2}{a_{11}a_{22}} > 0$, so giebt es *auf jeder Doppelgeraden noch zwei reelle Pinch-points.* Dabei ist die Doppelerzeugende $x = 0$, $z = 0$ *isolirt*, wenn dem Parameter $\lambda = \infty$ ein reelles Werthepaar entspricht, d. h. wenn $a_{11} > 0$ und $a_{22} < 0$; sie liegt dagegen *reell* auf der Fläche, wenn $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$. Diese Specialfälle entstehen aus der allgemeinen Regelfläche in Nr. 9, entweder indem sich der eine Flächentheil auf eine isolirte Doppelgerade zusammenzieht, oder indem der eine Flächentheil mit dem andern längs einer Doppelgeraden zusammenstösst. Gilt in Gleichung (13) das obere Zeichen und ist $\frac{a_{13}^2 - a_{22}^2}{a_{11}a_{22}} < 0$, *so sind die Pinch-points auf den Doppelgeraden imaginär.* Die *doppelte Erzeugende* $x = 0$, $z = 0$ ist *isolirt*, wenn $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$; *sie liegt dagegen reell auf der Fläche*, wenn $a_{11} > 0$ und $a_{22} < 0$. Im ersteren Fall ist ausser den Doppelgeraden und der Doppelerzeugenden nichts von der Fläche reell; bei letzterer Fläche sind die Doppelgeraden nirgends isolirt, sie besteht aus einem einzigen Flächentheil, der sich längs der Doppelerzeugenden durchsetzt.

Nehmen wir endlich in der Gleichung (13) das untere Zeichen, so *sind die Pinch-points auf der einen Doppelgeraden reell, auf der andern imaginär.* Hier liegt die *Doppelerzeugende stets reell auf der Fläche*, welche aus der Fläche in Nr. 12 hervorgeht, wenn die beiden Theile derselben längs einer Doppelerzeugenden zusammenstossen.

14) *Rücken auf jeder Doppelgeraden drei Pinch-points zusammen*, so erhalten wir als Gleichung der Regelfläche:

$$x^2z^2 + (xw - yz)^2 - 2xz(xw + yz) = 0. \tag{14}$$

Die Gerade $x = 0$, $z = 0$ ist jetzt eine *Rückkehrerzeugende* der Regelfläche; dieselbe entsteht aus der Fläche mit einer reellen Doppelerzeugenden und 4 reellen Pinch-points, wenn sich von den beiden längs dieser Geraden zusammenstossenden Flächentheilen der eine völlig zusammenzieht.

15) Wir gehen jetzt zu den *Regelflächen mit zwei conjugirt imaginären Doppelgeraden* über. Die zwei-zweideutige Zuordnung zweier

solcher Punktreihen wird, ganz so wie vorher, durch eine der Gleichungen (1) und (3) vermittelt; eine Abänderung muss nur die Wahl des Coordinatensystems erfahren. Wir wollen dasselbe so bestimmen, dass die Doppelgeraden die Gleichungen:

$$x + iy = 0, \quad z - iw = 0, \quad \text{resp.} \quad x - iy = 0, \quad z + iw = 0$$

erhalten, und dass die Punkte: $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ die Coordinaten: $0, 0, 1, -i$ und $1, +i, 0, 0$, und die Punkte: $\mu = 0$ und $\mu = \infty$ die Coordinaten: $0, 0, 1, +i$ und $1, -i, 0, 0$ aufweisen.

Es entspricht demnach hier dem Punkte: $\lambda, i\lambda, 1, -i$ der einen Doppelgeraden der Punkt: $\mu, -i\mu, 1, +i$ der andern. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte gehört der Regelfläche an, sobald λ, μ der Gleichung der zwei-zweideutigen Correspondenz genügen. Setzen wir also in diese Gleichung die Werthe:

$$x = \lambda + \varrho\mu, \quad y = i(\lambda - \varrho\mu), \quad z = 1 + \varrho, \quad w = -i(1 - \varrho)$$

oder:

$$\lambda = \frac{x - iy}{z + iw}, \quad \mu = \frac{x + iy}{z - iw}$$

ein, so erhalten wir als Gleichung der bezüglichen Regelfläche:

(15) $(x^2 + y^2)^2 \pm (z^2 + w^2)^2 + 2b(xz - yw)^2 + 2c(xw + yz)^2 = 0,$

wobei:

$$b = \frac{a_{12} + a_{22}}{a_{11}} \quad \text{und} \quad c = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{11}} \quad \text{ist.}$$

Die Verbindungslinien correspondirender Punkte sind offenbar nur dann reell, wenn die zugehörigen Parameter conjugirt imaginär sind. Denn setzen wir: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \alpha - i\beta$, so liefert die Verbindungslinie der Punkte: $\alpha + i\beta, i\alpha - \beta, 1, -i$ und: $\alpha - i\beta, -i\alpha - \beta, 1, +i$, oder was dasselbe ist der Punkte: $\alpha, -\beta, 1, 0$ und: $\beta, \alpha, 0, -1$ eine *reelle Erzeugende* unserer Fläche. Dabei müssen die α, β der Gleichung:

(16) $$(\alpha^2 + \beta^2)^2 \pm 1 + 2b\alpha^2 + 2c\beta^2 = 0$$

genügen.

Um nun eine Vorstellung über die Realitätsverhältnisse unserer Regelfläche zu gewinnen, fassen wir die α und β als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene auf, so dass die Gleichung (16) eine Curve 4. Ord. darstellt, welche zu den beiden Coordinatenaxen symmetrisch liegt. Eine einfache Discussion dieser Curve zeigt, dass dieselbe, *falls wir in ihrer Gleichung das obere Zeichen wählen*, entweder aus zwei Ovalen besteht, oder ganz imaginär ist, und zwar tritt letzteres ein, wenn gleichzeitig $b > -1$ und $c > -1$ ist, in allen andern Fällen existiren zwei Ovale. Die Curve 4. Ord. besitzt indessen stets ein einziges reelles Oval, *falls wir in ihrer Gleichung das untere Zeichen nehmen. Es giebt also drei verschiedene Arten von Regelflächen mit*

conjugirt imaginären Doppelgeraden. Gilt in 16) das obere Zeichen und ist $b > -1$ und $c > -1$, so *ist die Fläche ganz imaginär.* Gilt wieder das obere Zeichen und ist $b < -1$ und c beliebig, oder $c < -1$ und b beliebig, *so besteht die Fläche**) *aus zwei hyperboloidartigen Theilen.* Gilt dagegen das untere Zeichen, so *besitzt die zugehörige Fläche stets einen einzigen hyperboloidartigen Theil.*

16) *Auch hier können auf der imaginären Doppelgeraden zwei, respective drei singuläre Punkte coincidiren,* wo dann die zwei-zweideutigen Verwandtschaften durch die Gleichungen (5) und (6) respective dargestellt werden. Führen wir für die λ, μ wieder die in voriger Nummer angegebenen Werthe ein, so erhält man die Gleichungen der bezüglichen Regelflächen.

Aus der Gleichung (5) erhält man die Regelfläche:

$$(17) \qquad (x^2 + y^2)^2 + 2b(xz - yw)^2 + 2c(xw + yz)^2 = 0$$

mit der *doppelten Erzeugenden* $x = 0$, $y = 0$. Ist gleichzeitig $b > 0$ und $c > 0$, so *besteht die Fläche aus der isolirten Doppelerzeugenden;* ist dagegen $b < 0$ und $c < 0$, so *besitzt die Fläche eine isolirte Doppelerzeugende und einen hyperboloidartigen Flächentheil.* Ist endlich $b > 0$ und $c < 0$, oder auch $b < 0$ und $c > 0$, so *liegt die Doppelerzeugende ganz reell auf der Fläche.* Die letztgenannte Fläche entsteht, indem die beiden hyperboloidartigen Theile der einen Fläche in voriger Nummer längs einer Erzeugenden aneinander stossen. Aus der Gleichung (6) geht die Regelfläche:

$$(18) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 4(yz + xw)^2 - 4(x^2 + y^2)(xz - yw) = 0$$

mit der *Rückkehrerzeugenden* $x = 0$, $y = 0$ hervor.

17) Zum Schluss dieses Paragraphen soll noch kurz der linearen Transformationen gedacht werden, welche die Gleichung der Regelfläche mit 8 reellen Pinch-points ungeändert lassen. Sie werden sich zusammensetzen aus der Transformation, welche λ und μ für sich ungeändert lässt und aus den Transformationen der λ und μ, welche die Gleichung der Verwandtschaft ungeändert lassen. Die Gleichung der Regelfläche bleibt also ungeändert, wenn man x, y, z, w durch: $-x, -y, z, w$, resp. durch: $-x, y, -z, w$, resp. durch: $-x, y, z, -w$, resp. durch: y, x, w, z, resp. durch: z, w, x, y ersetzt. Rechnet man die Identität mit ein, so erhält man im Ganzen 16 lineare Transformationen der Regelflächen in sich. Zieht man die zwei-zweideutige Verwandtschaft der Ebenenbüschel durch die Doppelgeraden in Betracht, welche sich in den Erzeugenden schneiden, so erkennt man, dass ihre Gleichung wieder genau die Form (1) hat, dass also die Regelfläche auch durch 16 dualistische Transformationen in sich

*) Viertes Modell der Serie.

übergeht. Diese Resultate sind längst bekannt und sollten hier nur der Vollständigkeit halber Platz finden. Wie sich diese Resultate für die andern Regelflächen modificiren ist leicht anzugeben und kann hier übergangen werden.

§ 3.

Die Regelflächen mit einer Selbstberührungsgeraden.

18) Es soll jetzt untersucht werden, wie sich die Dinge gestalten, wenn die windschiefen Doppelgeraden einander unendlich nahe rücken. Hätte man eine allgemeine zwei-zweideutige Zuordnung zwischen den Punkten der beiden unendlich nahen Geraden, so würden je zwei correspondirende Punkte in *endlicher* Entfernung von einander sein und demnach ihre Verbindungslinie mit der Selbstberührungsgeraden zusammenfallen. Wir erkennen daraus, dass wir nur in dem Falle eine Regelfläche erhalten, wenn die Zuordnung der Punkte auf den unendlich nahen Doppelgeraden so beschaffen ist, dass jedem Punkte der einen zwei Punkte der andern entsprechen, *welche ihm unendlich nahe liegen*.

Den singulären Punkten der einen Doppelgeraden correspondiren die unendlich nahen singulären Punkte auf der andern. Wir wählen Null-, Unendlichkeits- und Einheitspunkte der Parameter λ, sowie der Parameter μ wieder in der in Nr. 4 angegebenen Weise. Die Nullpunkte, ebenso die Unendlichkeits- und Einheitspunkte, beider Punktreihen liegen einander ebenfalls unendlich nahe. Die Correspondenz ist in Folge der getroffenen Festsetzungen wieder eine *symmetrische*, also ihre Gleichung wie früher:

$$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\lambda^2+\mu^2) \pm a_{11} + 2a_{13}\lambda\mu = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, falls die vier Pinchpoints alle reell oder alle imaginär sind, während das untere Zeichen dem Falle zweier reeller und zweier imaginärer Pinchpoints entspricht.

19) Die Constanten der vorstehenden Gleichung müssen nun so gewählt werden, dass jedem Punkte λ zwei Punkte der andern Reihe mit den Parametern $\lambda + \varepsilon\lambda'$ und $\lambda + \varepsilon\lambda''$ — unter ε eine unendlich kleine Grösse verstanden — entsprechen. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$a_{11}\lambda^2(\lambda+\varepsilon\lambda')^2 + a_{22}(2\lambda^2+2\varepsilon\lambda\lambda'+\varepsilon^2\lambda'^2) \pm a_{11} + 2a_{13}\lambda(\lambda+\varepsilon\lambda') = 0,$$

und zwar muss diese Gleichung bestehen für jeden Werth von λ. Mit Rücksicht auf diese Bedingung ergiebt sich:

$$a_{11} = 0 + \varepsilon.0 + \varepsilon^2 a;\quad a_{22} = b_2 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b,\quad a_{13} = -b_2 - \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 c,$$

wodurch die Gleichung der zwei-zweideutigen Correspondenz übergeht in:

$$(19) \qquad a\lambda^4 \pm a + 2\lambda^2(b+c) + b_2\lambda'^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\left.\begin{matrix}\lambda' \\ \lambda''\end{matrix}\right| = \pm\sqrt{\frac{a\lambda^4 \pm a + 2\lambda^2(b+c)}{-b_2}}$$

liefern die, dem Parameter λ entsprechenden Parameter $\lambda + \varepsilon\lambda'$ und $\lambda + \varepsilon\lambda''$.

Um ein geeignetes Coordinatentetraeder zur Darstellung der Gleichung der Regelfläche zu gewinnen, ziehe man die Verbindungslinien der unendlich nahen Null-, Einheits- und Unendlichkeitspunkte und ausserdem irgend eine gemeinsame Secante dieser drei Geraden. Die Selbstberührungsgerade mache man zur Geraden $x = 0$, $y = 0$ und die soeben gezogene Secante zur Geraden $z = 0$, $w = 0$, ferner die Verbindungslinie der Nullpunkte zur Geraden $x = 0$, $z = 0$ und die Verbindungslinie der Unendlichkeitspunkte zur Geraden $y = 0$, $w = 0$. Der Einheitspunkt des Coordinatensystems kann auf der Verbindungslinie der Einheitspunkte der unendlich nahen Doppelgeraden noch beliebig gewählt werden.

Die Coordinaten der Punkte mit den Parametern $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ und $\lambda = \lambda$ sind nun: $0, 0, 0, 1$; $0, 0, 1, 0$ und $0, 0, \lambda, 1$ respective, diejenigen der Punkte mit den Parametern $\mu = 0$, $\mu = 1$ und $\mu = \lambda + \varepsilon\lambda'$ werden: $0, \varepsilon, 0, 1$; $\varepsilon, 0, 1, 0$ und $\lambda\varepsilon, \varepsilon, \lambda + \varepsilon\lambda', 1$ respective. Durch die angegebene Wahl des Coordinatensystems und geeignete Wahl des Einheitspunktes kann man nämlich immer erreichen, dass die Coordinaten der Punkte $\mu = 0$ und $\mu = \infty$ die vorstehenden Werthe haben.

Die Regelfläche mit einer Selbstberührungsgeraden wird demnach von den Verbindungslinien der Punkte $0, 0, \lambda, 1$ und $\lambda\varepsilon, \varepsilon, \lambda + \varepsilon\lambda', 1$, oder was dasselbe ist *von den Verbindungslinien der Punkte* $0, 0, \lambda, 1$ *und* $\lambda, 1, \lambda', 0$ *gebildet* wo λ, λ' der Gleichung (19) genügen. Die Coordinaten eines Punktes unserer Fläche sind: $x = \varrho\lambda$, $y = \varrho$, $z = \lambda + \varrho\lambda'$, $w = 1$; die Gleichung der zwei-zweideutigen Verwandtschaft geht demnach in diejenige unserer Fläche über, wenn wir: $\lambda = \frac{x}{y}$ und $\lambda' = \frac{yz - xw}{y^2}$ setzen. Indem wir noch zur Abkürzung $b + c = b_1$ schreiben, wird die Flächengleichung:

$$(20) \qquad a(x^4 \pm y^4) + 2b_1 x^2 y^2 + b_2(xw - yz)^2 = 0.$$

20) Gilt in dieser Gleichung das obere Zeichen, und ist $\frac{b_1}{a} < -1$, so sind *die vier Pinchpoints auf der Selbstberührungsgeraden*) reell.*

---

*) Fünftes Modell der Serie.

Die Parameter der Pinchpoints sind: $\pm\sqrt{-\frac{b_1}{a}\pm\sqrt{\frac{b_1^2}{a^2}-1}}$. Bezeichnet man irgend einen dieser 4 Wurzelwerthe mit λ_0, so sind die Erzeugenden durch die Pinch-points oder *Dorsallinien* die Träger der Punktreihen: $\varrho\lambda_0,\ \varrho,\ \lambda_0,\ 1$, resp. $-\varrho\lambda_0,\ \varrho,\ -\lambda_0,\ 1$, resp. $\varrho,\ \varrho\lambda_0,\ 1,\ \lambda_0$, resp. $\varrho,\ -\varrho\lambda_0,\ 1,\ -\lambda_0$. *Die vier Dorsallinien liegen also auf dem Hyperboloid:* $xw - yz = 0$, was ja zu erwarten war:

Nimmt man in (20) das obere Zeichen und ist $\frac{b_1}{a} > -1$, so sind *die vier Pinchpoints imaginär.* Setzt man endlich in (20) das untere Zeichen, so sind *zwei Pinchpoints reell und zwei imaginär.*

Im ersten Falle besteht die Regelfläche aus zwei Theilen und im dritten Fall aus einem einzigen Theil. Im zweiten Fall besteht sie jedoch entweder aus zwei, sich längs der ganzen Erstreckung der singulären Geraden berührenden Mänteln, oder sie ist imaginär, je nachdem $\frac{b_2}{a} < 0$ oder $\frac{b_2}{a} > 0$ ist. Man gelangt zu den Gestalten dieser Flächen am besten, wenn man die Doppelgeraden der Flächen in Nr. 9, Nr. 10 und Nr. 11 einander unendlich nahe rücken lässt.

21) *Die Fläche mit Selbstberührungsgeraden erhält eine Doppel-Erzeugende*, wenn die Correspondenz sich auf:

$$a\lambda^4 + 2b_1\lambda^2 + b_2\lambda'^2 = 0$$

reducirt, also die Flächengleichung in:

$$ax^4 + 2b_1x^2y^2 + b_2(xw - yz)^2 = 0 \tag{21}$$

übergeht.

Ist $\frac{b_1}{a} < 0$, so existiren noch zwei reelle Pinchpoints; zugleich liegt die Doppelerzeugende *reell* auf der Fläche, wenn $\frac{b_1}{b_2} < 0$ ist, sie ist dagegen *isolirt*, wenn $\frac{b_1}{b_2} > 0$ ist. Ist $\frac{b_1}{a} > 0$, so giebt es keine reellen Pinchpoints mehr; auch in diesem Falle ist die Doppelerzeugende *reell*, wenn $\frac{b_1}{b_2} < 0$, und *isolirt*, wenn $\frac{b_1}{b_2} > 0$ ist.

Die Regelfläche mit Selbstberührungsgeraden und einer Rückkehr-Erzeugenden erfordert die zwei-zweideutige Zuordnung: $a\lambda^3 + \lambda'^2 = 0$; ihre Gleichung wird desshalb:

$$ax^3y + (xw - yz)^2 = 0. \tag{22}$$

Jede Ebene durch den Punkt $x = y = z = 0$ schneidet diese Fläche in einer Curve mit Spitze, welche in sich eine gewöhnliche Spitze und zwei Doppelpunkte vereinigt.

§ 4.

Die Regelflächen mit einer Doppelcurve 3. Ordnung.

22) Man denke sich auf einer Raumcurve 3. Ordnung in bekannter Weise einen Parameter λ ausgebreitet und das Coordinatensystem so gewählt, dass:

$$x : y : z : w = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1.$$

Die allgemeinste zwei-zweideutige Zuordnung der Curvenpunkte wird dann durch eine allgemeine in Bezug auf λ und μ *symmetrische* und quadratische Gleichung dargestellt. Wählt man nun drei geeignete Punkte der Raumcurve zum Null-, Einheits- und Unendlichkeitspunkt, indem man die gleichen Betrachtungen anstellt wie in Nr. 4, d. h. macht man eine geeignete lineare Transformation des Parameters, so nimmt die Gleichung der Verwandtschaft wieder die Form:

$$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\lambda^2+\mu^2) \pm a_{11} + 2a_{13}\lambda\mu = 0$$

an.

Auf der Curve 3. Ordnung giebt es wie früher vier singuläre Punkte, welche sich durch das Verschwinden der Discriminante unserer Gleichung bestimmen. Wie früher sind für das obere Zeichen und $\frac{(a_{11}+a_{22})^2 - a_{13}^2}{a_{11}a_{22}} < 0$ *alle vier singulären Punkte reell;* für das obere Zeichen und $\frac{(a_{11}+a_{22})^2 - a_{13}^2}{a_{11}a_{22}} > 0$ sind sie *alle vier imaginär*, für das untere Zeichen endlich sind *zwei singuläre Punkte reell und zwei imaginär.*

Die Regelfläche wird erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte, also durch die Punkte:

$$x = \lambda^3 + \varrho\mu^3, \quad y = \lambda^2 + \varrho\mu^2, \quad z = \lambda + \varrho\mu, \quad w = 1 + \varrho.$$

Daraus folgt:

$$w\lambda\mu - z(\lambda+\mu) + y = 0$$

und:

$$z\lambda\mu - y(\lambda+\mu) + x = 0,$$

oder:

$$\lambda\mu : \lambda + \mu : 1 = (xz - y^2) : (xw - yz) : (yw - z^2) = X : Y : Z,$$

was in die Gleichung der Verwandtschaft eingesetzt die Flächengleichung:

$$(23) \qquad a_{11}(X^2 \pm Z^2) + a_{22}Y^2 + 2(a_{13} - a_{22})XZ = 0$$

liefert.

Unter den Punkten der Raumcurve 3. Ordnung giebt es *vier sich selbst entsprechende Punkte oder Doppelpunkte*, welche sich durch die Gleichung:

$$(24) \qquad a_{11}\lambda^4 + 2(a_{22} + a_{13})\lambda^2 \pm a_{11} = 0$$

bestimmen; dem entsprechend giebt es vier Tangenten der Raumcurve, welche der Regelfläche angehören.

23) Es sind jetzt die vorher aufgezählten drei Fälle weiter zu discutiren.

Erster Fall. *Die vier Pinchpoints der Regelfläche sind alle reell.* Durch die Pinchpoints A, B, C, D wird die Doppelcurve 3. Ordnung in vier Segmente getheilt; zwei Segmente, etwa $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, verlaufen reell auf der Fläche, die beiden andern sind isolirt. Wir denken uns Null- und Unendlichkeitspunkt auf die beiden Segmente $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gelegt, d. h. wir nehmen $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ und also:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - a_{13}^2 > 0.$$

Aus dieser Ungleichung folgt entweder:

$$a_{11} + a_{22} < \pm a_{13}, \quad \text{oder} \quad a_{11} + a_{22} > \pm a_{13}.$$

Ist: $-a_{22} > a_{11} \pm a_{13}$, so entsprechen jedem Punkte auf $\overline{AB}$ wieder zwei Punkte dieses Curvensegments, und Gleiches gilt für $\overline{CD}$; ist aber: $-a_{22} < a_{11} \pm a_{13}$, so entsprechen jedem Punkte auf $\overline{AB}$ zwei Punkte auf $\overline{CD}$ und umgekehrt. Die Richtigkeit des Gesagten erkennt man sofort, wenn man die Punkte beachtet, welche dem Punkte $\lambda = 0$ entsprechen. Im ersten Falle giebt es vier reelle Doppelpunkte — zwei auf jedem Segmente — und demnach *liegen auf der Regelfläche vier reelle Tangenten der Doppelcurve;* im letzteren *liegen auf der Regelfläche keine reellen Tangenten der Raumcurve.*

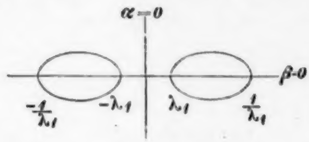
Die Regelflächen mit einer Doppelcurve 3. Ordnung und vier reellen Pinch-points zerfallen noch in zwei wesentlich verschiedene Arten. Bei der einen Art liegen je zwei correspondirende Punkte auf dem nämlichen Curvensegment, bei der andern Art jedoch auf verschiedenen Segmenten. Letztere Fläche besteht offenbar aus einem einzigen Flächentheil, der sich längs der Segmente $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *durchsetzt;* derselbe entsteht, wenn man eine Erzeugende gleichzeitig an den beiden Curvenstücken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einmal auf- und abgleiten lässt.

Erstere Fläche besteht aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve 3. Ordnung; der Uebergang von den einen zu den andern wird durch die vier Tangenten der Raumcurve gebildet, welche der Regelfläche angehören. Während die reellen Secanten durch zwei correspondirende reelle Parameter λ und μ bestimmt sind, sind die ideellen Secanten durch zwei conjugirt imaginäre Parameter $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ gegeben, wobei:

$$a_{11}(\alpha^2 + \beta^2)^2 + a_{11} + 2a_{22}(\alpha^2 - \beta^2) + 2a_{13}(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad \text{ist.} \tag{25}$$

Deutet man die α, β als rechtwinklige Coordinaten und sind λ_1, $-\lambda_1$, $\frac{1}{\lambda_1}$ und $-\frac{1}{\lambda_1}$ die Parameter der Doppelpunkte, so stellt diese

Gleichung eine Curve 4. Ordnung dar, welche die Axe $\beta = 0$ in den Punkten λ_1, $-\lambda_1$, $\frac{1}{\lambda_1}$, $-\frac{1}{\lambda_1}$ und die Axe $\alpha = 0$ in 4 imaginären Punkten schneidet. Die Curve besteht also aus zwei Ovalen, welche symmetrisch zu einander sind in Bezug auf die Axe $\alpha = 0$, wie die hier folgende Figur zeigt. Je zwei Punkte dieser Curve mit gleicher



Coordinate α bestimmen eine ideelle Doppelsecante, welche unserer Fläche angehört. Wir erkennen aus der Figur sofort, dass die ideellen Secanten zwei getrennte Serien bilden; jede Serie bildet den continuirlichen Uebergang von einer Tangente des Curvenstücks $\overline{AB}$ zu einer Tangente von $\overline{CD}$.

Die Fläche) besteht also aus einem einzigen Theile.* Von einer Erzeugenden ausgehend, welche $\overline{AB}$ zwei Mal trifft, und auf der Fläche stetig fortschreitend gelangt man zu einer Tangente $\overline{AB}$, dann zu ideellen Secanten und zu einer Tangente an $\overline{CD}$, weiter zu reellen Doppelsecanten von $\overline{CD}$ und zur zweiten Tangente an $\overline{CD}$, hierauf wieder zu ideellen Secanten und zur zweiten Tangente an $\overline{AB}$ und endlich zurück in die ursprüngliche Lage.

24) Zweiter Fall. *Die vier Pinchpoints der Regelfläche sind alle vier imaginär.* Nehmen wir wieder $a_{11} > 0$, so entsprechen dem Punkte $\lambda = 0$ zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte, je nachdem $a_{22} < 0$ oder $a_{22} > 0$. Ist $a_{22} > 0$ und also nach Nr. 22: $a_{11} + a_{22} > \pm a_{13}$, so entsprechen jedem reellen Punkte der Raumcurve zwei imaginäre Punkte derselben, *die Doppelcurve 3. Ordnung ist dann völlig isolirt.* Ist $a_{22} < 0$ und also: $(a_{11} + a_{22})^2 < a_{13}^2$, so entsprechen den reellen Punkten der Doppelcurve wieder reelle Punkte auf ihr, *die Doppelcurve verläuft also hier ganz reell auf der Fläche.*

a) *Die Doppelcurve ist isolirt*, d. h. $a_{22} > 0$; die Erzeugenden der Regelfläche können demnach, falls sie überhaupt reell sind, nur ideelle Secanten der Doppelcurve sein. Die Parameter $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ dieser Secanten müssen der Relation (25) genügen. Dieselbe stellt eine ganz imaginäre Curve 4. Ordnung dar, wenn $a_{13} > a_{22} - a_{11}$ ist; ist dagegen $a_{13} < a_{22} - a_{11}$, so stellt jene Gleichung eine Curve 4. Ordnung mit zwei Ovalen dar, welche die Axe $\alpha = 0$ schneiden

*) Neuntes Modell der Serie.

und zur Axe $\beta = 0$ symmetrisch liegen. *Die zugehörige Regelfläche ist demgemäss entweder ganz imaginär, oder sie besitzt einen hyperboloidartigen Theil, der von ideellen Secanten der Doppelcurve gebildet wird.*

b) *Die Doppelcurve verläuft ganz reell auf der Fläche*, d. h. $a_{22} < 0$, dann geht die Ungleichung: $(a_{11} + a_{22})^2 < a_{13}^2$ entweder in:

$$a_{13} > \pm(a_{11} + a_{22}) \quad \text{oder in:} \quad a_{13} < \pm(a_{11} + a_{22})$$

über. Tritt das Erstere ein, so sind die Doppelpunkte imaginär; *die Regelfläche besteht nur aus reellen Doppelsecanten der Raumcurve 3. Ordnung. Sie besitzt nur einen einzigen Mantel, der sich längs der ganzen Erstreckung der Doppelcurve selbst durchsetzt.* Erzeugt wird diese Fläche durch eine Doppelsecante, welche an der Raumcurve 3. Ordnung so hingleitet, dass ihre beiden Schnittpunkte dieselbe je ein Mal und zwar in gleichem Sinne durchlaufen.

Hat die Ungleichung: $a_{13} < \pm(a_{11} + a_{22})$ statt, dann sind die vier Doppelpunkte reell, unter den Erzeugenden der Fläche giebt es also vier reelle Tangenten der Doppelcurve. *Die Regelfläche besteht aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve.* Die Parameter der ideellen Secanten $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ bestimmen sich wieder durch die Gleichung (25), welche entweder eine Curve 4. Ordnung wie in Nr. 23, oder eine Curve mit zwei ineinander liegenden Ovalen vorstellt, von denen das eine durch λ_1 und $-\lambda_1$ und das andere durch $\frac{1}{\lambda_1}$ und $-\frac{1}{\lambda_1}$ hindurchgeht; eine wesentlich andere Gestaltung der Regelfläche wird dadurch jedoch nicht bewirkt.

Ohne mich länger bei dem Detail der Untersuchung aufzuhalten, gebe ich die Resultate, zu denen man leicht gelangt. Lässt man einen Punkt die Raumcurve 3. Ordnung durchlaufen, so durchlaufen die beiden correspondirenden Punkte die Raumcurve in umgekehrter Richtung, wodurch dann ersichtlich jene vier Doppelpunkte in λ_1, $-\lambda_1$, $\frac{1}{\lambda_1}$, $-\frac{1}{\lambda_1}$ entstehen. Die reellen Doppelsecanten der Raumcurve, welche der Regelfläche angehören, bilden zwei Serien, die von den Tangenten in λ_1 und $-\frac{1}{\lambda_1}$, respective von den Tangenten in $-\lambda_1$ und $\frac{1}{\lambda_1}$ begrenzt werden. Auch die ideellen Secanten bilden zwei Serien, von denen die eine durch die Tangenten in λ_1 und $\frac{1}{\lambda_1}$, die andere von den Tangenten in $-\lambda_1$ und $-\frac{1}{\lambda_1}$ begrenzt wird. *Die ganze Fläche*) besteht aus einem einzigen Flächentheil.* Geht man von der Tangente in λ_1 aus und lässt man diese Erzeugende stetig sich

*) Zehntes Modell der Serie.

auf der Fläche weiterbewegen, so wird dieselbe zuerst zur reellen Secante, deren Schnittpunkte die Raumcurve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, bis sie zur Tangente in $-\frac{1}{\lambda_1}$ wird. Jetzt wird die Erzeugende zur ideellen Secante, um dann in die Tangente des Punktes $-\lambda_1$ überzugehen, abermals wird sie reelle Secante, erreicht die Lage der Tangente in $\frac{1}{\lambda_1}$, wird nun nochmals ideelle Secante, um schliesslich in die Lage der Tangente in λ_1 zurückzukehren. Hiermit ist ein klares Bild dieser Fläche gegeben.

25) Dritter Fall. *Von den Pinchpoints der Regelfläche sind zwei reell und zwei imaginär.* Dann gilt in den Gleichungen von Nr. 22 das untere (negative) Zeichen; desshalb werden von den Doppelpunkten ebenfalls zwei reell und zwei imaginär. Ein Segment der Doppelcurve verläuft reell auf der Fläche, es sei mit $\overline{AB}$ bezeichnet, das andere ist isolirt. *Die Fläche besteht aus einem einzigen Theile, der von reellen und ideellen Secanten gebildet wird.* Geht man von einer der beiden Erzeugenden aus, welche die Doppelcurve tangiren, so werden bei continuirlicher Bewegung ihre Schnittpunkte auf $\overline{AB}$ sich fortbewegen, bis sie wieder coincidiren und die Erzeugende zur zweiten Tangente wird. Hierauf durchläuft die Erzeugende die ideellen Secanten und kehrt in ihre ursprüngliche Lage zurück. Der Beweis, dass die ideellen Secanten hier nur eine einzige Serie bilden, folgt daraus, dass die Curve:

$$a_{11}(\alpha^2+\beta^2)^2 - a_{11} + 2a_{22}(\alpha^2-\beta^2) + 2a_{13}(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

nur aus einem einzigen Ovale besteht.

26) *Specialfälle* der Regelflächen mit Doppelcurve 3. Ordnung erhalten wir, *wenn zwei Pinchpoints zusammenfallen.* Dann wird die Gleichung der Verwandtschaft:

$$a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\lambda^2+\mu^2) + 2a_{13}\lambda\mu = 0,$$

und demnach die Gleichung der Fläche:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2(a_{13}-a_{22})XZ = 0. \tag{26}$$

Existiren ausser dem singulären*) Punkte $\lambda = 0$ *noch zwei reelle Pinchpoints,* was durch die Ungleichung $\frac{a_{13}^2 - a_{22}^2}{a_{11}a_{22}} > 0$ bedingt wird, so sind noch drei Fälle zu unterscheiden, nämlich $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ und $a_{13} > a_{22}$, respective $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{13} < -a_{22}$, respective $a_{11} > 0$ und $a_{22} < 0$. Die *erste* Fläche ist ein Specialfall der Regelfläche mit 4 reellen Pinchpoints, welche aus nur reellen Secanten besteht, die

*) Der singuläre Punkt, welcher durch Zusammenrücken zweier Pinch-points entsteht, hat die Eigenschaft, dass die Schmiegungsebene in ihm aus der Regelfläche die doppelt zählende Tangente der Doppelcurve sowie einen Kegelschnitt ausschneidet, der jene Tangente im singulären Punkte berührt.

man gewinnt, indem man B und C zusammenrücken lässt. Die *beiden andern* Flächen sind Specialfälle der Regelfläche mit 4 reellen Pinchpoints, welche reelle und ideelle Secanten besitzt, sie entstehen je nachdem man bei dieser Fläche die Pinchpoints B und C, oder B und A vereinigt.

Existiren neben dem singulären Punkt $\lambda = 0$ *keine reellen Pinchpoints mehr*, d. h. ist $\frac{a_{13}^2 - a_{22}^2}{a_{11}a_{22}} < 0$, so sind ebenfalls noch drei Möglichkeiten ins Auge zu fassen. Ist *erstens* $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$, so verläuft die Doppelcurve ganz isolirt, nur an einer einzigen Stelle berührt sie den hyperboloidartigen Flächentheil, den die ideellen Secanten bilden. Ist *zweitens* $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ und $a_{13} > -a_{22}$, so verläuft die Doppelcurve ganz reell auf der Fläche. Hier giebt es keine reellen sich selbst entsprechenden Punkte, so dass alle Erzeugenden der Regelfläche reelle Secanten sind. Die Fläche entsteht, indem eine Secante so an der Doppelcurve hingleitet, dass ihre Schnittpunkte dieselbe in gleichem Sinne durchlaufen, und dass der eine Schnittpunkt bei seiner Bewegung den andern an der singulären Stelle einholt, um dann wieder hinter ihm zurückzubleiben. Ist *drittens* $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ und $a_{13} < a_{22}$, so liegt die Doppelcurve ebenfalls ganz reell auf der Fläche; dieselbe besteht aus reellen und ideellen Secanten, da es jetzt noch zwei reelle sich selbst entsprechende Punkte giebt. Geht man von der Tangente im singulären Punkte aus und schreitet stetig auf der Fläche fort, so durchlaufen die Schnittpunkte der Erzeugenden die Doppelcurve in entgegengesetzter Richtung, bis die Erzeugende die Lage der Tangente in einem, sich selbst entsprechenden Punkte annimmt. Nun wird die Erzeugende zur ideellen Secante und gelangt fortschreitend in die Lage der andern Tangente, um wieder zur reellen Secante zu werden und schliesslich in die Ausgangslage zurückzukehren.

Es können auch drei Pinchpoints zusammenrücken und einen singulären Punkt bilden, dann giebt es stets noch einen reellen Pinchpoint und einen reellen sich selbst entsprechenden Punkt. Diese Fläche entsteht, wenn man bei der Regelfläche mit vier reellen Pinchpoints, welche aus reellen und ideellen Secanten gebildet ist, die Punkte A, B, C zusammenfallen lässt. Ihre Gleichung ist:

(27) $$(X - Y)^2 - 4XZ = 0.$$

27) Eine besondere Beachtung verdient der Specialfall, wo *zwei Mal zwei Pinchpoints coincidiren*, wo also die Verwandtschaft die Form (7) annimmt. Demzufolge wird die Flächengleichung:

(28) $$Y^2 + 2aXZ = 0.$$

Die zwei-zweideutige Verwandtschaft zerfällt hier in die linearen Factoren: $(\lambda + n\mu)\left(\lambda + \frac{1}{n}\mu\right) = 0$; jeder Factor für sich bestimmt

eine ein-eindeutige Beziehung; beide sind so beschaffen, dass sie die Punkte der Raumcurve 3. Ordnung in derselben Weise einander zuordnen. Man übersieht unmittelbar folgenden Satz:

Verbindet man die entsprechenden Punkte zweier projectiver Punktreihen auf einer Raumcurve 3. Ordnung, so bilden die Verbindungslinien eine Regelfläche 4. Ordnung, deren Pinchpoints paarweise coincidiren. Diese Fläche besitzt einfach unendlich viele lineare Transformationen in sich, nämlich: $x' = \sigma^3 x$, $y' = \sigma^2 y$, $z' = \sigma z$, $w' = w$, wo man dem σ alle möglichen Zahlenwerthe beilegen kann, *ferner besitzt sie noch eine Transformation in sich, nämlich:*

$$x' = w,\quad y' = z,\quad z' = y,\quad w' = x.$$

Ist n reell, so liegt die Doppelcurve völlig reell auf der Fläche; ist n imaginär, so verläuft die Doppelcurve ganz isolirt, nur wird sie von dem Mantel der Fläche an zwei Stellen berührt. Geht man von der Regelfläche mit 4 reellen Pinchpoints aus, welche aus reellen und ideellen Secanten zusammengesetzt ist, und lässt A mit B und C mit D zusammenrücken, so gewinnt man letztere Fläche, rückt dagegen B mit C und D mit A zusammen, so entsteht erstere Fläche. Endlich können die beiden singulären Punkte noch conjugirt imaginär sein. Die zugehörige Fläche kann dann noch doppelter Art sein, wird sich aber von den Flächen mit 4 imaginären Pinchpoints und 4 imaginären sich selbst entsprechenden Punkten gestaltlich nicht unterscheiden.

Wenn schliesslich alle vier Pinchpoints coincidiren, so dass die Verwandtschaft die Form 8) annimmt, dann wird die Gleichung der Regelfläche:

$$X^2 \pm Y^2 \mp 4XZ = 0. \tag{29}$$

Die Fläche enthält die Doppelcurve entweder ganz reell, oder dieselbe verläuft ganz isolirt, je nachdem das untere oder obere Zeichen gilt. *Eine solche Fläche wird gebildet von den Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiver Punktreihen einer Raumcurve 3. Ordnung, welche sich in parabolischer Lage befinden.*

Nimmt man endlich *zwei identische Punktreihen* auf der Raumcurve 3. Ordnung, so erhält man die *abwickelbare Fläche* derselben. Aus $\lambda - \mu = 0$ folgt $(\lambda - \mu)^2 = 0$, oder $(\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu = 0$, und also als Gleichung der Regelfläche:

$$Y^2 - 4XZ = 0. \tag{30}$$

Auch hier hat man wieder unendlich viele lineare Transformationen der Fläche in sich.

§ 5.

Die Regelflächen mit einem Doppelkegelschnitt und einer Doppelgeraden.

28) Man wird eine Parametervertheilung auf der Doppelgeraden und dem Doppelkegelschnitt am zweckmässigsten so vornehmen, dass man dem Punkte, welcher beiden Gebilden gemeinsam ist, beide Mal den Parameter Null zuertheilt. Die zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen den Punkten λ der Doppelgeraden und den Punkten μ des Doppelkegelschnitts muss so beschaffen sein, dass dem Parameter $\lambda=0$ die Parameter $\mu^2=0$ und dem Parameter $\mu=0$ die Parameter $\lambda^2=0$ zugehören. Mit andern Worten: von den 4 singulären Punkten der beiden Punktreihen müssen je zwei in den Punkt $\lambda=\mu=0$ fallen, und demnach wird unsere Correspondenz durch die Gleichung:

$$(5) \qquad a_{11}\lambda^2\mu^2 + a_{22}(\mu^2 \pm \lambda^2) + 2a_{13}\lambda\mu = 0$$

dargestellt.

Um die Gleichung der zugehörigen Regelfläche zu erhalten, muss man noch das Coordinatentetraeder festlegen. Die Ebene des Doppelkegelschnitts sei $x=0$, die Ebene $z=0$ gehe durch die Doppelgerade und berühre den Kegelschnitt, die Ebene $w=0$ gehe ebenfalls durch die Doppelgerade und den Punkt $\mu=\infty$, endlich soll die Ebene $y=0$ durch die Punkte $\lambda=\infty$ und $\mu=\infty$ hindurchgehen und den Kegelschnitt berühren. Bei geeigneter Wahl des Einheitspunktes wird dann die Gleichung des Doppelkegelschnitts: $yz - w^2 = 0$. Die Punkte der Doppelgeraden haben die Coordinaten: $\lambda, 1, 0, 0$ und diejenigen des Doppelkegelschnitts die Coordinaten: $0, 1, \mu^2, \mu$; folglich stellt:

$$x = \varrho\lambda, \quad y = 1+\varrho, \quad z = \mu^2, \quad w = \mu$$

einen beliebigen Punkt der Regelfläche dar, wenn λ, μ der Gleichung (5) genügen. Setzen wir demnach $\mu = \frac{z}{w}$ und $\lambda = \frac{xz}{yz-w^2}$ in diese Gleichung ein, so erscheint als Gleichung der Regelfläche:

$$(31) \qquad a_{11}x^2z^2 + a_{22}\{(yz-w^2)^2 \pm x^2w^2\} + 2a_{13}xw(yz-w^2) = 0.$$

29) Es sind nun hier vier Fälle zu unterscheiden. *Erstens die Pinchpoints auf beiden Doppelgebilden sind reell*, dann gilt das obere Zeichen in (5) und es ist $\frac{a_{13}^2 - a_{22}^2}{a_{11}a_{22}} > 0$. Doppelgerade und Doppelkegelschnitt bestehen aus je zwei Segmenten, von denen jedes Mal das eine reell und das andere isolirt verläuft. Ist $a_{11}>0$ und $a_{22}<0$, so sind die beiden Segmente, auf welchen der singuläre Punkt $\lambda=\mu=0$ liegt, *isolirt*, ist dagegen $a_{11}>0$ und $a_{22}>0$, so liegen diese Segmente *reell* auf der Fläche.*)

*) Achtes Modell der Serie.

Zweitens die Pinchpoints auf beiden Doppelgebilden sind imaginär, dann gilt wiederum in (5) das obere Zeichen und $\frac{a_{13}^2 - a_{23}^2}{a_{11} a_{12}} < 0$. Ist $a_{11} > 0$ und $a_{22} < 0$, so liegen Doppelgerade und Doppelkegelschnitt *völlig reell* auf der Fläche, ist dagegen $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$, so ist die Fläche mit Ausnahme der Doppelgebilde *ganz imaginär*.

Drittens die Pinchpoints der Doppelgeraden sind reell, die des Doppelkegelschnitts sind imaginär. Jetzt gilt in (5) das untere Zeichen und es ist $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$. Der Doppelkegelschnitt liegt ganz reell auf der Fläche, ebenso das Segment der Doppelgeraden, welches den singulären Punkt $\lambda = \mu = 0$ trägt. *Viertens die Pinchpoints der Doppelgeraden sind imaginär, die des Doppelkegelschnittes sind reell.* Dann gilt wieder das untere Zeichen in (5) und es ist $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$. Die Doppelgerade liegt völlig reell auf der Fläche, ebenso das Segment des Doppelkegelschnitts, welches den singulären Punkt $\lambda = \mu = 0$ trägt. Wie die Bewegung einer Erzeugenden auszuführen ist, damit die aufgezählten Flächen entstehen, ist leicht anzugeben und kann hier übergangen werden.

30) Der einzige *Specialfall*, welcher hier existirt, ist der, dass je ein Pinchpoint der Doppelgeraden und des Doppelkegelschnitts in den singulären Punkt $\lambda = \mu = 0$ hereinrückt, das heisst, dass die Verwandtschaft die Form (7) annimmt. Die zugehörige Regelfläche erhält somit die Gleichung:

$$x^2 z^2 - 2xz(xw + yz - w^2) + (xw - yz + w^2)^2 = 0. \tag{32}$$

Diese Fläche berührt die Ebene $z = 0$ — abgesehen von der Doppelgeraden — längs der Geraden $x + w = 0$. Jede Ebene durch den singulären Punkt schneidet aus der Fläche eine Curve mit Spitze aus, welche durch Vereinigung einer gewöhnlichen Spitze mit einem Doppelpunkt entstanden ist.

§ 6.

Die Regelflächen mit einer dreifachen Geraden.

31) Bei der Aufzählung dieser Regelflächen, welche sich bereits vollständig in meiner in der Einleitung citirten Abhandlung vorfinden, kann ich mich ganz kurz fassen und verweise bezüglich der Details auf jene Abhandlung. Hier giebt es keine zwei-zweideutige Zuordnung mehr, welche zum Ausgangspunkt der Betrachtung genommen werden könnte, vielmehr legen wir hier die Gleichung:

$$u_3 + z v_3 + u_4 = 0$$

zu Grunde, wo u_3 und v_3 homogen vom 3. Grade und u_4 homogen vom 4. Grade in Bezug auf xy ist. Es giebt dann im Allgemeinen

in jedem Punkte der dreifachen Geraden drei von einander verschiedene Tangentialebenen, nur vier Punkte machen eine Ausnahme, indem in ihnen zwei Tangentialebenen coincidiren; wir bezeichnen dieselben wieder als *Pinchpoints.* Von diesen Pinchpoints können 4 reell, oder 4 imaginär, oder 2 reell und 2 imaginär sein. Im ersten Fall zerfällt die dreifache Gerade in 4 Segmente, durch zwei derselben gehen drei durch die beiden übrigen nur ein Mantel der Fläche*); im dritten Falle besteht die dreifache Gerade aus 2 Segmenten, im einen durchsetzen sich 3, durch den andern geht nur ein Mantel der Fläche. Im zweiten Falle endlich giebt es durch die dreifache Gerade längs ihrer ganzen Erstreckung entweder *einen* oder *drei* Mäntel der Fläche. Speciell können von den Pinchpoints zwei, oder auch zwei Mal zwei zusammenrücken.

32) Haben u_3 und v_3 einen gemeinsamen linearen Factor, so ist von den drei Tangentialebenen in den Punkten der dreifachen Geraden *eine constant***) und nur zwei bleiben beweglich. Zugleich rücken zwei Pinchpoints zu einem höheren singulären Punkt zusammen und es bleiben nur noch zwei gewöhnliche reelle oder imaginäre Pinchpoints übrig. Speciell kann noch einer dieser Pinch-points in den singulären Punkt hineinrücken.

Stimmen zwei lineare Factoren von u_3 und v_3 überein, so sind von den Tangentialebenen in den Punkten der dreifachen Geraden *zwei constant* und es treten auf derselben zwei höhere singuläre Punkte auf. Speciell können die constanten Tangentialebenen zusammenfallen und eine Rückkehrkante bilden, dann tritt Gleiches für die singulären Punkte ein. Letztere Fläche bildet den Uebergang von den Flächen mit zwei constanten und reellen Tangentialebenen längs der dreifachen Geraden zu den Flächen, bei welchen dieselben imaginär sind.

Dresden, den 25. Juli 1886.

*) Sechstes Modell der Serie.

**) Siebentes Modell der Serie.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von

Georg Pick in Prag.

Wenn ein elliptisches Integral erster Gattung in irgenwelcher Form gegeben ist: so hat man es immer als eine fundamentale Forderung für jede weitere Rechnung anzusehen, die elementaren elliptischen Functionen, wenn das Argument derselben durch das gegebene Integral ersetzt wird, als explicite Ausdrücke in den Grenzen und Constanten des Integrals darzustellen. Formeln, welche dieses wenigstens zum Theil leisten, sind seit längerer Zeit bekannt für die Form des elliptischen Differentials

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

worin $f(x)$ ein Polynom vierten (oder dritten) Grades in x bedeutet; und zwar aus den Untersuchungen von Hrn. Weierstrass*) und von Hrn. Scheibner**). Allein erst von Hrn. Klein***) ist dieses Formelsystem vervollständigt, und, was wichtiger ist, den Ausdrücken eine Schreibweise ertheilt worden, welche ihr wahres Bildungsgesetz aufdeckt, und so den Fortgang zu verwandten höheren Problemen ermöglicht. Es ist dies diejenige Schreibweise, welche den Charakter der verwendeten Ausdrücke als *Covarianten* einer binären Grundform 4^{ten} Grades (des homogen gemachten Polynoms $f(x)$) zum Ausdruck bringt.

Wenn man nun die in Rede stehende Aufgabe für irgend eine andere Darstellungsform des elliptischen Gebildes zu lösen unternimmt, so wird man von vornherein eine invariantentheoretische Darstellung anstreben. Denn abgesehen von der erwähnten principiellen Wichtigkeit einer solchen Darstellung, bietet sie noch den Vortheil, dass

---

*) In dessen zu Berlin gehaltenen Vorlesungen über elliptische Functionen.

**) In Bd. 12 d. Abhandl. d. math. phys. Classe der k. sächs. Ges. d. W.: „Zur Theorie der Reduction elliptischer Integrale in reeller Form."

***) Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen, Math. Ann., XXVII (§ 11).

die Gültigkeit der erhaltenen Formeln vollständig durch Uebergang zu einer passend gewählten Normalform erwiesen werden kann. Dies ist von Bedeutung in Fällen, wo die gewünschten Formeln zunächst nur hypothetisch aufgestellt werden können; was gerade in den folgenden Entwickelungen zur Geltung kommen wird. *Dass übrigens die invariante Darstellung stets möglich sein muss, ist klar: die elliptischen Functionen des Integrals erster Gattung sind ihrem Begriffe nach Covarianten des elliptischen Gebildes.*

Die allgemeine so charakterisirte Aufgabe soll hier gelöst werden unter der Voraussetzung, dass das elliptische Gebilde in Form einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung vorgelegt ist*). Wir werden zwei Reihen von Formeln finden entsprechend zwei verschiedenen Annahmen für das Argument der elliptischen Functionen. Die erste Reihe stellt das genaue Analogon der Klein'schen Formeln des binären Gebietes vor; die zweite ist hauptsächlich um deswillen interessant, weil in ihr als ganz specieller Fall jenes Gleichungssystem enthalten ist, welches Hermite und Brioschi**) für die Transformation einer Curve dritter Ordnung auf die sogenannte Weierstrass'sche Normalform angegeben haben.

Hinsichtlich der Schreibweise, welche im Folgenden verwendet wird, muss noch folgendes bemerkt werden. Es ist von vorneherein klar, dass für die Durchführung der zu den vorliegenden Zwecken erforderlichen Rechnungen die Aronhold-Clebsch'sche (oder eine gleichwerthige) Symbolik von wesentlichem Vortheil sein muss. Wenn also diese hier durchaus festgehalten wird, so ist doch im Interesse der Symmetrie in den Endformeln eine kleine Abweichung beliebt worden, nämlich von der Verwendung verschiedener (gleichwerthiger) Zeichen für ein und dasselbe Symbol Umgang genommen worden. Da zusammengehörige Symbole in jenen Formeln nie räumlich getrennt erscheinen (also auch verschiedene Symbole nie in Wechselbeziehung treten), so war diese Abweichung ganz unbedenklich.

§ 1.

Erster Ansatz.

Es sei

$$a_x^3 = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer ebenen Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt; x und y (ausführlicher x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3) seien variable Punkte derselben, k ein beliebiger Punkt der Ebene. Unter dieser Voraussetzung werde das Integral erster Gattung

*) Vergl. Sitzungsberichte der Wiener Akademie vom Juni 1886.

**) Crelle's Journal Bd. 63, pag. 30.

$$u = \int_y^x \frac{(k\,\xi\,d\,\xi)}{a_k\,a_\xi^2} \tag{2}$$

längs der Curve erstreckt, und als Argument in die elliptischen Transcendenten

$$\wp u, \ \wp' u, \ \sigma u$$

eingesetzt. Unsere Aufgabe soll sein, diese drei Grössen durch x, y und die Constanten der Curve in covarianter Form auszudrücken. Wir beschränken uns zunächst auf $\wp u$ und $\wp' u$, welche von x und y rational abhängen.

Unter der Voraussetzung eines unendlich kleinen u, ist bekanntlich in erster Annäherung

$$\wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \wp' u = -\frac{2}{u^3}.$$

Wenn wir nun y und x einander sehr nahe rücken lassen, so wird in der That u unendlich klein und zwar

$$= -\frac{(kxy)}{a_k\,a_x^2}$$

nach (2). Also ergiebt sich unter solcher Annahme

$$\wp u = \frac{(a_k a_x^2)^2}{(kxy)^2}, \quad \wp' u = \frac{2\,(a_k a_x^2)^3}{(kxy)^3}.$$

Hieraus entnehmen wir folgende Directiven für die Aufstellung jener beiden Ausdrücke:

$\wp u$ und $\wp' u$ können als Quotienten mit den Nennern $(kxy)^2$ resp. $(kxy)^3$ angesetzt werden. Die Zähler sind bezw. homogen vom zweiten und vom dritten Grade in den Coefficienten der Grundcurve und jeder der Coordinatenreihen k, x, y, und reduciren sich für $y = x$ auf

$$(a_k a_x^2)^2 \quad \text{resp.} \quad 2\,(a_k a_x^2)^3.$$

Die gesammten Ausdrücke können selbstverständlich den Hilfspunkt k nur scheinbar enthalten.

Ausserdem folgt noch aus dem bekannten Verhalten von $\wp u$ und $\wp' u$ bei Umkehrung des Vorzeichens von u, dass beide Zähler in x und y symmetrisch gebildet sein müssen. Diese Bestimmung ist indess schon in den vorigen implicite enthalten, wie der Erfolg unserer Entwickelungen zeigen wird.

Wir versuchen nun die fraglichen Zähler unter der Hypothese zu bestimmen, dass sie *ganze* Functionen der Coefficienten von a_x^3 sind. Gelingt die Durchführung, so ist nachträglich die Richtigkeit der gefundenen Formeln erst noch strenge zu beweisen.

§ 2.

Formeln für $\wp u$ und $\wp' u$.

Um den Zähler Z von $\wp u$ aufzustellen, haben wir nach dem Gesagten zuerst den allgemeinsten ganzen covarianten Ausdruck zu ermitteln, welcher vom zweiten Grade in den Coefficienten von a_x^3 und jeder der Coordinatenreihen k, x, y ist. Die unbestimmten numerischen Constanten, welche in denselben eingehen, werden wir dann so zu bestimmen haben, dass der Ausdruck für $y = x$ in das Quadrat von $a_k a_x^2$ übergeht, und dass er, durch $(kxy)^2$ dividirt, von den k unabhängig wird.

Nun kann man bekanntlich jede ganze Covariante, deren Gesammtgrad in den *Variablen* mit dem Gesammtgrade in den *Symbolen* der Grundform übereinstimmt, als ein Aggregat von Termen anschreiben, deren jeder ein Product aus *Polaren* der Grundform ist. In unserem Falle werden immer je zwei Polaren mit einander multiplicirt ein Glied des Ausdrucks bilden, weil zwei der Grad in den Coefficienten von a_x^3 sein soll. Vertheilen wir nun die Coordinatenreihen in allen möglichen Weisen auf zwei Polaren, so ergiebt sich folgende Tabelle von überhaupt möglichen Termen:

$$(a_k a_x a_y)^2; \quad a_k a_x^2 \cdot a_k a_y^2; \quad a_k^2 a_x \cdot a_x a_y^2; \quad a_k^2 a_y \cdot a_y a_x^2.$$

Diese multipliciren wir der Reihe nach mit den unbestimmten Coefficienten M, N, P, Q und addiren.

Für $y = x$ verwandelt sich der so erhaltene Ausdruck in

$$(M + N)\,(a_k a_x^2)^2,$$

so dass wir als eine erste Bedingung

$$M + N = 1 \tag{3}$$

zu verzeichnen haben.

Um $\frac{Z}{(kxy)^2}$ von den k unabhängig zu machen, verfahren wir auf Grund folgender Ueberlegung. Der Nenner $(kxy)^2$ stellt, gleich Null gesetzt, die doppelt gezählte Verbindungslinie von x und y dar, falls k als variabler Punkt aufgefasst wird. $Z = 0$ hingegen ist unter dieser Auffassung die Gleichung eines Kegelschnitts. Soll nun die geforderte Unabhängigkeit stattfinden, so muss dieser Kegelschnitt in die doppelt gezählte Gerade $\overline{xy}$ übergehen. Wir erreichen dies, indem wir demselben sowohl bei $k = x$ als bei $k = y$ je einen Doppelpunkt ertheilen; wir setzen also in Z für k einmal $x + \lambda k$, dann $y + \lambda k$, und lassen beidemal die Glieder 0^{ter}, sowie 1^{ter} Dimension in λ sich wegheben. Dies giebt folgende Gleichungen für die Coefficienten M, N, P, Q:

$$\begin{aligned} M + Q &= 0, & M + P &= 0, \\ N + 2P &= 0, & N + 2Q &= 0, \\ 2M + 2Q &= 0, & 2M + 2P &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus und aus der früher erhaltenen Gleichung (3) ergeben sich die Werthe der unbestimmten Coefficienten in eindeutiger Weise, wie folgt:

$$M = \frac{1}{3}, \quad N = \frac{2}{3}, \quad P = -\frac{1}{3}, \quad Q = -\frac{1}{3}.$$

Somit erhalten wir die hypothetische Formel:

$$\text{(I)} \qquad \wp u = \frac{(a_k a_x a_y)^2 + 2 a_k a_x^2 \cdot a_k a_y^2 - a_k^2 a_x \cdot a_x a_y^2 - a_k^2 a_y \cdot a_y a_x^2}{3(kxy)^2}.$$

In ähnlicher Weise bezüglich $\wp' u$ verfahrend, gelangen wir zu der Formel

$$\text{(II)} \quad \wp' u = \frac{2 a_k a_x a_y \cdot a_k a_x^2 \cdot a_k a_y^2 - a_k^2 a_x \cdot a_k a_y^2 \cdot a_x^2 a_y - a_k^2 a_y \cdot a_k a_x^2 \cdot a_y^2 a_x - a_k^3 \cdot a_x^2 a_y \cdot a_x a_y^2}{(kxy)^3}.$$

§ 3.

Darstellung von σu.

Die erforderliche Verification der eben gefundenen Formeln soll im nächsten Paragraphen nachgetragen werden. Für jetzt nehmen wir sie als richtig an, und gründen auf sie die Darstellung von σu. Den Ausgangspunkt*) bildet dabei folgende Formel:

$$\text{(4)} \qquad \sigma^2(v - w) = \frac{1}{\wp(v - w) - \wp(v + w)} \, e^{-\int\limits_w^v\int\limits_w^v \wp(\varphi+\psi)\, d\varphi\, d\psi},$$

deren Richtigkeit leicht eingesehen wird durch Auswerthung des Doppelintegrals auf Grund der bekannten Identität**)

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(\varphi + \psi)}{\partial \varphi \partial \psi} = -\wp(\varphi + \psi)$$

und nachherige Benutzung der Relation***)

$$\wp(v + w) - \wp(v - w) = -\frac{\sigma(2v) \cdot \sigma(2w)}{\sigma^2(v + w) \cdot \sigma^2(v - w)}.$$

*) Vgl. F. Klein, a. a. O.

**) S. „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen." Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Hrn. K. Weierstrass bearb. u. herausg. v. H. A. Schwarz § 9 (1).

***) Ebend. § 11 (1).

Wir werden nun das Integral

$$u = \int_y^x \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}$$

als Differenz zweier anderer v und w auffassen, indem wir einen beliebigen Hülfspunkt z^0 auf der Curve annehmen und setzen

$$\int_{z^0}^x \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} = v, \quad \int_{z^0}^y \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} = w.$$

Es handelt sich jetzt darum neben $\wp(v-w)$, das wir kennen, auch noch $\wp(v+w)$ zu bilden. Um zu diesem Zwecke die Formel (I) des vorigen Paragraphen verwenden zu können, muss $(v+w)$ in die Form eines einzigen Integrals gebracht werden. Diess leistet das Abel'sche Theorem. Bezeichnen wir mit z den Tangentialpunkt von z^0, mit x' den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie von y und z mit der Curve, so sind die Punkte y, x' dem doppelt gezählten Punkte z^0 corresidual, und es ist daher

$$\int_{z^0}^y \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} + \int_{z^0}^{x'} \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} = 0.$$

Also wird

$$v + w = \int_{x'}^x \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}.$$

Wendet man nun Formel (1) des vorigen Paragraphen zur Herstellung von $\wp(v+w)$ an, so empfiehlt es sich, den willkürlichen Punkt k derselben mit z zusammenfallen zu lassen. Man erhält so zunächst

$$\wp(v+w) = \frac{(a_z a_x a_{x'})^2 + 2 a_z a_x^2 \cdot a_z a_{x'}^2 - a_z^2 a_x \cdot a_x a_{x'}^2 - a_z^2 a_{x'} \cdot a_{x'} a_x^2}{3(zxx')^2},$$

und es bleibt nun noch, x' durch y und z zu ersetzen. Dies geschieht leicht, indem man die Coordinaten von x' linear aus denen von y und z zusammensetzt:

$$x_i' = \lambda z_i - \mu y_i,$$

und $\lambda : \mu$ aus

$$a_{x'}^3 = 0$$

entnimmt:

$$\lambda : \mu = a_z a_y^2 : a_z^2 a_y.$$

Die Ausführung der Rechnung ergiebt:

$$\text{(5)} \quad \wp(v+w) = \frac{(a_z a_x a_y)^2 - a_z a_x^2 \cdot a_z a_y^2 - a_z^2 a_x \cdot a_x a_y^2 - a_z^2 a_y \cdot a_y a_x^2}{3(zxy)^2}.$$

Indem wir nun auch in $\wp(v-w)$ $(=\wp u)$ den willkürlichen Punkt k mit z coincidiren lassen, ergiebt sich:

$$\frac{1}{\wp(v-w)-\wp(v+w)}=\frac{(zxy)^2}{a_z a_x{}^2\cdot a_z a_y{}^2}.$$

Um das in (4) vorkommende Doppelintegral umzugestalten, führen wir an Stelle von φ und ψ zwei neue Integrationsvariable, die Punkte ζ und ζ' der Curve, vermöge der Relationen ein:

$$\int\limits_{z^0}^{\zeta}\frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta{}^2}=\varphi,\qquad \int\limits_{z^0}^{\zeta'}\frac{(k'\zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}{}^2}=\psi.$$

Es wird auf solche Weise:

$$d\varphi=\frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta{}^2},\qquad d\psi=\frac{(k'\zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}{}^2},$$

und die Integrationsgrenzen verwandeln sich augenscheinlich in x, y (für v, w). Indem wir $\wp(\varphi+\psi)$ aus Formel (5) entnehmen, ergiebt sich der gewünschte Ausdruck für das Doppelintegral, und mit Rücksicht auf (4) wird endlich

(III) $$\sigma u=\frac{(zxy)^2}{a_z a_x{}^2\cdot a_z a_y{}^2}\cdot e^{-Q(x,y)},$$

wobei

(ad III) $$Q(x,y)=\int\limits_y^x\int\limits_y^x\frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta{}^2}\cdot\frac{(k'\zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}{}^2}\times$$

$$\times\frac{(a_z a_\zeta a_{\zeta'})^2-a_z a_\zeta{}^2\cdot a_z a_{\zeta'}{}^2-a_z{}^2 a_\zeta\cdot a_\zeta a_{\zeta'}{}^2-a_z{}^2 a_{\zeta'}\cdot a_{\zeta'} a_\zeta{}^2}{(z\zeta\zeta')^2}.$$

Formel (III) enthält ausser den gänzlich willkürlichen Punkten k und k' noch den auf der Curve gelegenen Hülfspunkt z, welcher, als Tangentialpunkt des beliebigen und in der Formel nicht mehr vorkommenden Punktes z^0 der Curve, selbst auf dieser ganz willkürlich angenommen werden darf. Der Ausdruck für σu ist in Wahrheit ebensowol von k und k', wie von z unabhängig.

Man wird leicht erkennen, dass die Entwickelungen dieses Paragraphen im Grunde genommen auf der Projection der Curve aus einem beliebigen ihrer Punkte (z) in das binäre Gebiet (die bekannte doppeltüberdeckte Gerade resp. complexe Ebene mit vier Verzweigungspunkten) beruhen.

§ 4.

Verification der Formeln für $\wp u$ und $\wp' u$.

Die Formeln (I) und (II) des § 2 besitzen, wie zum Theil schon angedeutet, zwei Eigenschaften, welche es ermöglichen, ihre Richtigkeit mühelos sicherzustellen. Die eine besteht in der Invarianz bei linearen Transformationen; die andere in der gänzlichen Unabhängigkeit der Ausdrücke von dem Hülfspunkt k. Wir werden also im Folgenden einerseits als Grundcurve eine geeignete Normalform wählen, welche nur, wie man zu sagen pflegt, projectivisch allgemein sein muss; andererseits den Punkt k in beliebiger zweckentsprechender Weise specialisiren. Erweisen sich die Formeln unter solchen speciellen Voraussetzungen richtig, so sind sie es allgemein.

Als Normalform der Curve dient in unserem Falle am Besten die sogenannte „Weierstrass'sche"; und zwar setzen wir dementsprechend

$$a_x^3 \equiv \frac{3}{2}(4x_1^3 - g_2 x_1 x_2^2 - g_3 x_2^3 - x_2 x_3^2) = 0. \tag{6}$$

Ferner wählen wir für k einen Punkt der Curve selbst, und zwar

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1.$$

Nun können wir die variablen Grenzen x, y des Integrals u in der Gestalt

$$\begin{aligned} x_1 &= \wp v, & x_2 &= 1, & x_3 &= \wp' v, \\ y_1 &= \wp w, & y_2 &= 1, & y_3 &= \wp' w \end{aligned}$$

annehmen, wodurch ja bei variablen v, w in der That zwei willkürliche Punkte der Curve (6) ausgedrückt sind. Zunächst wird dann

$$u = v - w;$$

die Formeln (1) und (2) verwandeln sich daher in Ausdrücke für $\wp(v-w)$ und $\wp'(v-w)$ durch $\wp v$, $\wp' v$, $\wp w$, $\wp' w$. Es wäre überflüssig die ganz elementare Rechnung hier wirklich durchzuführen. Das Resultat ist, dass die Formeln vollständig mit den bekannten Additionstheoremen der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$*) übereinstimmen. Hierdurch ist nach dem Gesagten die Richtigkeit der Formeln für $\wp u$ und $\wp' u$ und also auch der für σu strenge erwiesen.

§ 5.

Anwendungen.

Die in den vorigen Paragraphen aufgestellten Ausdrücke der elementaren elliptischen Transcendenten (I), (II), (III) sind die *Grund-*

*) S. „Formeln und Lehrsätze etc." § 12, (4) und (11).

formeln für die Anwendung der Theorie in Fällen, wo eine Curve dritter Ordnung als Grundgebilde vorliegt. Die allgemeinste Form nämlich, unter welcher das Argument u sich einstellen kann, ist die einer Summe von Integralen erster Gattung. Eine solche aber wird durch das Abel'sche Theorem jederzeit zu einem einzigen Integral zusammengefasst werden können, worauf die entwickelten Formeln unmittelbar verwendbar werden.

Es ist indess nicht ohne Interesse jene Formeln direct für Argumente der erwähnten complicirteren Art umzugestalten, und wenigstens der niedrigste Fall soll hier noch zur Sprache gelangen, derjenige, wo das Argument u

$$(7) \qquad = \left(\int_\alpha^x + \int_\beta^y + \int_\gamma^z\right) \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} \text{ *)}$$

ist, unter x, y, z willkürliche, unter α, β, γ Punkte auf einer Geraden verstanden, welche sämmtlich der Curve angehören. Welches die Gerade $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ist, ist für den Werth von u in Folge des Abel'schen Theorems gleichgültig. Insbesondere kann man dieselbe also durch zwei der Punkte x, y, z selbst hindurchlegen. Bezeichnen wir den dritten Schnittpunkt von $\overline{yz}$ mit der Curve durch x', den von $\overline{zx}$ mit y', den von $\overline{xy}$ mit z', so ergiebt sich hiernach folgende Reihe von Darstellungen der Grösse u durch ein einziges Integral:

$$(7\text{a}) \qquad u = \int_{x'}^x \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} = \int_{y'}^y \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} = \int_{z'}^z \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}.$$

Wenn wir nun etwa auf die erste dieser Darstellungen die Formeln für $\wp u$ und $\wp' u$ zur Anwendung bringen wollen, so erkennen wir, dass die Aufgabe für $\wp u$ schon in § 3 gelöst ist, und zwar durch die Formel (5), welche wir hier in vollkommen symmetrischer Schreibweise wiederholen:

$$(\text{I}') \qquad \wp u = \frac{(a\ a_y a_z)^2 - a_x a_y^2 \cdot a_x a_z^2 - a_y a_z^2 \cdot a_y a_x^2 - a_z a_x^2 \cdot a_z a_y^2}{3(xyz)^2}.$$

In ähnlicher Weise geht durch Anwendung der Formel (II) auf unseren Fall, wenn man wieder x' in bekannter Weise durch seinen linearen Ausdruck in y, z ersetzt, folgende Formel für $\wp' u$ hervor:

$$(\text{II}') \qquad \wp' u = \frac{a_y^2 a_z \cdot a_z^2 a_x \cdot a_x^2 a_y - a_y a_z^2 \cdot a_z a_x^2 \cdot a_x a_y^2}{(xyz)^3}.$$

---

*) In leicht verständlicher Abkürzungsweise.

Beide gefundenen Ausdrücke zeigen die zu erwartende Symmetrie in x, y, z. Nicht das Gleiche ist der Fall, wenn man nun auch für σu auf Grund von (III) einen Ausdruck herstellt. Es ist nicht möglich die Constructionspunkte x' (resp. y', z') ganz aus demselben zu entfernen, weil sie in den Grenzen des Doppelintegrals als nothwendig auftreten. Aus diesem Grunde übergehen wir hier die explicite Aufstellung der Formel*).

Neuberg in Steiermark, im August 1886.

---

*) Es sei gestattet hier noch folgende Bemerkungen hinzuzufügen. Den Formeln des § 2 entsprechen andere, als Umkehrung derselben. Setzt man nämlich die eine Grenze des Integrals (etwa x) als bekannt voraus und ferner $\wp u$ und $\wp' u$, so ist die andere (y) dadurch bestimmt. Man findet Ausdrücke für die Coordinaten von y bei Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, S. 653, Gl. (75).

Die Formeln des letzten Paragraphen sind es, welche beim Uebergange zur Grenze $x = y = z$ in die oben erwähnten Ausdrücke von Hermite-Brioschi sich verwandeln müssen. Denn man lasse dann α, β, γ mit einem der Wendepunkte der Curve zusammenfallen, so lautet das Argument der Functionen

$$3 \cdot \int_{\alpha}^{x} \frac{(k \zeta d \zeta)}{a_k a_\zeta^2}$$

welches in der That den Hermite-Brioschi'schen Formeln zu Grunde liegt.

Ueber Gruppen von Bewegungen.

(Erste Abhandlung).

Von

A. Schönflies in Göttingen.

Die aus Bewegungen gebildeten Gruppen sind zuerst von Herrn Camille Jordan*) ausführlich untersucht worden.

Derartige Gruppen besitzen ausser dem mathematischen Interesse, welches ihnen innewohnt, grosse Wichtigkeit für die Theorie der Krystallstructur. Die Aufgabe, alle theoretisch möglichen Krystallformen zu finden, führt auf Bewegungsgruppen. Bravais**) war der erste, welcher systematische Untersuchungen auf mathematischer Basis hierüber anstellte; in neuster Zeit hat Herr Sohncke in seinem Buch „Entwicklung einer Theorie der Krystallstructur" eine vollständige Zusammenstellung derselben gegeben***).

Wie Herr Sohncke zuerst bemerkt hat, weist die Jordan'sche Abhandlung einige Lücken auf. Diese Lücken sind in dem eben genannten Buche ausgefüllt worden†). Da jedoch bei Herrn Sohncke die gruppentheoretische Seite des Problems mehr in den Hintergrund tritt, so soll im Folgenden die Untersuchung der aus Bewegungen gebildeten Gruppen nochmals aufgenommen werden. Ich gewinne die allgemeinen Bewegungsgruppen durch Zusammensetzung von Gruppen einfacher Art. Die Methoden glaube ich so gewählt zu haben, dass sie jede Gruppe, und jede nur einmal liefern††).

---

*) Mémoire sur les groupes de mouvements. Annali di mat. Serie II, Bd. 2, pg. 167 und 322.

**) Mémoire sur les systèmes formés par des points etc. Journ. de l'école polyt. Heft 33, pg. 1.

***) Bezüglich der übrigen Literatur, soweit sie die krystallographische Seite der Frage betrifft, verweise ich auf die historische Einleitung des oben genannten Sohncke'schen Buches.

†) Vgl. z. B. pg. 26 und pg. 131.

††) Bei Herrn Sohncke tritt eine Gruppe doppelt auf; vgl. später § 4, 13.

§ 1.

Eintheilung der Gruppen. — Bezeichnungen und Definitionen.

1. Die Gesammtheit aller Bewegungsgruppen zerfällt in drei Classen. Die erste Classe enthält diejenigen Gruppen, welche nur aus Translationen bestehen. Die Gruppen der zweiten Classe bestehen aus Rotationen, deren Axen sich sämmtlich in einem Punkte schneiden. Alle übrigen Gruppen gehören zur dritten Classe. Diese drei Arten von Gruppen sollen resp. *Translationsgruppen*, *Rotationsgruppen* und *allgemeine Bewegungsgruppen* genannt werden.

Von diesen Gruppen verdienen diejenigen ein besonderes Interesse, bei welchen aus den erzeugenden Bewegungen nicht beliebig kleine Ortsveränderungen abgeleitet werden können. Im Folgenden wird nur von derartigen Gruppen die Rede sein.

2. Ueber die Translationsgruppen dieser Art*) bemerke ich Folgendes. Denkt man sich durch einen Punkt O des Raumes Strecken gezogen, parallel zu sämmtlichen Translationen der Gruppe, so können drei Fälle eintreten; die Endpunkte dieser Strecken liegen nämlich entweder in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder sie erfüllen den ganzen Raum.

Im ersten Fall soll die Gruppe eine *lineare Translationsgruppe* heissen. Jede Translation der Gruppe ist ein ganzes Vielfaches einer *primitiven* Translation τ.

Im zweiten Fall heisse die Gruppe eine *ebene Translationsgruppe*. Es giebt Systeme von zwei *primitiven* Translationen τ und τ_1, die so definirt sind, dass keine Translation ganz innerhalb des von τ und τ_1 gebildeten Dreiecks fällt. Das von τ und τ_1 gebildete Parallelogramm möge *primitives Parallelogramm* heissen. Für alle Paare primitiver Translationen haben die zugehörigen Dreiecke denselben Flächeninhalt und umgekehrt. Die Endpunkte der Translationsstrecken bestimmen ein Netz von Parallelogrammen. Jede Translation ist die geometrische Summe zweier Strecken $m\tau$ und $m_1\tau_1$, wo m und m_1 ganze Zahlen sind.

Im dritten Fall nenne ich die Gruppe eine *räumliche Translationsgruppe*. Sind τ, τ_1, τ_2 drei nicht in einer Ebene liegende Translationen von der Art, dass keine Translation in das Innere oder die Seitenflächen des von τ, τ_1, τ_2 gebildeten Tetraeders fällt, so soll τ, τ_1, τ_2 ein *System primitiver Translationen*, das zugehörige Tetraeder ein *primitives Tetraeder* und das zugehörige Parallelepipedon *primitives Parallelepipedon* genannt werden. Ueber diese Tetraeder erkennt man leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

I. *Alle primitiven Tetraeder haben denselben Rauminhalt und umgekehrt.*

*) Vgl. auch Jordan, a. a. O. pg. 172.

II. *Irgend drei Kanten eines primitiven Tetraeders, die nicht in einer Ebene liegen, bilden ein System primitiver Translationen.*

Die Endpunkte aller Translationen bilden ein parallelepipedisches Netz. Jede Translation ist die geometrische Summe dreier Strecken $m\tau$, $m_1\tau_1$, $m_2\tau_2$, wo m, m_1, m_2 ganze Zahlen bedeuten.

3. Für die Rotationsgruppen, welche nur Drehungen endlicher Grösse enthalten, werde ich mich der von Herrn Klein*) eingeführten Namen: *cyklische Gruppe, Vierergruppe, Diedergruppe, Tetraedergruppe, Octaedergruppe, Ikosaedergruppe* bedienen.

4. Die allgemeinen Bewegungsgruppen der oben bezeichneten Art sollen den Gegenstand dieser Abhandlung bilden. Von ihnen habe ich an anderer Stelle**) bewiesen, dass *sie — von einem Fall abgesehen — eine der eben genannten Rotationsgruppen als Hilfsgruppe besitzen.* Damit ist der Gang, welchen die Untersuchung zu nehmen hat, vorgeschrieben. *Es sind die allgemeinen Gruppen aufzustellen, welche eine der sechs Rotationsgruppen als Hilfsgruppe haben.*

5. Blosse Rotationen sollen durch

$$\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}' \ldots,$$

ihre Axen durch

$$a', b', c' \ldots$$

bezeichnet werden. Dagegen sollen

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots,$$

$$a, b, c \ldots$$

Bewegungen, resp. Axen bedeuten, deren Translationscomponente von Null verschieden ist***). Die Axen $a, b, c \ldots$ sollen *Schraubenaxen*, die Axen $a', b', c' \ldots$ *Drehungsaxen* genannt werden.

Ferner mögen Bewegungen von gleicher Rotation und gleicher Translation *gleichartige Bewegungen*, ihre Axen *gleichartige Axen* genannt werden.

Endlich soll eine Schraubenbewegung, deren Axe die im Raume feste Gerade a, deren Drehungswinkel ω_a und deren Gleitungscomponente t_a ist, durch

---

*) Vorlesungen über das Ikosaeder, pg. 1—19.

**) Nachrichten von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, 1886, pg. 495. Die Hilfsgruppe ist folgendermassen definirt. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ irgend welche Bewegungen einer Gruppe, und ist $\mathfrak{R}$ die resultirende Bewegung, so hängt der Drehungswinkel von $\mathfrak{R}$ nur von den Rotationen $\omega_a, \omega_b, \omega_c \ldots$ der Bewegungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ ab. Zieht man daher durch einen Punkt O Geraden $a', b', c' \ldots$ parallel den Axen $a, b, c \ldots$ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$, so müssen die Rotationen $\omega_a, \omega_b, \omega_c \ldots$ um resp. $a', b', c' \ldots$ eine Rotationsgruppe bilden. Diese Gruppe heisst die Hilfsgruppe. Vgl. pg. 501.

***) Die letztere Bezeichnung wird auch angewandt werden, so lange über die Grösse der Translation noch nicht entschieden ist.

$$\mathfrak{A}(\omega_a,\ t_a)$$

bezeichnet werden. Ist

$$\mathfrak{B}(\omega_b,\ t_b)$$

eine zweite Schraubenbewegung, so soll unter dem *Product von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ diejenige Ortsveränderung verstanden werden, welche eintritt, wenn zuerst die Bewegung $\mathfrak{A}$ und dann die Bewegung $\mathfrak{B}$ ausgeführt wird. Das Product

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$$

giebt daher die durch Zusammensetzung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entstehende Bewegung.

§ 2.

Hilfsätze über Zusammensetzung von Bewegungen. Andere Fassung der Aufgabe.

1. Es seien $\mathfrak{A}(\omega, t)$ und $\mathfrak{B}(\omega, t)$ zwei Bewegungen von gleicher Rotation und gleicher Translation, deren Axen a und b parallel sind, so ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{A}(\omega, t) \cdot \mathfrak{B}(-\omega,\ -t)$$

einer zu a und b senkrechten Translation τ äquivalent. Sind (Fig. 1) A und B die Punkte, in denen die Axen a und b von einer zu ihnen senkrechten Ebene geschnitten werden, und zeichnet man den Punkt A_1 so, dass

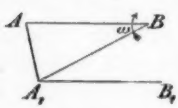


Fig. 1.

$$AB = A_1B, \quad \sphericalangle A_1BA = \omega$$

ist, so stellt AA_1 die Translation τ nach Grösse und Richtung dar.

Umgekehrt folgt, dass die Translation τ in Verbindung mit der Schraubenbewegung $\mathfrak{B}$ durch die gleichartige Schraubenbewegung $\mathfrak{A}$ ersetzt werden kann.

Sind die Translationen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ungleich, so giebt $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}^{-1}$ eine gegen die Axen a und b geneigte Translation, deren Componente senkrecht zu den Axen den Werth τ hat.

2. Sind $\mathfrak{A}(\pi, 0)$ und $\mathfrak{B}(\pi, 0)$ zwei Umklappungen, deren Axen a und b sich im Punkt O rechtwinklig schneiden, so stellt $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$ eine Umklappung um eine durch O gehende, zu a und b senkrechte Axe c vor.

3. Schneiden sich (Fig. 2) die Axen a und b der Bewegungen $\mathfrak{A}(\pi, t_a)$ und $\mathfrak{B}(\pi, t_b)$ wieder rechtwinklig im Punkt O, so findet man bekanntlich die Bewegung $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$, wenn man die Rotationen und Translationen für sich zusammensetzt.

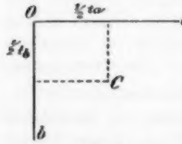


Fig. 2.

Mit Rücksicht auf Satz 1. und 2. folgt daher, dass $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$ eine Umklappung

$$\mathfrak{C}(\pi, 0)$$

um eine Axe c liefert, die gegen a und b rechtwinklig geneigt ist, und die Ebene der Axen a und b in C so schneidet, dass C von a resp. b um $\frac{1}{2} t_b$, rep. $\frac{1}{2} t_a$ entfernt ist*).

Ist im Besondern $t_a = 0$, oder $t_b = 0$, so trifft c die Axe b, resp. die Axe a.

4. Sind (Fig. 3) $\mathfrak{A}(\pi, t_a)$ und $\mathfrak{B}(\pi, t_b)$ zwei Bewegungen, deren Axen a und b rechtwinklig geneigt sind und den Abstand $\frac{1}{2} t_c$ von einander haben, so ersetze man nach Satz 1. $\mathfrak{B}(\pi, t_b)$ durch die Translation t_c und eine zu $\mathfrak{B}$ gleichartige Bewegung um die Axe b_1, die zu b parallel ist und durch den Schnittpunkt von t_c und a geht. Alsdann folgt nach Satz 3., dass das Product $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ die Bewegung

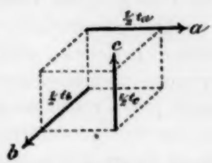


Fig. 3.

$$\mathfrak{C}(\pi, t_c)$$

giebt, und zwar hat die Axe c von a und b den Abstand $\frac{1}{2} t_b$ resp. $\frac{1}{2} t_a$**). Die Axen a, b, c liegen daher so, dass sie drei sich nicht schneidende Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons bilden, dessen Dimensionen resp. $\frac{1}{2} t_a$, $\frac{1}{2} t_b$, $\frac{1}{2} t_c$ sind.

Ist im Besondern $t_a = 0$ oder $t_b = 0$, so schneidet c die Axen b resp. a; und ist $t_a = 0$ und $t_b = 0$, so fällt c mit dem kürzesten Abstand von a und b zusammen.

5. Aus den Sätzen 3. und 4. folgt, dass die Axe c nur dann windschief gegen a und b ist, wenn t_a und t_b beide von Null verschieden sind.

6. Seien jetzt

$$\mathfrak{A}(\omega_a, t_a) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}(\omega_b, t_b)$$

zwei beliebige Bewegungen, so ist

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{A}_1(\omega_a, t_a)$$

und zwar ist die Axe von $\mathfrak{A}_1$ diejenige Gerade a_1, mit welcher a in Folge der Bewegung $\mathfrak{B}$ zusammenfällt. Wir sagen, dass *die Bewegung* $\mathfrak{A}_1(\omega_a, t_a)$ *durch Transformation mit* $\mathfrak{B}$ *aus* $\mathfrak{A}$ *hervorgeht****).

7. Aus Translationen können durch Transformation mit beliebigen Bewegungen immer nur Translationen hervorgehen; andrerseits bilden die Translationen stets für sich eine Untergruppe, also folgt:

---

*) Aendern wir die Reihenfolge, in der die Bewegungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ausgeführt werden, und geben t_a und t_b positives, resp. negatives Zeichen, so erhalten wir 4 Axen c, resp. 4 Punkte C, die zu a und b symmetrisch liegen. Welche dieser vier Axen sich ergiebt, ist für unsern Zweck gleichgiltig.

**) Vgl. die vorstehende Anmerkung.

***) Vgl. Jordan, a. a. O. pg. 171.

In jeder Gruppe von Bewegungen bilden die Translationen eine ausgezeichnete Untergruppe.

Dieser Satz gilt für jede Bewegungsgruppe. Unter denjenigen Bewegungsgruppen, welche eine Rotationsgruppe als Hilfsgruppe haben, sind aber die Rotationsgruppen selbst die einzigen Gruppen, für welche sich die von den Translationen gebildete Untergruppe auf die Identität reducirt; wir können daher sofort schliessen, dass *jede allgemeine Bewegungsgruppe der hier betrachteten Art wirkliche Translationsgruppen als Untergruppen enthält.*

Die allgemeinen Bewegungsgruppen lassen sich daher auf die Weise herleiten, dass Translationsgruppen mit andern Bewegungsgruppen zusammengesetzt werden. Es wird sich jedoch zeigen, dass nicht jede Translationsgruppe hierzu geeignet ist. Im Gegentheil giebt es nur wenige derartige Gruppen. Das Problem, welches den Gegenstand dieser Abhandlung bildet, schliesst daher das folgende ein, *diejenigen besonderen Translationsgruppen zu suchen, mit denen sich allgemeine Bewegungsgruppen bilden lassen.*

Die Ableitung der allgemeinen Gruppen soll hieran angeknüpft werden. Dazu bemerke ich noch Folgendes: Die fraglichen Translationsgruppen sollen durch Transformation mit Bewegungen von der Form $\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}, t_a\right)$ in sich übergehen. Diese Bedingung kann durch die einfachere ersetzt werden, *dass die Translationsgruppe durch Transformation mit der Drehung* $\mathfrak{A}'\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ *in sich übergeht.*

8. Die Bewegungen, welche aus irgend einer Bewegung $\mathfrak{A}$ durch Transformation hervorgehen, sollen *gleichberechtigte Bewegungen* und ihre Axen *gleichberechtigte Axen heissen.* Wie leicht zu sehen, sind sämmtliche Axen einer Gruppe periodisch durch den Raum vertheilt. Andrerseits weiss man von den hier betrachteten Gruppen, dass in jeden endlichen Bereich des Raumes nur eine endliche Anzahl ihrer Axen eindringt*); und daraus folgt, dass jede Gruppe eine endliche Zahl von Schaaren gleichberechtigter Axen enthält, und dass das primitive Parallelepipedon (§ 1, 2) von mindestens einer Geraden jeder Schaar getroffen wird.

Sind

$$1,\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{R}_2\ \ldots\ \mathfrak{R}_n\ \ldots$$

die sämmtlichen Bewegungen einer Gruppe, und ist a_n die Gerade, in welche a durch die Bewegung $\mathfrak{R}_n$ übergeht, so lassen sich die Axenschaaren durch

$$a,\ a_1,\ a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots,$$
$$b,\ b_1,\ b_2\ \ldots\ b_n\ \ldots,$$
$$c,\ c_1,\ c_2\ \ldots\ c_n\ \ldots$$

*) Vgl. meine oben erwähnte Note, pg. 501.

bezeichnen. *Jede dieser Axenschaaren wird durch jede Bewegung der Gruppe einzeln in sich übergeführt.* Denn kommt z. B. irgend eine Gerade a_k durch die Bewegung $\mathfrak{R}_l$ nach a_k', so gelangt a durch die der Gruppe zugehörige Bewegung $\mathfrak{R}_k \cdot \mathfrak{R}_l$ nach a_k', also ist a_k' eine der Geraden a_n.

Es giebt andererseits stets eine Bewegung der Gruppe, welche zwei beliebige Geraden einer Schaar in einander überführt; z. B. gehen die Axen a_k und a_l durch die Bewegung $\mathfrak{R}_k^{-1}\mathfrak{R}_l$ in einander über. Die Bewegungsgruppe enthält daher *alle* Bewegungen, durch welche jede Axenschaar einzeln in sich übergeführt wird. *Jede Bewegungsgruppe lässt sich demnach auch so definiren, dass sie die Gesammtheit aller Bewegungen enthält, durch welche eine oder mehrere Schaaren gleichberechtigter Axen, und zwar jede für sich, in einander übergeführt werden.*

Hieraus ziehen wir noch eine praktische Folgerung. Um nämlich die verschiedenen Schaaren gleichberechtigter Bewegungen resp. Axen zu finden, welche eine gewisse Gruppe enthält, brauchen wir nur diejenigen nicht gleichberechtigten Axen zu suchen, welche ein primitives Parallelepipedon treffen, und deren zugehörige Bewegungen irgend eine Axenschaar in sich überführen. Jede derselben vertritt eine Classe gleichberechtigter Axen. Für jede Gruppe soll die Zahl und die Lage dieser Axen angegeben werden*).

§ 3.

Die Hilfsgruppe ist die cyklische Gruppe.

1. Alle Bewegungsaxen sind einander parallel. Ist ε irgend eine zu den Axen senkrechte Ebene, und sind $A, B, C \dots$ ihre Schnittpunkte mit den Axen $a, b, c \dots$, so sollen in diesem Paragraphen je nach Bedürfniss statt der Axen $a, b, c \dots$ die Punkte $A, B, C \dots$ betrachtet und auf sie die vorstehenden Definitionen übertragen werden.

Ueber die Translationsgruppen wollen wir zunächst die Bestimmung treffen, dass eine der Translationen — *sie soll stets durch τ bezeichnet werden* — der Axenrichtung parallel läuft. Dies ist stets der Fall, wenn wirkliche Schraubenbewegungen auftreten. Setzen wir alsdann in den gefundenen Gruppen $\tau = 0$, so erhalten wir diejenigen speciellen Gruppen, in denen eine Translation parallel den Axen nicht vorhanden ist.

Da die cyklische Gruppe die Rotation $\frac{2\pi}{n}$ enthält, so existiren

*) Ich habe die obigen Entwickelungen so ausführlich gehalten, einerseits, weil mir die abgeleiteten Sätze eines Beweises zu bedürfen scheinen, andererseits, um mich bei Ableitung der Gruppen selbst desto kürzer fassen zu können.

jedenfalls Bewegungen, deren Rotationswinkel $\frac{2\pi}{n}$ ist; ihre Axen sollen *Hauptaxen**), die anderen Axen dagegen *Nebenaxen* heissen. Verstehen wir ferner unter der *Translation der Bewegung* $\mathfrak{A}$ eine Translation, deren absolute Länge kleiner als τ ist**), so folgt, dass die Translationen der einzelnen Bewegungen nur die Werthe

$$0, \frac{1}{n}\tau, \frac{2}{n}\tau, \ldots, \frac{n-1}{n}\tau$$

haben können.

2. Ist zunächst die Translationsgruppe eine lineare, so kann es nur *eine* zu τ parallele Bewegungsaxe geben; ist dieselbe a, so ist

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}, \frac{m}{n}\tau\right), \quad m = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

die zugehörige Bewegung. Die Potenzen derselben, mit der aus τ abgeleiteten Translationsgruppe zusammengesetzt, liefern eine Gruppe $\mathfrak{G}$***), die durch

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}, \frac{m}{n}\tau\right), \tau$$

charakterisirt ist. *Diese Gruppe kann aus τ und den Bewegungen*

$$1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \ldots, \mathfrak{A}^{n-1}$$

zusammengesetzt werden.

3. Im Fall einer ebenen oder räumlichen Translationsgruppe existiren stets unendlich viele parallele Axen. Ist a eine Hauptaxe, c irgend eine andere Axe, und sind

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}, t_a\right), \quad \mathfrak{C}\left(\frac{2m\pi}{n}, t_c\right)$$

die zugehörigen Bewegungen, so ist das Product $\mathfrak{C} . \mathfrak{A}^{-m}$ stets einer Translation äquivalent (§ 2, 1). Mit Rücksicht auf 1. ziehen wir hieraus zunächst den Schluss, dass *die zu τ parallele Componente dieser Translation nur die Werthe*

$$0, \frac{1}{n}\tau, \frac{2}{n}\tau, \cdots, \frac{n-1}{n}\tau$$

haben kann.

Ferner folgt, dass sich jede Bewegung durch Multiplication einer Translation mit $\mathfrak{A}^m$ ergiebt, und daraus folgt weiter, dass *jede der*

*) Hierin folge ich Herrn Sohncke; a. a. O. pg. 48.

**) Der Beweis, dass diese Festsetzung statthaft ist, kann füglich übergangen werden.

***) Zum Vergleich mit den Arbeiten von Herrn Camille Jordan und Herrn Sohncke soll für jede Gruppe die Jordan'sche resp. die Sohncke'sche Nummer angegeben werden. Die obigen Gruppen sind enthalten in J. 18 — 20 (a. a. O. pg. 340). Auf diejenigen einfachen Gruppen mit einer Axe, deren Rotationswinkel irrational ist, bin ich im Text nicht eingegangen.

hierhergehörigen Gruppen durch Multiplication einer Translationsgruppe mit einer Gruppe $\mathfrak{G}$, also auch durch Multiplication einer Translationsgruppe, welche τ enthält, mit

$$1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \ldots, \mathfrak{A}^{n-1}$$

abgeleitet werden kann.

Stehen die beiden Translationen, die mit τ ein primitives System bilden, auf τ senkrecht, so folgt noch, dass alle Bewegungen der Gruppe gleichartig sind.

4. Denken wir uns wieder von einem Punkte O aus alle Translationen gezeichnet, und a mit τ zusammenfallend, so sei $t = OT$ irgend eine von τ verschiedene Translation, die nicht auf τ senkrecht steht. Durch Drehungen von der Grösse $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \cdots$ um a möge t in die Lagen $t' = OT', t'' = OT'' \cdots$ kommen. Da die Translationsgruppe durch jede dieser Drehungen in sich übergeht, so sind $t', t'' \ldots$ also auch $TT', T'T'' \ldots$ Translationen der Gruppe. Dieselbe enthält demnach stets Translationen, die in einer zu τ senkrechten Ebene liegen, und in derselben ein reguläres Polygon bilden.

Andererseits müssen die in dieser Ebene befindlichen Translationen ein Netz von Parallelogrammen bestimmen. Es giebt aber ausser dem regulären Dreieck, Viereck und Sechseck kein anderes reguläres Polygon, welches Basis eines Netzes von Parallelogrammen sein kann. *Daher kann n nur die Werthe*

$$2, 3, 4, 6$$

haben.

5. Sind τ' und τ'' zwei Translationen, die mit τ zusammen ein primitives System bilden, so soll die Projection des von τ' und τ'' bestimmten Parallelogramms auf die zu τ senkrechte Ebene ε ein *primitiver Bereich* genannt werden.

Da alle Axen parallel sind, so erhalten wir (§ 2, 8) hier alle Axenschaaren, wenn wir diejenigen nicht gleichberechtigten Axen bestimmen, welche den primitiven Bereich treffen.

6. Sei zunächst die Translationsgruppe eine ebene, so bestimmen die von O aus construirten Translationen ein ebenes Netz. Soll dasselbe durch Drehung um die mit τ zusammenfallende Axe a in sich übergehen, so muss der Drehungswinkel den Werth π haben, und τ eine Symmetrieaxe des Netzes sein. Das letztere ist aber nur möglich, wenn das Netz aus Rhomben resp. Rechtecken besteht. Alle Bewegungsaxen fallen in dieselbe Ebene.

Wir dürfen τ als eine der primitiven Translationen wählen; ferner soll die zu τ senkrechte Translation τ_1 heissen. Alsdann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Zunächst kann τ und τ_1 ein Paar primitiver

Translationen bilden. Alsdann ergeben sich die Gruppen $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ *), charakterisirt durch

$$\mathfrak{A}\left(\pi,\ \frac{m}{2}\tau\right),\ \tau,\ \tau_1,\ m = 0,\ 1.$$

Alle Bewegungen sind (§ 3, 3) gleichartig. Der primitive Bereich reducirt sich hier auf die Strecke τ_1. Es giebt daher noch eine zweite Schaar gleichberechtigter Axen, repräsentirt durch die Axe b (Fig. 4), die von a um $\frac{1}{2}\tau_1$ entfernt ist. Die Axen a_n und b_n folgen abwechselnd im Abstand $\frac{1}{2}\tau_1$ auf einander.

Für $\tau = 0$ erhalten wir eine specielle Gruppe $\mathfrak{C}_0'$ **).

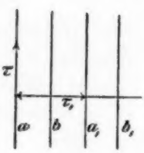


Fig. 4.

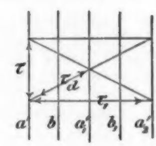


Fig. 5.

7. Bilden τ und τ_1 nicht ein Paar primitiver Translationen, so muss (Fig. 5) τ zusammen mit der halben Diagonale τ_d des von τ und τ_1 bestimmten Rechtecks ein solches Paar sein. In diesem Fall enthält die zugehörige Gruppe stets reine Umklappungen. Denn aus der Schraubenbewegung $\mathfrak{C}\left(\pi,\ \frac{1}{2}\tau\right)$ ergiebt sich durch Multiplication mit $-\frac{1}{2}(\tau + \tau_1)$ ***) stets eine reine Umklappung. Die zugehörige Gruppe kann durch

$$\mathfrak{C}_3' \dagger) \qquad \mathfrak{A}'(\pi, 0),\ \tau,\ \tau_1,\ \frac{1}{2}(\tau + \tau_1)$$

charakterisirt werden. Sie enthält zwei Schaaren gleichberechtigter Axen a_n' und b_n; dieselben folgen im Abstand $\frac{1}{4}\tau_1$ abwechselnd auf einander. Zu den Axen b_n gehören die Bewegungen $\mathfrak{B}_n\left(\pi,\ \frac{1}{2}\tau\right)$.

8. Ist die Translationsgruppe eine räumliche, und zunächst $n=2$, so darf die zu τ senkrechte Ebene ein Netz von *beliebigen* Parallelo-

*) J. 28 und 30.

**) J. 26.

***) Für die Bezeichnung der Translationen ziehe ich vor, die geometrische Addition beizubehalten.

†) J. 32. Bei der Angabe der Translationen empfiehlt es sich, nicht bloss die primitiven Translationen anzugeben.

grammen enthalten. Sind (Fig. 6) τ_1 und τ_2 zwei primitive Translationen dieses Netzes, so können zunächst τ, τ_1, τ_2 drei primitive Translationen der Translationsgruppe bilden. Alsdann ergeben sich die allgemeinen Bewegungsgruppen $\mathfrak{C}_1(2)$ und $\mathfrak{C}_2(2)$ *)

$$\mathfrak{A}\left(\pi, \frac{m}{2}\tau\right), \tau, \tau_1, \tau_2; \; m = 0, 1.$$

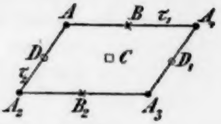


Fig. 6.

Alle Bewegungsaxen sind gleichartig. Das Parallelogramm aus $\tau_1 = AA_1$ und $\tau_2 = AA_2$ bildet den primitiven Bereich. Es giebt daher ausser den Axen a_n noch drei andere Schaaren gleichberechtigter Axen, repräsentirt durch die Halbirungspunkte B, C, D der Seiten AA_1, AA_2, AA_3. Alle Axen schneiden die Ebene s in einem Netz von Parallelogrammen, dessen Basis $ABCD$ ist.

Für $\tau = 0$ ergiebt sich eine specielle Gruppe $\mathfrak{C}_0(2)$ **).

9. Bilden τ, τ_1, τ_2 kein primitives System, so mögen (Fig. 7) τ, τ_d und τ_e drei primitive Translationen sein. Alsdann wird entweder nur eine der Translationen τ_d und τ_e oder jede von ihnen mit τ einen spitzen Winkel einschliessen. Diese zwei Fälle sind aber identisch. Setzen wir nämlich zunächst voraus, dass $\tau_d = OA_d$ und $\tau_e = OA_e$ spitze Winkel mit $\tau = 2OA$ bilden, und sind $\tau_d' = OA_d'$ und $\tau_e' = OA_e'$ die Translationen, in welche τ_d und τ_e durch Umklappung um τ übergehen, so ist $A_dA_eA_d'A_e'$ ein Parallelogramm, dessen Ebene ε in A halbirt und auf τ senkrecht steht. Wir bezeichnen noch A_dA_e, A_dA_e', $2OA$ durch τ_1, τ_2, OT. Nun ist OTA_dA_e ein primitives Tetraeder, also bilden auch (§ 1, II) τ, τ_1, τ_d ein System primitiver Translationen, woraus in der That folgt, dass die oben genannten zwei Fälle identisch sind.

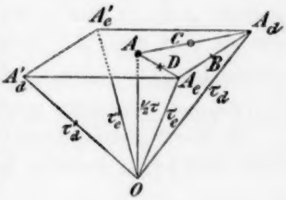


Fig. 7.

Es folgt übrigens noch, dass (§ 1, II) auch τ_1, τ_2, τ_d drei primitive Translationen sind, und daraus ergiebt sich, dass τ_1 und τ_2 zu primitiven Translationen in den zu τ senkrechten Ebenen gewählt werden können.

Die zugehörige Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ ***) kann daher, wie folgt, charakterisirt werden:

$$\mathfrak{A}'(\pi, 0), \tau, \tau_1, \tau_2, \frac{1}{2}(\tau + \tau_1 + \tau_2).$$

*) J. 29 und 31. S. 2 und 3.

**) J. 27.

***) J. 33. S. 4.

Diese Gruppe hat sowohl Gruppen $\mathfrak{C}_3'$, als auch Gruppen $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ zu Untergruppen; z. B. enthalten die Ebenen parallel τ_d und τ_e lauter Gruppen $\mathfrak{C}_3'$, dagegen diejenigen parallel τ_1 und τ_2 Gruppen $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$.

Ausser der Schaar der Axen a_n existiren noch drei andere Schaaren gleichberechtigter Axen. Das durch AA_d und AA_e bestimmte Parallelogramm liefert den primitiven Bereich.

Sind nun B, C, D die Mitten der Seiten A_dA_e, AA_d, AA_e, so sind b', c, d die Repräsentanten jener drei Schaaren gleichberechtigter Axen; c und d sind Schraubenaxen, b' ist Drehungsaxe.

10. Im Anschluss hieran möge noch folgende für die späteren Entwicklungen wichtige Frage behandelt werden.

Sei in der zu τ senkrechten Ebene $ABCD$ ein Parallelogramm, so dass $2AB = \tau_1$ und $2AC = \tau_2$ primitive Translationen einer Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$ oder $\mathfrak{C}_2(2)$ sind, und es werde verlangt, aus $\mathfrak{C}_1(2)$ resp. $\mathfrak{C}_2(2)$ durch Einfügung neuer Axen eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ zu bilden, jedoch so, dass die Translationen dieser Gruppe längs AB und AC nicht kleiner als τ_1 resp. τ_2 sind.

Die Ergänzungspunkte können nur in die Mitte des Parallelogramms $ABCD$ oder in die Mitten seiner Seiten fallen. Da nun in den zu AB resp. AC parallelen Geraden der Abstand zweier Ergänzungspunkte ebenfalls gleich $\frac{1}{2}\tau_1$, resp. $\frac{1}{2}\tau_2$ sein muss, so sind nur folgende drei Fälle möglich:

1) Ein Ergänzungspunkt liegt (Fig. 8) im Mittelpunkt von $ABCD$; dann fällt keiner mehr in die Seiten.

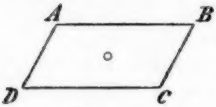


Fig. 8.

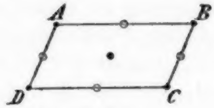


Fig. 9.

2) Jede Seite erhält (Fig. 9) einen Ergänzungspunkt; dann gehört auch der Mittelpunkt von $ABCD$ zur Gruppe; dieselbe ist daher um die Mittelpunkte aller analogen Parallelogramme zu vermehren.

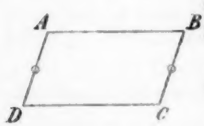


Fig. 10.

3) Nur ein Paar paralleler Seiten enthält (Fig. 10) einen Ergänzungspunkt.

11. Für $n = 3$ sind die Drehungswinkel $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$, also folgt zunächst, dass alle Axen Hauptaxen sind. Das in die Ebene ε fallende Translationsnetz besteht aus regulären Dreiecken. Sei (Fig. 11) $\tau_1 = AA_1$ die Seite des Netzes; dieselbe komme, wenn wir die Ebene ε um τ resp. a um $\frac{2\pi}{3}$ oder

$\frac{4\pi}{3}$ drehen, in die Lagen $\tau_2 = AA_2$ und $\tau_3 = AA_3$, so können irgend zwei der Strecken τ_1, τ_2, τ_3 als primitive Translationen der Ebene ε betrachtet werden; überdies ist

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Bildet nun τ mit zweien der Translationen τ_1, τ_2, τ_3 ein primitives System, so ergeben sich die Gruppen $\mathfrak{C}_1(3)$, $\mathfrak{C}_2(3)$, $\mathfrak{C}_2'(3)$ *); d. h.

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{m}{3}\tau\right),\ \tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3;\quad m = 0,\ 1,\ 2.$$

Alle Axen dieser Gruppe sind gleichartig. Das aus τ_1 und τ_2 gebildete Parallelogramm ist ein primitiver Bereich. Ausser den Axen

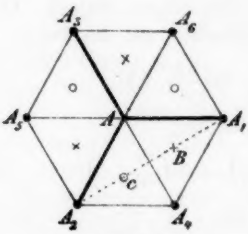


Fig. 11.

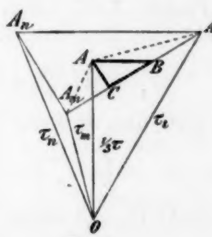


Fig. 12.

a_n giebt es daher noch zwei andere Schaaren gleichberechtigter Hauptaxen, repräsentirt durch die Punkte B und C, die auf A_1A_2 so liegen, dass $A_1B = BC = CA_2$ ist. Die zugehörigen Bewegungen

$$\mathfrak{B}\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{m}{3}\tau\right),\quad \mathfrak{C}\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{m}{3}\tau\right)$$

führen in der That die Axen a_n in sich über. Die Punkte A_n, B_n, C_n bilden je ein Netz von gleichseitigen Dreiecken mit den Seiten τ_1, τ_2, τ_3.

Für $\tau = 0$ ergiebt sich eine specielle Gruppe $\mathfrak{C}_0(3)$ **).

12. Sind τ, τ_1, τ_2 keine primitiven Translationen, so giebt es eine Translation t, deren Componente parallel zu τ gleich $\frac{1}{3}\tau$ ist. Diese Componente kann nämlich nur $\frac{1}{3}\tau$ oder $\frac{2}{3}\tau$ sein; ist das letztere der Fall, so ist $\tau - t$ eine Translation mit der Componente $\frac{1}{3}\tau$.

Nun sei (Fig. 12) $\tau_l = OA_l$ so definirt, dass unter allen Translationen mit der Componente $\frac{1}{3}\tau$ keine existirt, die mit $\tau = OT = 3OA$

---

*) J. 61, 63, 64. S. 17. 15. 16. Die zu $m = 1$ und $m = 2$ gehörigen Gruppen sind nur darin verschieden, dass die eine aus rechtsgewundenen, die andere aus linksgewundenen Schraubenbewegungen besteht.

**) J. 60.

einen kleineren Winkel einschliesst, als τ_l. Durch Drehung um $\frac{2\pi}{3}$, resp. $\frac{4\pi}{3}$ möge τ_l in die Lagen $\tau_m = OA_m$ und $\tau_n = OA_n$ gelangen, so bilden τ_l, τ_m, τ_n ein System primitiver Translationen; und zwar ist

$$\tau_l + \tau_m + \tau_n = \tau.$$

Es bildet aber auch τ mit irgend zweien der Translationen τ_l, τ_m, τ_n ein primitives System (§ 1, I). Wählen wir nun die Ebene $A_lA_mA_n$ zur Ebene ε, so ergiebt sich, genau wie eben, dass ausser den Axen a_n noch zwei Schaaren gleichberechtigter Hauptaxen b_n und c_n existiren, repräsentirt durch die Punkte B und C auf A_lA_m, für die $A_lB = BC = CA_m$ ist.

Die Punkte ABC bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die zu A und B gehörigen Bewegungen sind jedenfalls von der Form

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{3}, t_a\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}\left(\frac{2\pi}{3}, t_b\right).$$

Nun giebt aber $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}^{-1}$ eine Bewegung

$$\mathfrak{C}\left(-\frac{4\pi}{3}, -t_a - t_b\right) = \mathfrak{C}\left(\frac{2\pi}{3}, t_c\right)$$

um den Punkt C, und daraus folgt, dass

$$t_a + t_b + t_c = 0$$

ist. Da aber nicht alle Axen gleichartig sind, so ist

$$t_a = 0, \quad t_b = \frac{1}{3}\tau, \quad t_c = -\frac{1}{3}\tau$$

zu setzen. Wir gelangen daher zu folgender Gruppe:

$$\mathfrak{G}_3(3)^{*)}\ \mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \quad \mathfrak{B}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\tau}{3}\right), \quad \mathfrak{C}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\tau}{3}\right)$$
$$\tau, \tau_l, \tau_m, \tau_n.$$

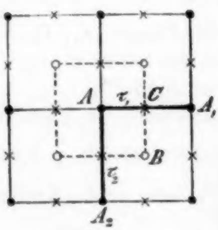


Fig. 13.

13. Für $n=4$ giebt es ausser dem Drehungswinkel $\frac{\pi}{2}$ auch den Winkel π. Die Translationsgruppen können also nur solche Gruppen sein, welche für $n = 2$ auftreten. Ferner besteht jetzt das in die Ebene ε fallende Translationsnetz aus Quadraten. Seien (Fig. 13) $\tau_1 = AA_1$ und $\tau_2 = AA_2$ die primitiven Translationen des Netzes, so ist die Translationsgruppe entweder durch

$$\tau, \tau_1, \tau_2$$

oder (§ 3, 9) durch

*) J. 62. S. 18. Die Bewegungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind nur zur Charakteristik der Gruppe angeführt.

$$\tau, \tau_1, \tau_2, \frac{1}{2}(\tau + \tau_1 + \tau_2)$$

bestimmt.

Im ersten Fall bestehen die Gruppen $\mathfrak{C}_1(4)$, $\mathfrak{C}_2(4)$, $\mathfrak{C}_3(4)$, $\mathfrak{C}_2'(4)$*); d. h.

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{m}{4}\tau\right), \tau, \tau_1, \tau_2; \; m = 0, 1, 2, 3.$$

Ausser den Hauptaxen a_n giebt es noch eine Schaar gleichberechtigter Hauptaxen, repräsentirt durch den Mittelpunkt B des durch AA_1 und AA_2 bestimmten primitiven Bereiches. Alle Hauptaxen sind gleichartig. Endlich existirt noch eine Schaar gleichberechtigter Nebenaxen c_n, die durch die Mittelpunkte der Seiten des Netzes gehen. Da $\mathfrak{A}_n^2$, $\mathfrak{B}_n^2$, $\mathfrak{C}_n$ eine Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$ resp. $\mathfrak{C}_2(2)$ bilden, so sind

$$\mathfrak{C}_n\left(\pi, \frac{2m}{4}\tau\right)$$

die zugehörigen Bewegungen.

Für $\tau = 0$ ergiebt sich die specielle Gruppe $\mathfrak{C}_0(4)$**).

14. Im zweiten Fall (Fig. 7) können wir die Translationsgruppe auch durch $\tau = OT = 2OA$, $\tau_d = OA_d$, $\tau_e = OA_e$ definiren (§ 3, 9). Dann ist das von AA_d und AA_e gebildete Quadrat ein primitiver Bereich. Daraus folgt wieder, dass noch eine Axenschaar b_n existirt, die zum Mittelpunkt B von $A_d A_e$ gehört, und eine Schaar von Nebenaxen c_n, gegeben durch die Mitten der Seiten AA_d und AA_e.

Für die von den Bewegungen $\mathfrak{A}_n^2$, $\mathfrak{B}_n^2$, $\mathfrak{C}_n$ gebildete Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ sind die Bewegungen $\mathfrak{C}_n$ jedenfalls gleichartig. Dies ist aber noch auf zwei Arten möglich; nämlich die Axen c_n können Drehungsaxen oder Schraubenaxen sein. Beachten wir noch, dass $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ selbst ungleichartige Bewegungen sind, so ergeben sich demnach die folgenden beiden Gruppen

$$\mathfrak{C}_4(4)^{***)} \quad \mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\tau}{4}\right), \quad \mathfrak{B}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\tau}{4}\right), \quad \mathfrak{C}'(\pi, 0),$$

$$\tau, \tau_1, \tau_2, \frac{1}{2}(\tau + \tau_1 + \tau_2),$$

$$\mathfrak{C}_5(4)\dagger) \quad \mathfrak{A}'\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \mathfrak{B}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\tau}{2}\right), \quad \mathfrak{C}\left(\pi, \frac{\tau}{2}\right),$$

$$\tau, \tau_1, \tau_2, \frac{1}{2}(\tau + \tau_1 + \tau_2).$$

15. Im Fall $n = 6$ giebt es ausser dem Drehungswinkel $\frac{\pi}{3}$ auch die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und π. Die zugehörige Translationsgruppe muss daher

---

*) J. 54, 55, 56, 57. S. 30. 26, 29, 27. Bezüglich $m = 1$ und $m = 3$ vergl. pg. 331, Anmerkung 1.

**) J. 53.

***) J. 59, S. 28 } Die oben diesmal noch besonders erwähnten Bewegungen
†) J. 58, S. 31 } $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ dienen nur zur Charakterisirung der Gruppen.

gleichzeitig den Bedingungen der Fälle $n = 3$ und $n = 2$ genügen. Das ist aber nur möglich, wenn die Translationen, die mit τ ein primitives System bilden, auf τ senkrecht stehen, und ein reguläres Dreieck bestimmen. Die Translationsgruppe ist daher τ, τ_1, τ_2, τ_3. Wir erhalten die Gruppen $\mathfrak{C}_1(6)$, $\mathfrak{C}_2(6)$, $\mathfrak{C}_3(6)$, $\mathfrak{C}_4(6)$, $\mathfrak{C}_3'(6)$, $\mathfrak{C}_2'(6)$ *)

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{m}{6}\tau\right),\ \tau,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Alle Axen a_n sind gleichartig. Dieselben schneiden (Fig. 14) die Ebene ε in den Ecken von regulären Dreiecken. Daraus folgt, dass noch zwei andere Schaaren gleichberechtigter Axen vorhanden sind, die eine mit dem Winkel $\frac{2\pi}{3}$, repräsentirt durch die Dreiecksschwerpunkte C_n, die andere mit dem Winkel π, vertreten durch die Mitten D_n der Dreieckseiten.

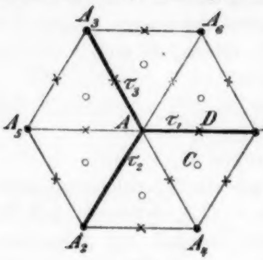


Fig. 14.

Die Bewegungen $\mathfrak{A}_n^2$ und $\mathfrak{C}_n$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{C}(3)$, $\mathfrak{A}_n^3$ und $\mathfrak{D}_n$ eine Gruppe $\mathfrak{C}(2)$, daher sind die zu c_n und d_n gehörigen Bewegungen

$$\mathfrak{C}_n\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{m}{3}\tau\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_n\left(\pi,\ \frac{m}{3}\tau\right).$$

Für $\tau = 0$ ergiebt sich noch eine besondere Gruppe $\mathfrak{C}_0(6)$**).

§ 4.

Die Hilfsgruppe ist die Vierergruppe.

1. Die Axen sind drei zu einander senkrechten Richtungen parallel; sie sollen durch x, y, z bezeichnet werden. Der Drehungswinkel ist für alle Axen gleich π. Diejenigen Ebenen, welche Axen enthalten, und zu x, y, z senkrecht sind, sollen resp. durch ξ, η, ζ bezeichnet und *Hauptebenen* genannt werden. Ferner seien τ_x, τ_y, τ_z die den Axen parallelen Translationen. Endlich sollen die Ebenen, welche gegenüberliegende Kanten eines aus τ_x, τ_y, τ_z gebildeten Parallelepipedons verbinden, *Diagonalebenen* heissen.

Die Geraden x, y, z bilden je eine der Gruppen $\mathfrak{C}(2)$. *Diese Untergruppen müssen die nämlichen primitiven Translationen enthalten.* Im Speciellen ergiebt sich hierüber noch Folgendes:

---

*) J. 47—52, S. 47, 42, 44, 46, 45, 43. Bezüglich $m = 1, m = 5$ und $m = 2$, $m = 4$ vergl. Anmerkung 1, pg. 331.

**) J. 46.

2. Ist von einer Geradenart, z. B. von den Geraden x bekannt, dass sie eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ bilden, so enthält dieselbe jedenfalls die Translationen τ_x, τ_y, τ_z. Wir können daher diese Gruppe aus einer Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$ oder $\mathfrak{C}_2(2)$ mit den primitiven Translationen τ_x, τ_y, τ_z entstanden denken. Wie § 3, 7 gezeigt, ist dies auf drei Arten möglich, und zwar ergiebt sich gemäss den dortigen Resultaten:

1) Bilden die Geraden x in den Diagonalebenen eine Gruppe $\mathfrak{C}_3'$, so bilden sie in den Hauptebenen Gruppen $\mathfrak{C}_1'$ resp. $\mathfrak{C}_2'$ und umgekehrt. Die Gruppe der x enthält die Translation

$$\frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y + \tau_z).$$

Nunmehr folgt aber, dass auch die Geraden y und z je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ bilden, und zwar in derselben Art, wie die Geraden x.

2) Wenn die Geraden x in den Hauptebenen η und ζ je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3'$ bilden, so enthalten die Diagonalebenen Gruppen $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$. Alsdann ergeben sich die Translationen

$$\frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y), \quad \frac{1}{2}(\tau_x + \tau_z),$$

daher existirt auch die Translation

$$\frac{1}{2}(\tau_y + \tau_z)$$

und nun folgt wieder, dass auch die Geraden y und z je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ bilden, wie die Geraden x.

3) Bilden die Geraden x nur in den Hauptebenen ζ Gruppen $\mathfrak{C}_3'$ dagegen in den Hauptebenen η nicht, so enthält die Gruppe die Translation

$$\frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y)$$

und es folgt, dass nun auch die Geraden y in den Ebenen ζ Gruppen $\mathfrak{C}_3'$, in den Ebenen ξ Gruppen $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ bilden. Dagegen können jetzt die Geraden z keine Gruppe $\mathfrak{C}_3'(2)$ bilden.

4) Kann auch der Fall eintreten, dass die Geraden x, y, z je eine Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$ oder $\mathfrak{C}_2(2)$ bilden.

3. Aus der Existenz der Translationen τ_x, τ_y, τ_z folgt, dass in den Hauptebenen der kürzeste Abstand zweier parallelen und gleichartigen Axen resp. $\frac{1}{2}\tau_x$, $\frac{1}{2}\tau_y$, $\frac{1}{2}\tau_z$ ist. Ferner kann jede in einer Gruppe enthaltene Bewegung nur gleichartige Axen zur Deckung bringen. Die Axen verschiedener Richtung müssen sich daher entweder schneiden; oder, wenn dies nicht der Fall ist, so muss es resp. Axenpaare y, z, z, x, x, y geben, deren Abstand gleich $\frac{1}{4}\tau_x$, $\frac{1}{4}\tau_y$, $\frac{1}{4}\tau_z$ ist.

Im Speciellen ergiebt sich, dass für die Lage der Axen x, y, z nur folgende Fälle möglich sind.

a) Es kann vorkommen, dass eine Axe x, eine Axe y, und eine Axe z durch denselben Punkt gehen.

b) Dies kommt niemals vor; aber es giebt Axen der einen Richtung, die von Axen beider anderen Richtungen geschnitten werden.

c) Jede Axe wird höchstens von Axen einer Richtung geschnitten; es giebt aber Axen, die sich schneiden.

d) Es kommt niemals vor, dass Axen verschiedener Richtung sich schneiden.

Die Gruppen, welche einem dieser vier Fälle entsprechen, bilden die Gesammtheit aller Gruppen, deren Hilfsgruppe die Vierergruppe ist.

Die weitere Untersuchung dieser vier Fälle soll an die Betrachtung eines aus den Kanten $\frac{1}{2}\tau_x, \frac{1}{2}\tau_y, \frac{1}{2}\tau_z$ construirten Parallelepipedons Π angeschlossen werden. Die Configuration der Geraden in ihm wiederholt sich periodisch durch den ganzen Raum. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

a.

4. Sei P ein Punkt, in dem sich drei Axen, x, y, z schneiden. Wir nehmen diese Axen zu Kanten des Parallelepipedons Π. Wenn nun x, y, z nicht sämmtlich Drehungsaxen sind, so giebt es doch stets einen Punkt O, durch welchen drei Drehungsaxen hindurchgehen. Dies folgt unmittelbar aus § 2, 3, wenn die Producte je zweier der drei Bewegungen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ gebildet werden. Sind alle Axen Schraubenaxen, so liegt der Punkt O im Mittelpunkt von Π; sind dagegen nur zwei Axen, z. B. x und y Schraubenaxen, so liegt er im Mittelpunkt der von x und y bestimmten Seitenfläche.

Alle dem Fall a) *entsprechenden Gruppen enthalten daher Vierergruppen als Untergruppen.* Nun sahen wir aber, dass sich die Gruppen $\mathfrak{C}_1(2)$, $\mathfrak{C}_2(2)$, $\mathfrak{C}_3(2)$ aus der Translationsgruppe und einer einzigen Umklappung oder Schraubenbewegung zusammensetzen lassen; also *ist jede dem Fall* a) *entsprechende allgemeine Gruppe aus der Translationsgruppe in Verbindung mit einer Vierergruppe herstellbar.*

Nehmen wir jetzt den Punkt O als einen Eckpunkt des Parallelepipedons Π, so ergeben sich mit Rücksicht auf § 4, 2 unmittelbar folgende Resultate:

5. Besteht (Fig. 15)*) die Translationsgruppe aus den Translationen

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y + \tau_z),$$

*) Die Figuren sind nach folgendem Princip gezeichnet. Gleichberechtigte Axen habe ich für jede Axenrichtung gleich bezeichnet. Schraubenaxen sind durch

so enthalten die Diagonalebenen nur Gruppen $\mathfrak{G}_3'$, die Hauptebenen nur Gruppen $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2'$. Daher schneiden sich in jeder Ecke von Π drei Axen x', y', z', während durch den Mittelpunkt drei Schraubenaxen x, y, z gehen. Durch

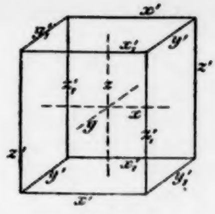


Fig. 15.

$$\mathfrak{B}_1{}^{*)} \qquad \mathfrak{X}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Y}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Z}'(\pi, 0),$$
$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y+\tau_z),$$
$$(y'z')^{**)} = (z'x') = (x'y') = 0$$

ist die Gruppe $\mathfrak{B}_1$ charakterisirt.

Alle Axen x, alle Axen y, alle Axen z sind gleichberechtigt; durch die Umklappungen kommen sie zur Deckung. Dagegen zerfallen die Axen x', y', z' in zwei verschiedene Classen gleichberechtigter; die in den Diagonalebenen liegenden sind sämmtlich gleichberechtigt, die in den Hauptebenen liegenden nicht.

Die Gruppe enthält 9 Classen von Geraden.

6. Sind die Translationen

$$\frac{1}{2}(\tau_y+\tau_z),\ \frac{1}{2}(\tau_z+\tau_x),\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y),$$

so enthalten die Hauptebenen Gruppen $\mathfrak{G}_3'$, die Diagonalebenen nicht. Daher schneiden sich in den Eckpunkten, wie im Mittelpunkt von Π drei Drehungsaxen x', y', z' (Fig. 16)***); jede Seitenfläche enthält zwei durch ihren Mittelpunkt gehende Schraubenaxen.

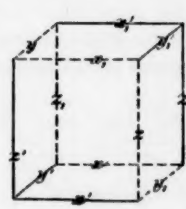


Fig. 16.

$$\mathfrak{B}_2\dagger) \qquad \mathfrak{X}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Y}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Z}'(\pi, 0),$$
$$\frac{1}{2}(\tau_y+\tau_z),\ \frac{1}{2}(\tau_z+\tau_x),\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y),$$
$$(y'z') = (z'x') = (x'y') = 0$$

bilden die zugehörige Gruppe $\mathfrak{B}_2$.

Die Axen gleicher Art zerfallen in je zwei Classen gleichberechtigter. Zwei benachbarte gleichartige Axen, die in einer Diagonalebene liegen, sind nicht gleichberechtigt. Es giebt daher 12 Classen von Geraden; dieselben werden durch die 12 Kanten eines der acht Theilparallelepipeda repräsentirt, in welche Π zerfällt.

---

gestrichelte Linien kenntlich gemacht. Die ausgezogenen Linien bedeuten Drehungsaxen, die punktirten Linien dagegen sind keine Axen, sondern dienen nur dazu, die Figur körperlich erscheinen zu lassen.

*) J. 100, S. 10.

**) Durch $(y'z')$ ... soll der Abstand der Axen y' und z' bezeichnet werden.

***) Fig. 16 enthält nur den achten Theil von Π.

†) J. 99, S. 8.

7. Sind die Translationen

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y),$$

so bilden die z-Axen eine Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$; es giebt also nur Drehungsaxen z'. Die Axen x und y bilden (Fig. 17) je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$; doch enthalten von den Hauptebenen nur die Ebenen ζ eine Gruppe $\mathfrak{C}_3'$. Da die Gruppe die Translation $\frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y)$ enthält, so geht auch durch denMittelpunkt von Π eine Gerade z'.

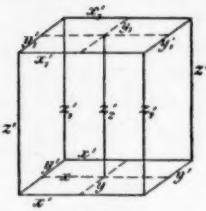


Fig. 17.

Hierdurch wird eine Gruppe definirt, gegeben durch

$\mathfrak{B}_3$*)
$$\mathfrak{X}'(\pi, 0), \mathfrak{Y}'(\pi, 0), \mathfrak{Z}'(\pi, 0),$$
$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y),$$
$$(y'z') = (z'x') = (x'y') = 0.$$

Von den Geraden x und y sind in den Ebenen ζ die gleichartigen auch gleichberechtigt; dagegen zerfallen in den Ebenen ξ und η die gleichartigen Axen in zwei Classen gleichberechtigter. Endlich giebt es drei Classen gleichberechtigter Geraden z'.

Die Gruppe enthält daher 11 verschiedene Classen gleichberechtigter Axen.

8. Endlich kann auch eine Gruppe existiren, die lauter Untergruppen $\mathfrak{C}_1(2)$ enthält, deren primitive Translationen also

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z$$

sind. Dann sind (Fig. 18) alle Axen Drehaxen; ausser den Kanten des Parallelepipedons Π giebt es in den Seitenflächen oder Diagonalebenen keine weiteren Axen. Hierdurch wird eine Gruppe

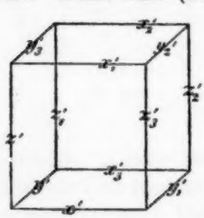


Fig. 18.

$\mathfrak{B}_4$**)
$$\mathfrak{X}'(\pi, 0), \mathfrak{Y}'(\pi, 0), \mathfrak{Z}'(\pi, 0),$$
$$\tau_x, \tau_y, \tau_z,$$
$$(y'z') = (z'x') = (x'y') = 0$$

definirt. Die Axen x', y', z' zerfallen in je vier Classen gleichberechtigter. Alle Kanten von Π repräsentiren verschiedene Geraden; es giebt 12 Classen von Axen.

Wird in den Gruppen $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_4$ $\tau_z = 0$ gesetzt, so ergeben sich specielle Gruppen $\mathfrak{B}_3'$***) und $\mathfrak{B}_4'$†). Zu einer noch specielleren Gruppe $\mathfrak{B}_4''$ gelangt man, wenn man $\tau_x = 0$ und $\tau_y = 0$ setzt.

*) J. 92, S. 7.
**) J. 91, S. 5.
***) J. 87.
†) J. 86.

b.

9. Unter den hierhergehörigen Gruppen ist die einfachste ein specieller Fall einer allgemeinen Gruppe, welche für beliebiges ω und t aus den Bewegungen

$$\mathfrak{X}'(\pi, 0), \quad \mathfrak{Z}(\omega, t)$$

unter der Bedingung erzeugt werden kann, dass die Axen a und b' sich rechtwinklig schneiden.*) In der That ergiebt sich nach § 2, 3 und 4 unmittelbar, dass für $\omega = \pi$ eine Gruppe besteht, die sich, wie folgt, beschreiben lässt. Sie enthält die Translation $2t$, *eine* Axe z, dagegen unendlich viele Axen x' und y', die sämmtlich z schneiden, und je eine Gruppe $\mathfrak{C}_1'$ bilden. Die Punkte, in denen z von den Axen x' und y' geschnitten wird, wechseln mit einander ab, und je zwei auf einander folgende haben den Abstand $\frac{1}{2}t$. Ersetzen wir noch $2t$ durch τ_z, so lässt sich die Gruppe, wie folgt, charakterisiren.

$$\mathfrak{V}_0) \quad \mathfrak{X}'(\pi, 0), \ \mathfrak{Y}'(\pi, 0), \ \mathfrak{Z}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_z\right)$$

$$\tau_z, \quad (y'z) = (zx') = 0; \ (x'y') = \frac{1}{4}\tau_z.$$

Diese Gruppe spielt für den Fall b) dieselbe Rolle, wie die Vierergruppe für den Fall a). Es wird sich zeigen, dass jede der Gruppen, welche dem Fall b) entsprechen, Untergruppen $\mathfrak{V}_0$ besitzt.

10. Um die Begriffe zu fixiren, werde festgesetzt, dass es eine Axe z giebt, die von zwei Axen x und y geschnitten wird, während x und y sich nicht schneiden. Der Abstand von x und y ist $\frac{1}{4}\tau_z$. Die Axen x und z mögen mit zwei Kanten des Parallelepipedons Π zusammenfallen; alsdann ist y Mittellinie einer Seitenfläche.

Ist nun z eine Schraubenaxe, so muss, wenn x Drehungsaxe ist, gemäss Gruppe $\mathfrak{V}_0$ auch y Drehungsaxe sein. Sind dagegen x und y gleichzeitig Schraubenaxen, so bilden wir die Producte je zweier der der Bewegungen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und gelangen dadurch zu den Bewegungen (§ 2, 3 und 4)

$$\mathfrak{X}'(\pi, 0), \quad \mathfrak{Y}'(\pi, 0), \quad \mathfrak{Z}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_z\right)$$

welche eine Gruppe $\mathfrak{V}_0$ bestimmen; denn y' und z' gehen durch den Mittelpunkt von Π, während x' in eine Seitenfläche $\mathfrak{x}$ fällt.

Ist dagegen z eine Drehungsaxe, so müssen x und y Schraubenaxen sein, weil sich sonst (§ 2, 2) drei durch einen Punkt gehende Axen einstellen. Dann liefern (nach § 2, 3 und 4) die Producte je zweier der Bewegungen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}'$ ebenfalls Bewegungen

*) Vgl. meine früher erwähnte Note, pag. 498.

$$\mathfrak{X}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Y}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Z}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_z\right)$$

welche eine Gruppe $\mathfrak{B}_0$ bestimmen; und zwar gehen jetzt x' und z durch die Mitte von Π, während y' in die Seitenfläche ζ fällt.

Alle dem Fall b entsprechenden Gruppen ergeben sich demgemäss durch Zusammensetzung der Gruppe $\mathfrak{B}_0$ mit den Translationsgruppen. Wir haben dabei nur zu prüfen, ob die so gebildeten Gruppen auch Gruppen b) sind, d. h. die Eigenschaft haben, dass niemals eine Axe x, eine Axe y, eine Axe z durch denselben Punkt hindurchgehen. Es genügt, dies für das Parallelepipedon Π zu untersuchen.

11. Durch Verbindung der Gruppe $\mathfrak{B}_0$ mit den Translationen

$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y+\tau_z)$$

entsteht die Gruppe $\mathfrak{B}_5$*), nämlich

$$\mathfrak{X}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Y}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Z}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_z\right),$$

$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y+\tau_z),$$

$$(y'z)=0,\quad (zx')=0,\quad (x'y')=\frac{1}{4}\tau_z.$$

Die Geraden x, y, z bilden (Fig. 19) je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$; die Gruppen $\mathfrak{C}_3'$ liegen in den Diagonalebenen, $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ in den Hauptebenen. Die Schraubenaxen x, y, z zerfallen in je zwei Classen gleichberechtigter Axen. Die Drehungsaxen x', y', z' bilden nur je eine Classe. Wir erhalten daher 9 Arten Geraden.

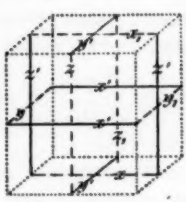


Fig. 19.

Es möge noch bemerkt werden, dass jede Gerade

$$\begin{array}{ll} x \text{ von } y' \text{ und } z', & x' \text{ von } y \text{ und } z, \\ y \text{ von } z' \text{ und } x', & y' \text{ von } z \text{ und } x, \\ z \text{ von } x' \text{ und } y', & z' \text{ von } x \text{ und } y \end{array}$$

geschnitten wird. Die Lage der Geraden ist symmetrisch nach den drei Richtungen.

12. Mit den Translationen $\frac{1}{2}(\tau_z+\tau_x)$, resp. $\frac{1}{2}(\tau_z+\tau_y)$ lässt sich keine Gruppe bilden, die dem Fall b) entspricht. Jede dieser Translationen führt auf drei sich in einem Punkt schneidende Axen.

13. Die Translationen $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y)$ ergeben die Gruppe

*) J. 101, S. 11.

$$\mathfrak{B}_6{}^{*)} \qquad \mathfrak{X}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Y}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Z}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_z\right),$$
$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y),$$
$$(y'z) = 0, \quad (zx') = 0, \quad (x'y') = \frac{1}{4}\tau_z.$$

Die Geraden x und y bilden (Fig. 20)**) je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$, die Geraden z eine Gruppe $\mathfrak{C}_2(2)$. Nur die Hauptebenen $\mathfrak{z}$ enthalten Gruppen $\mathfrak{C}_3'$, und zwar abwechselnd nur Geraden x, resp. nur Geraden y. Die Axen z zerfallen in drei Classen gleichberechtigter; dagegen bilden die Geraden x, y, x', y' nur je eine Classe. Es giebt daher 7 Classen von Geraden.

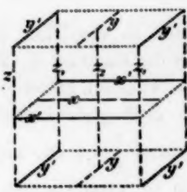


Fig. 20.

14. Endlich ergiebt sich noch die Gruppe

$$\mathfrak{B}_7{}^{***)} \qquad \mathfrak{X}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Y}'(\pi, 0),\ \mathfrak{Z}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_z\right),$$
$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,$$
$$(y'z) = 0, \quad (zx') = 0, \quad (x'y') = \frac{1}{4}\tau_z.$$

Dieselbe enthält (Fig. 21) nur Untergruppen $\mathfrak{C}_1(2)$, resp. $\mathfrak{C}_2(2)$. Die Geraden z zerfallen in vier Classen gleichberechtigter, die Geraden x' und y' nur in je zwei. Es giebt daher 8 Classen von Geraden.

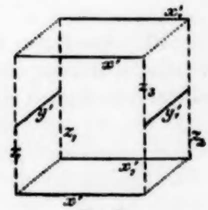


Fig. 21.

Aus $\mathfrak{B}_7$ erhalten wir für $\tau_x = 0$, resp. $\tau_x = 0$, $\tau_y = 0$ zwei specielle Gruppen $\mathfrak{B}_7'$ und $\mathfrak{B}_7''$. Die letztere ist nichts anderes, als die Gruppe $\mathfrak{B}_0$.

c.

15. Seien x und y die beiden sich schneidenden Geraden; sie mögen (Fig. 22)†) mit den Mittellinien einer Grundfläche von Π zusammenfallen. Aus § 2, 5 folgt, dass x und y Schraubenaxen sein müssen. Ferner giebt das Product von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ eine Bewegung $\mathfrak{Z}'(\pi, 0)$, deren Axe z' in eine Kante von Π fällt. Da es keine Gerade z geben kann, die von einer Geraden x oder y geschnitten wird, so folgt sofort, dass *die Geraden z eine Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$ bilden, und dass die Translationen nur τ_x, τ_y, τ_z sein können.*

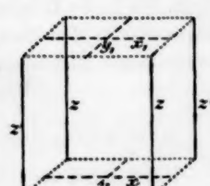


Fig. 22.

*) S. 9 und 13. Diese beiden Gruppen von Herrn Sohncke sind identisch. Bei J. fehlt diese Gruppe.

**) Die punktirten Linien der Fig. 21 sind keine Axen.

***) S. 6; fehlt bei J.

†) Die punktirten Linien der Figur sind keine Axen.

Die Bewegungen

$$\mathfrak{B}_8{}^{*)} \qquad \mathfrak{X}\left(\pi, \tfrac{1}{2}\tau_x\right), \ \mathfrak{Y}\left(\pi, \tfrac{1}{2}\tau_y\right), \ \mathfrak{Z}'(\pi, 0),$$

$$\tau_x, \ \tau_y, \ \tau_z,$$

$$(yz') = \frac{1}{4}\tau_x, \ (z'x) = \frac{1}{4}\tau_y, \ (xy) = 0$$

bilden in der That eine Gruppe. Dieselbe enthält nur Untergruppen von der Gattung $\mathfrak{C}_1(2)$ oder $\mathfrak{C}_2(2)$. Die Geraden x und y zerfallen in je zwei Classen gleichberechtigter Geraden; die in den Ebenen ζ liegenden sind gleichberechtigt; dagegen sind zwei dieser Geraden, deren Abstand $\frac{1}{2}\tau_z$, ist, nicht gleichberechtigt. Die Axen z' zerfallen ebenfalls in zwei Classen gleichberechtigter; es giebt daher 6 Arten von Geraden.

Für $\tau_z = 0$ ergiebt sich eine specielle Gruppe $\mathfrak{B}_8'$**).

d.

16. Aus § 2, 5 folgt, dass *sämmtliche Axen Schraubenaxen sein müssen*, und zwar so, dass drei Axen x, y, z kürzesten Abstandes drei windschiefe Kanten eines Parallelepipedons bilden, dessen Dimensionen $\frac{1}{4}\tau_x, \frac{1}{4}\tau_y, \frac{1}{4}\tau_z$ sind. Wir erhalten in der That eine Gruppe, definirt durch

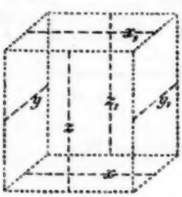


Fig. 23.

$$\mathfrak{B}_9{}^{***)} \qquad \mathfrak{X}\left(\pi, \tfrac{1}{2}\tau_x\right), \ \mathfrak{Y}\left(\pi, \tfrac{1}{2}\tau_y\right), \ \mathfrak{Z}\left(\pi, \tfrac{1}{2}\tau_z\right),$$

$$\tau_x, \ \tau_y, \ \tau_z,$$

$$(yz) = \frac{1}{4}\tau_x, \ (zx) = \frac{1}{4}\tau_y, \ (xy) = \frac{1}{4}\tau_z.$$

Dieselbe enthält (Fig. 23)†) nur Untergruppen $\mathfrak{C}_2(2)$. Die in den Diagonalebenen liegenden Geraden sind gleichberechtigt, diejenigen in den Hauptebenen nicht. Die Axen x, y, z zerfallen in je zwei Classen gleichberechtigter, es giebt daher 6 Arten von Geraden.

(Fortsetzung folgt).

Göttingen, Juli 1886.

---

*) J. 93, S. 12.

**) J. 88.

***) S. 14; fehlt bei J. Die in obiger Abhandlung nicht enthaltenen, aber von Herrn Jordan aufgestellten Gruppen 90 und 94 bis 98 geben nichts Neues.

†) Die Kanten des Parallelepipedons Π sind keine Axen der Gruppe.

Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Nachdem in früheren Abhandlungen unrichtige oder ungenaue Angaben über die Deformirbarkeit eines Raumes von n Dimensionen innerhalb eines ebenen $(n+1)$-dimensionalen Raumes gemacht worden waren, habe ich in meiner Schrift „über die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses"*) gezeigt, dass die Nicht-Deformirbarkeit solcher Räume nur unter gewissen Voraussetzungen behauptet werden darf, und habe auch Beispiele deformirbarer Räume gegeben. Bereits vorher war freilich Herr Killing**) zu demselben Resultate gekommen und hatte auch seinerseits in denjenigen n-dimensionalen Räumen, welche eine Schaar ebener $(n-1)$-dimensionaler Räume enthalten, Beispiele von Räumen gefunden, die innerhalb eines ebenen $(n+1)$-dimensionalen Raumes deformirbar sind.

Was indessen die weitere ohne Beweis von Herrn Killing aufgestellte Behauptung betrifft, dass hierdurch alle n-dimensionalen innerhalb eines ebenen $(n+1)$-dimensionalen Raumes deformirbaren Räume gefunden seien, so schien mir dieselbe schon bei Abfassung der o. a. Schrift zweifelhaft. In der That fand ich sehr bald, dass dieser Zweifel begründet sei, insofern gerade die von mir dort angegebenen Räume keine ebenen $(n-1)$-dimensionalen Räume zu enthalten brauchen. Es schien mir daher der Mühe werth, die Frage nach allen innerhalb eines ebenen $(n+1)$-dimensionalen Raumes deformirbaren Räumen von n Dimensionen näher zu untersuchen, wobei ich mich indessen auf den Fall $n=3$ beschränkt habe, der mir besonderes Interesse zu bieten scheint. In diesem Falle ist es mir auch gelungen, die Frage bis zu einem gewissen Grade zu erledigen.

---

*) S. Math. Ann. Bd. XXVII, p. 172.

**) S. Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig, 1885, p. 238.

Man findet nämlich, dass diese Räume ∞^2 gerade Linien enthalten müssen, dass ferner jede derselben von zwei unendlich benachbarten getroffen wird, sodass man dieselben zu zwei Schaaren abwickelbarer Flächen zusammenfassen kann. Ordnet man nun die Richtungen der geraden Linien des ebenen vierdimensionalen Raumes den Punkten eines dreidimensionalen sphärischen Raumes in bekannter Weise zu, so entsprechen jenen ∞^2 geraden Linien die Punkte einer gewissen Fläche innerhalb desselben und jenen beiden Schaaren abwickelbarer Flächen entsprechen zwei Schaaren von Linien, welche die Fläche in unendlich kleine sphärische Vierecke theilen, also conjugirte Linien sind. Die Entscheidung nun, ob der gegebene dreidimensionale Raum innerhalb des ebenen vierdimensionalen deformirbar sei oder nicht, ist dann zurückgeführt auf die Entscheidung darüber, ob jene Fläche innerhalb des sphärischen Raumes so deformirbar sei, dass jenen beiden Schaaren von Linien auf derselben die Eigenschaft erhalten bleibt, sie in unendlich kleine sphärische Vierecke einzutheilen. Hierbei bedürfen allerdings einige Ausnahmefälle einer besonderen Untersuchung.

Was nunmehr das Problem betrifft innerhalb eines sphärischen dreidimensionalen Raumes alle Flächen aufzustellen, die so deformirbar sind, dass zwei Schaaren conjugirter Linien auf derselben in ebensolche übergehen,*) so ist es mir nicht gelungen der Lösung desselben näher zu kommen. Es lässt sich nur so viel sagen, dass bei Annahme einer beliebigen Fläche und irgend zweier Schaaren conjugirter Linien auf derselben die Deformation i. A. nicht unter obigen Bedingungen möglich ist, dass also die von mir a. a. O. aufgestellten nothwendigen Bedingungen für die Deformirbarkeit eines dreidimensionalen Raumes innerhalb eines ebenen Raumes von vier Dimensionen nicht zugleich auch hinreichend sind.

Wenn es mir also auch nicht gelungen ist, das im Titel gemeinte Problem vollständig zu erledigen, so dürfte das Folgende doch zur besseren Einsicht in die Natur desselben beitragen.

I. Im zweiten Paragraphen meiner o. a. Schrift habe ich als nothwendige Bedingungen dafür, dass ein Raum von n Dimensionen, der innerhalb eines ebenen $(n+1)$-dimensionalen Raumes durch die Gleichung:

$$(1)\qquad x_{n+1} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{n} c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} x_{\mathfrak{a}} x_{\mathfrak{b}} + \cdots$$

*) Offenbar enthält dies Problem als speciellen Fall dasjenige: eine Fläche so zu deformiren, dass die Krümmungslinien derselben in ebensolche übergehen, welches für den ebenen Raum von Bonnet in seinem „mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée", Journal de l'école polyt. ton. XXV, p. 58. behandelt worden ist.

gegeben ist, innerhalb desselben in der Nähe des Anfangspunktes deformirbar sei, die angegeben, dass alle Unterdeterminanten 3. Ordnung der aus den c_{ab} gebildeten Determinante verschwinden. Es folgte dies aus der Betrachtung des Riemann'schen Krümmungsmaasses, welches für den Anfangspunkt die Form annimmt:

$$(2)\quad K^0 = \frac{\sum\limits_{a,b;\,c,d}^{n} (c_{ab}c_{cd} - c_{ac}c_{bd})(dx_a\delta x_b - dx_b\delta x_a)(dx_d\delta x_c - dx_c\delta x_d)}{\sum\limits_{a;c}^{n} (dx_a\delta x_c - dx_c\delta x_a)^2}.$$

Denn nur dann ergaben sich aus vorgelegten Werthen der Unterdeterminanten 2. Ordnung $c_{ab}c_{cd} - c_{ac}c_{bd}$ nicht eindeutig die Werthe der c_{ab} selbst.

Um diese Bedingungen nun auch in dem Falle zu erhalten, dass der zu deformirende Raum in der Form:

$$(2)\qquad x_a = \varphi_a(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (a = 1, 2, \ldots, n+1)$$

gegeben ist, wird es vortheilhaft sein, das Riemann'sche Krümmungsmaass durch die sogenannten *Fundamentalgrössen* 1. *und* 2. *Ordnung* auszudrücken. Als Fundamentalgrössen 1. Ordnung bezeichnen wir die Ausdrücke:

$$(4)\qquad e_{ab} = \sum_{c}^{n+1} \frac{\partial x_c}{\partial u_a}\frac{\partial x_c}{\partial u_b};$$

und als Fundamentalgrössen 2. Ordnung die Grössen:

$$(5)\quad E_{ab} = \sum_{c}^{n+1} P_c \frac{\partial^2 x_c}{\partial u_a\,\partial u_b} = -\sum_{c}^{n+1} \frac{\partial P_c}{\partial u_a}\frac{\partial x_c}{\partial u_b} = -\sum_{c}^{n+1} \frac{\partial P_c}{\partial u_b}\frac{\partial x_c}{\partial u_a}.$$

Hier sind die Grössen P_a, die sogenannten *Richtungscosinus der Normale*, bestimmt durch die Gleichungen:

$$(6)\qquad \sum_{b}^{n+1} P_b \frac{\partial x_b}{\partial u_a} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

und:

$$(7)\qquad \sum_{a}^{n+1} P_a^2 = 1.$$

Falls die Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung in geeigneter Weise als Functionen der u_a gegeben sind, so ist der Raum (3) bekanntlich*) bis auf seine absolute Grösse und Lage im Raume vollkommen bestimmt.

*) S. Runge, Ueber die Krümmung, Torsion u. s. w., Diss. Berlin, 1880.

Um nun aus (2) einen Ausdruck für das Riemann'sche Krümmungsmaass herzuleiten, müssen wir zunächst einen Uebergang suchen von dem hier vorausgesetzten allgemeinen Coordinatensysteme zu dem speciellen, welches der Gleichungsform (1) zu Grunde liegt. Bezeichnen wir die Coordinaten in demselben mit y_a, so mag der Anfangspunkt desselben, welcher ja ein Punkt von (3) ist, in dem allgemeinen Coordinatensysteme die Coordinaten $x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0$ haben. Da seine y_{n+1}-Axe die Richtungscosinus $P_1^0, \ldots, P_{n+1}^0$ hat, so ist offenbar:

$$y_{n+1} = x_{n+1}^0 + \sum_{a}^{n+1} P_a^0\, x_a. \tag{8}$$

Nun ist doch:

$$c_{ab} = \left(\frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial y_a \partial y_b}\right)^0, \tag{9}$$

und:

$$\frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial y_a \partial y_b} = \sum_{c;\, b,\, f}^{n+1;\, n} P_c^0 \frac{\partial^2 x_c}{\partial u_b \partial u_f} \frac{\partial u_b}{\partial y_a} \frac{\partial u_f}{\partial y_b} + \sum_{c,\, b}^{n+1;\, n} P_c^0 \frac{\partial x_c}{\partial u_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial y_a \partial y_b}. \tag{10}$$

Es wird demnach auf Grund von (5) und (6):

$$c_{ab} = \sum_{c,\, b}^{n} E_{c,b}^0 \frac{\partial u_c}{\partial y_a} \frac{\partial u_b}{\partial y_b}. \tag{11}$$

Wir erhalten daher nach ähnlichen Umformungen, wie ich sie in § 4 meiner Abhandlung*) „Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen" vorgenommen habe, für das Riemann'sche Krümmungsmaass in irgend einem Punkte des Raumes (3) den Ausdruck:

$$K = \frac{\sum_{a,b;\, c,b}^{n} (E_{ab}E_{cb} - E_{ac}E_{bb})(du_a \delta u_b - du_b \delta u_a)(du_b \delta u_c - du_c \delta u_b)}{\sum_{a,b;\, c,b}^{n} (c_{ab}\, c_{cb} - c_{ac}\, c_{bb})\, (du_a \delta u_b - du_b \delta u_a)(du_b \delta u_c - du_c \delta u_b)}. \tag{12}$$

Da bei Deformation das Riemann'sche Krümmungsmaass erhalten bleiben muss, so lehrt er ohne Weiteres, dass eine solche nur dann möglich ist, wenn *alle Unterdeterminanten* 3. *Ordnung der aus den Fundamentalgrössen* 2. *Ordnung* E_{ab} *gebildeten Determinante verschwinden.*

II. Beschränken wir uns nunmehr auf den Fall $n = 3$, so giebt es offenbar unter den gemachten Voraussetzungen in jedem Punkte des Raumes (3) eine ausgezeichnete Richtung von der Beschaffenheit,

*) S. Math. Ann. Bd. XXVII, p. 537.

dass alle dieselbe enthaltenden geodätischen Flächen verschwindendes Krümmungsmaass besitzen. Aus diesen Richtungen setzt sich ein System von doppelt endlich viel Linien zusammen, welche man zu Linien $u_1 = \text{const.}$, $u_2 = \text{const.}$ machen kann. Dann muss offenbar sein:

(13) $$E_{13} = 0, \quad E_{23} = 0, \quad E_{33} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun zunächst in Verbindung mit:

(14) $$\sum_{\alpha=1}^{4} P_\alpha \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_3} = 0,$$

dass die P_α von u_3 unabhängig sind. Es besagen daher die Gleichungen:

(15) $$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_3} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_3}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_3},$$

und:

(16) $$\sum_{\varrho=1}^{4} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_3}\right)^2 = 1,$$

welch letztere Gleichung nur den Parameter u_3 näher definirt, dass auch die $\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_3}$ unabhängig von u_3 sind, *d. h. dass die x_α lineare Functionen von u_3 sind, dass der zu deformirende Raum also gerade Linien enthalten muss.*

Wir können denselben daher darstellen in der Form:

(17) $$x_\alpha = \varphi_\alpha(u_1, u_2) + u_3 \psi_\alpha(u_1, u_2) \qquad (\alpha = 1,2,3,4),$$

wo:

(18) $$\sum_{\alpha}^{4} \psi_\alpha^2 = 1.$$

Hierdurch wird E_{33} von selbst $= 0$. Sollen also auch E_{13} und E_{23} unabhängig von u_3 verschwinden, so liefert das die vier Determinantengleichungen:

(19) $$\begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_2}, \ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_1}, \ \psi_\alpha \right| = 0, \\ \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_2}, \ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_2}, \ \psi_\alpha \right| = 0, \\ \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_2}, \ \psi_\alpha \right| = 0, \\ \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_2}, \ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_2}, \ \psi_\alpha \right| = 0, \end{cases}$$

welche in dem Verschwinden der Matrix:

$$\left|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1},\quad\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_2},\quad\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_1},\quad\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_2},\quad\psi_\alpha\right|=0 \tag{20}$$

einen gemeinsamen Ausdruck finden.

Dies besagt nun geometrisch, *dass es zu jeder Geraden zwei unendlich benachbarte giebt, von welchen sie getroffen wird.* Denn dann müssen für gegebene Werthe von u_1 und u_2 die 4 Gleichungen befriedigt werden können:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_2}du_2+u_3'\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_1}du_1+u_3'\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_2}du_2+(u_3'-u_3)\,\psi_\alpha=0 \tag{21}$$
$$(\alpha=1,2,3,4).$$

Wir wollen hier zunächst von dem Fall absehen, dass diese zwei benachbarten und schneidenden Geraden für jede Gerade des betrachteten Raumes zusammenfallen. *Dann können wir offenbar die Geraden desselben zu zwei Schaaren abwickelbarer Flächen zusammenfassen* und annehmen, dass dies die Flächen $u_1=\text{const.}$ und $u_2=\text{const.}$ seien, dass also die Gleichungen (20) durch $du_1=0$ resp. $du_2=0$ befriedigt werden können. Es müssen daher die Matrices:

$$\left|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1},\quad\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_1},\quad\psi_\alpha\right|\quad\text{und}\quad\left|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_2},\quad\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_2},\quad\psi_\alpha\right|=0 \tag{22}$$

sein, wodurch die Matrix (20) von selbst verschwindet.

Diesen Gleichungen genügt man nun auf die allgemeinste Weise dadurch, dass man setzt:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}=\lambda_1\psi_\alpha+\mu_1\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_1},\qquad\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_2}=\lambda_2\psi_\alpha+\mu_2\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_2}, \tag{23}$$

wo die λ_α und μ_α gewisse Functionen von u_1 und u_2 sind; sind dieselben sowie die ψ_α den Integrabilitätsbedingungen gemäss gewählt, *so sind die φ_i dadurch bis auf willkürliche Constanten bestimmt.*

Offenbar wird jetzt:

$$\begin{cases}e_{11}=\lambda_1^2\;+(u_3+\mu_1)^2F_{11}, & e_{13}=\lambda_1,\\ e_{12}=\lambda_1\lambda_2+(u_3+\mu_1)(u_3+\mu_2)F_{12}, & e_{23}=\lambda_2,\\ e_{22}=\lambda_2^2\;+(u_3+\mu_2)^2F_{22}, & e_{33}=1,\end{cases} \tag{24}$$

wo:

$$F_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma}^{4}\frac{\partial\psi_\gamma}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial\psi_\gamma}{\partial u_\beta}. \tag{25}$$

Was nun die *Integrabilitätsbedingungen* betrifft, so lauten dieselben:

$$\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial u_1\partial u_2}(\mu_1-\mu_2)+\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial u_2}-\lambda_2\right)\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_1}-\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial u_1}-\lambda_1\right)\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial u_2}$$
$$+\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial u_2}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial u_1}\right)\psi_\alpha=0. \tag{26}$$

III. Hier sind zunächst einige *specielle Fälle* gesondert zu behandeln. Es kann zunächst der Fall eintreten, dass die ψ_α überhaupt von u_1 und u_2 unabhängig, also constant sind, durch welche Annahme die Matrix (20) von selbst verschwinden würde, wie auch die φ_α beschaffen sein mögen. Bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems wird man dann $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ und $\psi_4 = 1$ setzen können; führt man noch für u_3 als dritten Parameter $u_3 + \varphi_4(u_1, u_2)$ ein, so kommt man gerade auf *den cylindrischen Raum*, welchen ich schon a. a. O. p. 172 als deformirbar erwähnt habe.

Es kann zweitens der Fall eintreten, dass die ψ_α nur von u_1 abhängig sind. Dann muss offenbar nach (25) sein:

$$(27) \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} = 0.$$

Führt man daher statt des Parameters u_3 den neuen Parameter

$$u_3' = \mu_1 + u_3$$

ein, wodurch die Gleichungen (17) unseres Raumes übergehen in:

$$(28) \qquad x_\alpha = \varphi'_\alpha(u_1, u_2) + u_3' \psi_\alpha,$$

wo:

$$\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha - \mu_1 \psi_\alpha,$$

so wird auch:

$$\frac{\partial \varphi'_\alpha}{\partial u_2} = 0,$$

unser Raum würde sich also auf eine *Fläche* reduciren, welche natürlich innerhalb eines ebenen vierdimensionalen Raumes deformirbar ist.

Nehmen wir endlich an, dass die Integrabilitätsbedingungen dadurch erfüllt sind, dass ausser den Gleichungen (27) noch die Gleichungen:

$$(29) \qquad \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} - \lambda_1 = 0$$

bestehen, so würde:

$$(30) \qquad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{\partial(\mu_1 \psi_\alpha)}{\partial u_\mathfrak{b}}$$

sein. Führt man demnach $u_3' = \mu_1 + u_3$ wiederum als neuen Parameter ein, so ist unser Raum darstellbar in der Form:

$$(31) \qquad x_\alpha = u_3 \psi_\alpha(u_1, u_2),$$

und es ist evident, dass jede Deformation der in dem sphärischen Raume (18) gelegenen Fläche:

$$(32) \qquad x_\alpha = \psi_\alpha(u_1, u_2)$$

eine Deformation *des conischen Raumes* (31) liefert.

IV. Was nun *den allgemeinen Fall* betrifft, so folgt aus den Integrabilitätsbedingungen (26) zunächst die Gleichung:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \quad \psi_a \right| = 0. \tag{33}$$

Ist dieselbe erfüllt, so kann man die Gleichungen (26) durch die drei symmetrischen ersetzen:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial F_{11}}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2\right) F_{11} + \left(\lambda_1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1}\right) F_{12} = 0, \\ \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial F_{22}}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2\right) F_{12} + \left(\lambda_1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial u_1}\right) F_{22} = 0, \\ -(\mu_1 - \mu_2) F_{12} + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1}\right) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Indem man die ersten beiden Gleichungen nach $\frac{\partial \mu_1}{\partial u_2} - \lambda_2$ und $\frac{\partial \mu_2}{\partial u_1} - \lambda_1$ auflöst, ist es leicht aus diesen drei Differentialgleichungen 1. Ordnung eine Differentialgleichung 2. Ordnung für

$$\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) = \mu$$

von folgender Form abzuleiten:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial \mu}{\partial u_1} A_1 + \frac{\partial \mu}{\partial u_2} A_2 + \mu A = 0, \tag{35}$$

wo die A, A_1, A_2 rationale Functionen der F_{ab} und deren ersten und zweiten Ableitungen sind. Auf Grund dieser Differentialgleichung ist μ durch die F_{ab} bestimmt bis auf je eine willkürliche Function von u_1 resp. u_2; μ_1 und μ_2 selbst und in Folge dessen auch λ_1 und λ_2 kann man sich dann dadurch vollständig gegeben denken, dass man etwa $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ noch gleich einer willkürlich gegebenen Function von u_1 und u_2 setzt. Man bemerke jedoch, dass diese willkürliche Function nicht als weiteres willkürliches Element in der Bestimmung des gesuchten Raumes auftritt, dass dieselbe vielmehr ihren Ursprung darin hat, dass über die Fläche $u_3 = 0$ innerhalb desselben noch nichts festgesetzt ist, während ja u_3 selbst die Entfernung irgend eines Punktes jeder Geraden vom Punkte $u_3 = 0$ derselben bedeutet. So würde z. B. die Annahme, dass $\mu_1 + \mu_2 = 0$, geometrisch darauf hinauskommen, dass eine gewisse Mittelfläche als die Fläche $u_3 = 0$ gewählt wird, nämlich der Ort der Mitten zwischen den beiden Schnittpunkten jeder Geraden mit den beiden unendlich benachbarten, welche sie treffen. Was aber die beiden zur näheren Bestimmung von μ dienenden Functionen von u_1 resp. u_2 betrifft, so kann man, nachdem man etwa festgesetzt hat, dass u_1 resp. u_2 die Bögen der Curven $u_2 = 0$ resp. $u_1 = 0$ auf der Fläche (32) bedeuten, diese Functionen sich dadurch gegeben denken,

dass die Bögen der Curven $u_2 = 0$ resp. $u_1 = 0$ auf der Mittelfläche als Functionen von u_1 resp. u_2 vorgelegt sind.

Nachdem also die Fläche (32) innerhalb des sphärischen Raumes (18) willkürlich angenommen ist und auf ihr die Linien $u_2 =$ const. und $u_1 =$ const. der Bedingung (33) gemäss gewählt worden sind, ist durch die eben gemachte weitere Festsetzung vollständig ein Raum bestimmt, welcher die früher gefundenen nothwendigen Bedingungen der Deformirbarkeit befriedigt.

Nun hat offenbar die Bedingung (33) die geometrische Bedeutung, dass die Linien $u_1 =$ const. und $u_2 =$ const. die Fläche (32) in unendlich kleine Vierecke eintheilen, deren Ecken in grössten Kugeln des sphärischen Raumes (18) liegen, oder dass jene Linien *conjugirte Linien* sind. Betrachten wir daher die Ausdrücke (24) für die Coefficienten des Linienelements und bedenken, dass die developpabeln Flächen sowohl, zu welchen sich die Geraden zusammenfassen lassen, als auch die Mittelfläche in unserem allgemeinen Falle eine bei Deformation invariante Bedeutung haben, so folgt, *dass der so bestimmte Raum dann und nur dann wirklich innerhalb des ebenen vierdimensionalen Raumes deformirbar ist, wenn die Fläche* (32) *innerhalb des sphärischen Raumes* (18) *so deformirt werden kann, dass die Linien $u_1 =$ const. und $u_2 =$ const. die Eigenschaft beibehalten, einander conjugirt zu sein.*

Es ist klar, dass bei willkürlicher Annahme der Fläche (18) sowohl als des einen Systems von Linien auf ihr eine solche Deformation nicht möglich sein wird. Wir erhalten demnach das Resultat, *dass ein innerhalb eines ebenen vierdimensionalen Raumes gelegener Raum von 3 Dimensionen, für welchen die aus den Fundamentalgrössen 2. Ordnung E_{ab} gebildete Determinante (oder das Krümmungsmaass im Kronecker'schen Sinne) überall verschwindet, im Allgemeinen noch nicht deformirbar ist.* Die weiteren Bedingungen, welche hierzu nothwendig, aber auch hinreichend sind, zeigen, dass die Aufstellung aller solchen deformirbaren Räume, die Integration der Differentialgleichung (35) vorausgesetzt, hinauskommt auf die Lösung des Problems, *innerhalb eines sphärischen dreidimensionalen Raumes alle Flächen zu finden, welche in ihm so deformirbar sind, dass zwei conjugirte Liniensysteme derselben in ebensolche übergehen.* Dieses, wie es scheint, sehr schwierige Problem zu lösen, ist mir nicht gelungen. Ich will mich hier damit begnügen, auf sehr einfache *Beispiele* solcher Flächen hinzuweisen. Es sind die Rotationsflächen, d. h. die durch Rotation irgend einer Curve innerhalb des sphärischen Raumes (18) um eine durch den Anfangspunkt gehende Ebene entstandenen Flächen. Sie sind stets in andre Rotationsflächen so deformirbar, dass die Parallelkreise und Meridiane in ebensolche übergehen. Man sieht leicht, dass dieselben

i. A. keine grössten Kreise, die ihnen entsprechenden dreidimensionalen Räume also keine Ebenen enthalten werden.

V. Es bleibt uns zuletzt noch übrig den bisher ausgeschlossenen Fall zu untersuchen, dass die zwei jeder Geraden benachbarten, welche sie treffen, jedesmal zusammenfallen, dass die Geraden des betrachteten Raumes also nur *ein* System abwickelbarer Flächen bilden. Sind dies die Flächen $u_2 =$ const., ist also wieder:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1} = \lambda_1 \psi_a + \mu_1 \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \tag{36}$$

so ergiebt die Bedingung, dass jede Gleichung der Determinantenform (cfr. (21)):

$$\left| \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_1} + u_3' \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2} + u_3' \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \quad \psi_a \right| = 0 \tag{37}$$

die Doppelwurzel $u_3' = -\mu_1$ haben muss, dass sein muss:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial u_2} = \lambda_2 \psi_a + \mu_1 \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2} + \nu \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \tag{38}$$

woraus sich die Integrabilitätsbedingungen:

$$\nu \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial u_1^2} + \left(\lambda_2 + \frac{\partial \nu}{\partial u_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial u_2}\right) \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial u_1} - \lambda_1\right) \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2}\right) \psi_a = 0 \tag{39}$$

ergeben.

Sehen wir wiederum von denselben Specialfällen ab, die bei Behandlung der Integrabilitätsbedingungen (26) in Betracht kamen und auch dieselbe Erledigung finden, so folgt aus den Gleichungen (39), dass die Determinante:

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial u_2}, \quad \psi_a \right| = 0 \tag{40}$$

sein muss. Es bedeutet dies, dass die Curven $u_2 =$ const. der Fläche (32) *Hauptangentencurven* sind. Es kommt also darauf an, diese Fläche innerhalb des sphärischen Raumes (18) so zu verbiegen, dass eine Schaar von Haupttangentencurven derselben in ebensolche übergeht. Das ist aber, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, nicht anders möglich, als wenn diese Haupttangentencurven grösste Kreise sind, *die abwickelbaren Flächen, zu welchen wir die Geraden des zu deformirenden Raumes zusammengefasst haben, also Ebenen.* Dass in diesem Falle wirklich eine Deformation möglich ist, hat ja Herr Killing a. a. O. bewiesen. Aus unserer Behandlung der Frage geht noch hervor, dass mit Ausnahme eines sogleich zu erwähnenden Specialfalles diese Deformation nur auf dem von Herrn Killing angegebenen Wege

geschehen kann, nämlich so, dass *jene Ebenen wieder in Ebenen übergehen.* (Eine Ausnahme bilden natürlich auch die oben erwähnten cylindrischen und conischen Räume). Man bemerke noch, dass hier bei der Deformation noch über eine willkürliche Function einer Veränderlichen verfügt werden kann, während in dem oben behandelten sogenannten allgemeinen Falle nur eine willkürliche Constante disponibel sein wird.

Hingegen kann bei der Deformation noch über drei willkürliche Functionen je einer Veränderlichen verfügt werden eben in jenem Ausnahmefalle, nämlich, wenn die Fläche (18) auf eine grösste Kugel abwickelbar ist. Denn da sich in diesem Falle je zwei aufeinanderfolgende dieser grössten Kreise schneiden, so haben auch zwei aufeinanderfolgende Ebenen des zu deformirenden Raumes eine Gerade gemeinsam, *dieser Raum kann also in einen ebenen Raum deformirt werden oder er hat verschwindendes Riemann'sches Krümmungsmaass.* Dies lässt sich auch leicht analytisch verificiren.

Näher auszuführen, wie die Deformation in diesen Fällen wirklich vorzunehmen ist, scheint mir von geringerem Interesse. Die grosse Anzahl von Specialfällen, auf welche schon in diesem einfachsten Falle der Deformation eines dreidimensionalen Raumes innerhalb eines ebenen vierdimensionalen Rücksicht zu nehmen ist, mag erkennen lassen, wie sich dies Problem beim Aufsteigen zu höheren Dimensionen complicirt.

Maciejewo, im September 1886.

Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen.

Von

Max Noether in Erlangen.

In den hier mitzutheilenden Betrachtungen*) verfolge ich mehrere Zwecke.

Zunächst handelt es sich um Herstellung einer *möglichst symmetrischen* Gestalt für die Formel, durch die einfache Thetaquotienten algebraisch durch die oberen Grenzen derjenigen Integralsummen ausgedrückt werden, welche die Argumente der Thetafunctionen bilden. Während die Herren Prym, Weber und H. Stahl**) der Symmetrie durch Einführung einer Summe von $p+1$ Integralen sich nähern, erreiche ich durch Einführung einer Summe von $2p-2$ Integralen eine Formel (§ 4, (13)), welche auch noch in den unteren festen Grenzpunkten symmetrisch geworden ist; welche ferner den sonst in den unteren Grenzen nach Clebsch und Gordan's Vorgang formal eingeführten *einen* Punkt der Grundcurve mit den p Berührungspunkten einer der zu diesem Punkte gehörigen Berührungscurven auch explicit nicht mehr enthält, und in deren algebraischem Ausdrucke nur *reine Berührungscurven* (vgl. § 2) auftreten. Auch die *Herleitung* der sehr einfachen Formel geschieht völlig symmetrisch.

Zweitens, und hauptsächlich, gebe ich in § 5 einen einfachen Uebergang von dieser Formel zu einer neuen Lösung des *Jacobi'schen Umkehrproblems.* Ich gelange unmittelbar in (21), oder (21'), zu den Gleichungen zweier Curven (dritter, oder zweiter, Dimension in den φ), welche die Grundcurve in den gesuchten p Punkten treffen.

---

*) Dieselben sind ein kurzer Auszug aus einigen Theilen einer eingehenden Vorlesung über algebraische und Abel'sche Functionen.

**) Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Wiener Akad. 1864, § 29, und allgemeiner in Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866; Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin 1876, § 24; H. Stahl, Ueber die Behandlung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale, Dissert. Berlin 1882, oder Cr. J., Bd. 89.

Ein analoger Uebergang ist zwar auch bei Weber (l. c. § 26) und Stahl (Dissert. p. 16) enthalten. Indessen wird dort erst der Zähler des Ausdrucks (12) mittels des Additionstheorems der ϑ-Functionen zerlegt und die die unabhängige Variable enthaltenden speciellen Thetaquotienten werden durch ihre algebraischen Ausdrücke ersetzt, wobei die vollständige complicirte Constantenbestimmung in diesen Ausdrücken verlangt wird; während in (21) und (21′) diese Constantenbestimmung wegfällt, dafür aber auch an Stelle der gegebenen Argumente v_h als Argumente Grössen $v_h + \varkappa_h$ treten, in welchen die $\varkappa_h$ Integralsummen mit gegebenen festen, übrigens beliebig anzunehmenden, oberen Grenzen sind.

Endlich wollte ich, da ich als Grundlage der Entwicklungen die den 2^{2p} eigentlichen Halber-Charakteristiken entsprechenden 2^{2p} Thetafunctionen und die zugeordneten Classen von reinen Berührungscurven einzuführen habe (§§ 1—3), nochmals*) auf die nothwendige Unterscheidung zwischen *eigentlichen* und *Gruppen-Charakteristiken* hinweisen, indem ich (§ 2, Nr. 3) die zweierlei Arten der Zuordnung von halben Perioden zu Berührungscurven nach dem Abel'schen Theorem auseinandersetze. Den letzten Paragraphen (§ 6) habe ich hinzugefügt, um zu zeigen, wie auch das verschiedenartige Verhalten der *Transformation erster Ordnung* diesen beiden Arten von Charakteristiken gegenüber die Unterscheidung klar bedingt. Zugleich dient derselbe zur Herstellung des Zusammenhangs der Charakteristiken*transformationen* mit denjenigen Untersuchungen über Charakteristiken-*Systeme* und -*Substitutionen*, welche ich in der u. c. Arbeit, Math. Ann. XVI, angestellt habe. Es zeigt sich — auf noch directere und explicitere Weise, als bei Weber „Ueber die Transformation der Thetafunctionen"**) —, welche Transformationen und Systeme, bez. Substitutionen, sich entsprechen.

§ 1.

Vorerinnerungen.

1. Sei $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung, vom Geschlechte p. Nachdem deren Punkte eindeutig auf eine Riemann'sche Fläche bezogen sind, welche man durch p canonische Querschnittpaare $a_\varkappa, b$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, p)$ in eine einfach-zusammenhängende verwandelt hat, seien die zugehörigen canonischen Integrale erster Gattung durch

$$u_1, u_2, \ldots, u_\varkappa \ldots u_p,$$

*) Vgl. meinen Aufsatz: „Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten", Math. Ann. Bd. XVI.

**) Annali di Matematica, Ser. 2, Bd. IX.

deren Periodensystem am Querschnitte $a_\varkappa$ mit

$$0, 0, \ldots, \pi i, \ldots, 0$$

(πi für $u_\varkappa$, 0 für die übrigen u_h), am Querschnitte $b_\varkappa$ mit

$$a_{1\varkappa}, a_{2\varkappa}, \ldots, a_{p\varkappa}$$

bezeichnet. Das allgemeinste simultane Periodensystem bezeichne ich mit

$$\varpi_h^\alpha = m_h^\alpha \cdot \pi i + \sum_\varkappa^{1\ldots p} n_\varkappa^\alpha a_{h\varkappa}, \quad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

wo die m_h^α, $n_\varkappa^\alpha$ einen Complex von $2p$ ganzen Zahlen vorstellen, den ich zu einer Charakteristik

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha\, n_2^\alpha \ldots n_p \\ m_1^\alpha m_2^\alpha \ldots m_p^\alpha \end{pmatrix}$$

zusammenfasse, wobei (0) die Elemente

$$n_h^0 = 0, \; n_\varkappa^0 = 0$$

und $(\alpha) + (\beta) = (\alpha\beta)$ die Elemente

$$n_h^\alpha + n_h^\beta, \; m_h^\alpha + m_h^\beta$$

haben möge. Dieser Charakteristik (α) wird die Thetafunction mit den p Argumenten $v_1, v_2, \ldots, v_p$ und den Grössen $a_{h\varkappa}$ als Moduln zugeordnet:

$$\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \vartheta_\alpha((v))$$

$$= \sum_{s_1, \ldots, s_p}^{-\infty \ldots +\infty} e^{\sum\limits_{h,\varkappa}^{1\ldots p} a_{h\varkappa}\left(s_h + \frac{n_h^\alpha}{2}\right)\left(s_\varkappa + \frac{n_\varkappa^\alpha}{2}\right) + 2\sum\limits_h^{1\ldots p}\left(s_h + \frac{n_h^\alpha}{2}\right)\left(v_h + \frac{m_h^\alpha \pi i}{2}\right)}$$

$$= e^{\sum\limits_h^{1\ldots p} n_h^\alpha\left(v_h + \frac{1}{2} m_h^\alpha \pi i + \frac{1}{4}\sum\limits_\varkappa^{1\ldots p} n_\varkappa^\alpha a_{h\varkappa}\right)} \cdot \vartheta\left(\left(v + \frac{1}{2}\varpi^\alpha\right)\right)$$

wo

$$\vartheta_0((v)) = \vartheta((v))$$

gesetzt ist.

Für die Periodicitätseigenschaften und Beziehungen dieser Functionen verweise ich etwa auf meine Arbeit in Bd. XVI dieser Annalen*).

2. Setzt man in die erste der 2^{2p} ϑ-Functionen ein:

$$v_h = \int_\zeta^\xi du_h - e_h \quad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

*) Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten.

wo ζ ein festgewählter, ξ ein variabler Punkt von f, die e_h gegebene Constanten sind, so verschwindet

$$\vartheta\left(\left(\int_\zeta^\xi du - e\right)\right)$$

als Function von ξ, in p Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_p$ von f, für welche

$$e_h \equiv \sum_i^{1\ldots p} \int_{\varepsilon_i^0}^{x_i} du_h \quad \text{(mod. ganzer Perioden)},$$

nur specielle Werthe der e ausgenommen, bei welchen die $x_1, x_2, \ldots, x_p$ auf eine zu f adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, eine Curve φ, zu liegen kommen, in welchem Falle der Ausdruck für jedes ξ verschwindet. Die p Punkte ε_i^0 sind dabei die 0-Punkte von

$$\vartheta\left(\left(\int_\zeta^\xi du\right)\right),$$

und sind algebraisch definirt*) als die p Berührungspunkte einer gewissen unter den 2^{2p} zu f adjungirten Curven C_ζ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch die $n-2$ weiteren Schnittpunkte von f mit einer Tangente in ζ hindurchgehen und f in je p Punkten berühren.

Die in den ε_i^0 berührende Curve C_ζ^0 ist bei der angenommenen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche durch die ausgezeichnete ϑ-Function vor den übrigen C_ζ ausgezeichnet. Für die Berührungspunkte ε_i^a der übrigen Curven C_ζ^a hat man:

$$\text{(1)} \qquad \sum_i^{1\ldots p} \int_{\varepsilon_i^0}^{\varepsilon_i^a} du_h \equiv \frac{1}{2}\,\varpi^{(a)},$$

d. h. in diesen Punkten ε_i^a verschwindet

$$\vartheta_a\left(\left(\int_\zeta^\xi du\right)\right)$$

als Function von ξ.

Sobald $\vartheta_a((0)) = 0$ ist, fällt einer der Punkte $\varepsilon_1^a, \ldots, \varepsilon_p^a$ in den Punkt ζ; und umgekehrt. Die übrigen Berührungspunkte ε^a seien dann mit

$$\eta_1^a, \eta_2^a, \ldots, \eta_{p-1}^a$$

bezeichnet; dieselben sind die Berührungspunkte einer f in $p-1$ Punkten

*) Clebsch-Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen.

je in 1[ter] Ordnung berührenden Curve φ und sind vom Punkte ζ unabhängig. Für eine *ungerade* Charakteristik (a), d. h. wenn

$$\sum_h^{1\dots p} n_h^a m_h^a = |a| \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2),$$

tritt dieser Fall immer ein; für gerade (a), d. h. für

$$|a| \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

kann dieser Fall — bei speciellen Moduln — eintreten. Aber beide Fälle lassen sich immer nicht nur an dem Verhalten der $\vartheta_a((v))$, sondern auch noch an den Punktsystemen $(\eta_1^a, \dots, \eta_{p-1}^a)$ unterscheiden. In den Ausnahmefällen gehört nämlich eine solche Punktgruppe $(\eta_1^a, \dots, \eta_{p-1}^a)$ zu einer linearen unendlichen Schaar von $(p-1)$-punktigen Gruppen, welche alle der Charakteristik (a) zugeordnet sind und immer die Eigenschaft haben, dass eine Curve φ in ihnen f berührt; und zwar zu einer Schaar von gerader oder ungerader Mannigfaltigkeit, je nachdem (a) eine ungerade oder eine gerade Charakteristik ist. Es wird, für ungerade (a), diese Mannigfaltigkeit zu ∞^{2l}, wenn $\vartheta_a((v))$ und alle ihre Differentialquotienten bis zu den $2l$-ten incl. für

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_p = 0$$

verschwinden; für gerade (a) zu ∞^{2l+1}, wenn $\vartheta_a((v))$ und ihre Differentialquotienten bis zu den $(2l+1)^{\text{ten}}$ incl. für

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_p = 0$$

verschwinden*).

3. Zu bemerken ist, dass die zu ζ gehörigen Punkte ε_i^a, also alles in 2. Gesagte unverändert bleibt**), wenn man statt der Tangente in ζ eine f in ζ berührende Curve φ, φ_ζ, betrachtet und statt der Curven C_ζ^a nun diejenigen, quadratisch aus den φ gebildeten Curven Ψ_ζ^a nimmt, welche durch die weiteren $2p-4$ Schnittpunkte von φ_ζ mit f gehen und f in noch p Punkten — ε_i^a — berühren. Dies gilt nur, bei willkürlich gelegenem ζ, für die hyperelliptischen Curven nicht; und auch bei diesen, wenn man ζ in einen Punkt legt, in welchem die zwei Punkte eines der hier existirenden Paare zusammenfallen, was zu der bekannten einfachsten Normirung in diesem Falle führt.

4. Ich gebrauche im Folgenden die algebraisch darstellbaren Thetaquotienten. Aus dem Abel'schen Theorem für Integrale 3[ter] Gattung (vgl. Clebsch und Gordan's Werk, § 62), oder aus den Periodicitätseigenschaften, schliesst man, dass

---

*) Riemann, „Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen", Ges. Werke XI.

**) Vgl. meinen Aufsatz „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen, diese Annalen Bd. XVII.

$$\prod_{l}^{1\ldots\varrho} \frac{\vartheta_{\alpha_l}\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du - C^{(l)}\right)\right)}{\vartheta_{\alpha'_l}\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du - C'^{(l)}\right)\right)}$$

eine rationale Function der Coordinaten von ξ ist, wenn

$$\sum_{l}^{1\ldots\varrho} C_h^{(l)} = \sum_{l}^{1\ldots\varrho} C'^{(l)}_h \quad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

$$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho) \equiv (\alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_\varrho'), \quad \text{mod. } 2.$$

§ 2.

Reine Berührungscurven und Charakteristiken.

1. Die in § 1 Nr. 2 benutzten Argumentwerthe

$$(2) \qquad v_h = \int_{\zeta}^{\xi} du_h - \sum_{i}^{1\ldots p} \int_{\varepsilon_i^0}^{x_i} du_h \quad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

der ϑ-Function $\vartheta((v))$, welche für $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_p$ je zu 0^1 werden soll, hängen nur *formal* von ξ ab. Um in dieselben auch explicit nur solche Punkte einzuführen, welche von ζ unabhängig sind, bietet sich die Gleichung (1) dar:

$$(3) \qquad \sum_{i}^{1\ldots p-1} \int_{\varepsilon_i^0}^{\eta_i^\alpha} du_h + \int_{\varepsilon_p^0}^{\zeta} du_h = \tfrac{1}{2}\, \varpi_h^{(\alpha)},$$

wo wir unter (α) irgend eine *ungerade* Charakteristik verstehen. Mit ihrer Hülfe wird

$$(2') \qquad v_h = -\left\{ \sum_{i}^{1\ldots p-1} \int_{\eta_i^\alpha}^{x_i} du_h + \int_{\xi}^{x_p} du_h + \tfrac{1}{2}\, \varpi_h^{(\alpha)} \right\},$$

d. h.

$$\vartheta_\alpha\left(\left(\sum_{i}^{1\ldots p-1} \int_{x_i}^{\eta_i^\alpha} du + \int_{x_p}^{\xi} du\right)\right)$$

verschwindet, als Function von ξ, in $x_1, x_2, \ldots, x_p$, wenn diese auf keiner φ liegen; andernfalls für jedes ξ.

Für die später auftretenden Argumente, welche ζ und die ε_i^0 doppelt enthalten, hat man noch einfacher:

$$(4)\quad \sum_i^{1..p-1}\int_{s_i^0}^{l_i} du_h + \sum_i^{1...p-1}\int_{s_i^0}^{l_{p-1+i}} du_h + 2\int_{s_p^0}^{\zeta} du_h \equiv 0 \text{ (mod. Perioden)},$$

wo die Punkte $l_1, l_2, \ldots, l_{2p-2}$ die Schnittpunkte von f mit einer beliebigen Curve φ sind.

2. Unter *reinen Berührungscurven* $X^{(\mu)}$ will ich hier diejenigen Curven verstehen, deren Gleichungsformen ganze homogene Ausdrücke $\Phi^{(\mu)}$, μ^{ter} Dimension, in den p linear-unabhängigen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sind, und welche f in $\mu(p-1)$ Punkten in erster Ordnung berühren. Die einfachsten derselben sind, für $\mu = 1$, die in $p-1$ Punkten berührenden φ selbst; die nach (3) der Charakteristik (α) zugeordnete, in $\eta_1^\alpha, \ldots, \eta_{p-1}^\alpha$ berührende Curve φ bezeichne ich mit φ.

Für dieselben liefert der Satz von 4. § 1, wenn (α_1) und (α_2) zwei solche ungerade Charakteristiken sind, denen nur je *eine* φ_α entspricht, eine Relation:

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_{\alpha_1}\left(\left(\int_\eta^\xi du\right)\right)}{\vartheta_{\alpha_2}\left(\left(\int_\eta^\xi du\right)\right)} = c\cdot\sqrt{\frac{\varphi_{\alpha_1}(\eta)}{\varphi_{\alpha_2}(\eta)}\cdot\frac{\varphi_{\alpha_1}(\xi)}{\varphi_{\alpha_2}(\xi)}},$$

wo c von ξ und η unabhängig ist.

Indem man η dem ξ sich unbegrenzt nähern lässt, ergiebt sich aus dieser Relation bekanntlich der lineare Ausdruck von $\varphi_{\alpha_1}(\xi)$ durch diejenigen p linear-unabhängigen Formen φ:

$$\psi_1(\xi),\ \psi_2(\xi),\ \ldots,\ \psi_p(\xi),$$

welche in den Differentialen der p kanonischen Integrale $u_1, u_2, \ldots, u_p$ auftreten.

Dasselbe ergiebt sich aber noch directer aus einer allgemeineren Formel. Die Gleichung

$$\sum_h^{1...p}\left[\frac{\partial\vartheta_\alpha((v))}{\partial v_h}\right]_y \cdot \psi_h(\xi) = 0,$$

wo der Index y bedeutet, dass man in die Differentialquotienten für die Argumente v_h die Ausdrücke

$$v_h = \sum_i^{1..p-1}\int_{\eta_i^\alpha}^{y_i} du_h$$

mit willkürlichen oberen Grenzpunkten $y_1, \ldots, y_{p-1}$ von f einsetzen

soll, stellt diejenige Curve $\varphi(\xi)$ dar, welche durch die Punkte $\xi = y_1$, $y_2, \ldots, y_{p-1}$ hindurchgeht. Denn ihre linke Seite wird für $\xi = y_i$ der Differentialquotient nach y_i der für alle $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ identisch verschwindenden Function

$$\vartheta_\alpha\left(\left(\sum_i^{1\ldots p-1}\int_{\eta_i^\alpha}^{y_i} du\right)\right),$$

und somit $= 0$. Setzt man

$$y_1 = \eta_1^\alpha, \quad y_2 = \eta_2^\alpha, \cdots, y_{p-1} = \eta_{p-1}^\alpha,$$

so folgt:

$$\sum^{1\ldots p}\left[\frac{\partial\vartheta_\alpha((v))}{\partial v_h}\right]_0 \cdot \psi_h(\xi) = c_\alpha \cdot \varphi_\alpha(\xi), \tag{6}$$

wo der Index 0 bedeutet, dass die Argumente v_h alle $= 0$ gesetzt werden sollen; c_α ist unabhängig von ξ.

3. Für die allgemeineren in 2. definirten reinen Berührungscurven $X^{(\mu)}$ habe ich in meiner oben cit. Arbeit in Bd. XVII dieser Zeitschrift gezeigt, dass dieselben in zwei gänzlich von einander verschiedene Arten zerfallen, je nachdem μ ungerade oder gerade ist. Von beiden Arten giebt es je 2^{2p} getrennte Classen von Curven; aber für ungerade μ theilen sich diese Classen in

$$R_p = 2^{p-1}(2^p - 1) \quad \text{und} \quad S_p = 2^{p-1}(2^p + 1)$$

je unter sich gleichberechtigte; für gerade μ in eine — an der Curve, nicht in der Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche — ausgezeichnete und in $2^{2p} - 1$ unter sich gleichberechtigte Classen. Wie sich diese Verschiedenheit direct aus zweierlei Arten der Zuordnung zu Perioden ergiebt, wie also dementsprechend zweierlei Arten von Charakteristiken einzuführen sind, die ich als *eigentliche* und *Gruppencharakteristiken* bezeichnet habe, soll nun dargelegt werden.

(A): *μ ungerade.*

Die irgend einer Charakteristik (a) nach § 1, Nr. 3 mittels Gleichung (1) zugeordneten Ψ_ζ^a, die in $\varepsilon_1^a, \ldots, \varepsilon_p^a$ berühren, waren zwar Curven $\Phi^{(2)}$, aber keine reinen Berührungscurven, da sie f noch in einer Reihe von einfachen Punkten schneiden, nämlich im weiteren Schnitt von f mit der f in ζ berührenden φ-Curve φ_ζ; wobei zu bemerken ist, dass die (0) zugeordnete Curve Ψ_ζ^0, welche in $\varepsilon_1^0, \ldots, \varepsilon_p^0$ berührt, vor den übrigen Ψ_ζ^a mit gerader Charakteristik (a) nur in der Zerschneidung der Fläche, nicht an der Curve f, ausgezeichnet ist. S_p Charakteristiken (a) sind gerade, R_p solche ungerade und haben jedenfalls einen der Berührungspunkte ε_i^a in ζ, wie oben, § 1, Nr. 2, angegeben wurde.

Diese Unterscheidung überträgt sich nun eindeutig auf alle reinen Berührungscurven $X^{(2\nu+1)}$.

Sei $\Phi^{(\nu)}$ irgend eine Curve ν^{ter} Dimension, und seien ihre 0-Punkte mit $l_r (r = 1, 2, \cdots, 2\nu(p-1))$ bezeichnet. Wir betrachten die Gleichung:

$$(7) \quad \sum_r^{1\ldots 2\nu(p-1)} \int_{l_r}^{z_r} du_h + \sum_i^{1\ldots p-1} \int_{\varepsilon_i^a}^{z_{2\nu(p-1)+i}} du_h + \int_{\varepsilon_p^a}^{\zeta} du_h \equiv 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

wo die ε_i^a durch (1) gegeben sind.

Nach dem Abel'schen Theorem liefert dieselbe, mit 2 multiplicirt und mit Hülfe von (4) reducirt, Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{(2\nu+1)(p-1)}$, in welchen f von einer Curve $X^{(2\nu+1)}$ berührt wird; und zwar wird diese Curve *rational* construirt aus der Curve Ψ_ζ^a; so dass sie selbst als der Charakteristik (a) zugeordnet einzutheilen ist. Umgekehrt führt jede $X^{(2\nu+1)}$ nach demselben Theorem auf eine Gleichung der Art (7), mit gewissen Punkten ε_i^a.

Nimmt man irgend zwei Curven $X^{(2\nu+1)}$ und $X'^{(2\nu'+1)}$, welche derselben Charakteristik (a) zugeordnet sind und addirt die entsprechenden Gleichungen (7), so folgt, dass dieselben einfach dadurch rational aus einander construirt werden können, dass ihre Berührungspunkte zusammen den vollständigen Schnitt von f mit einer Curve $\Phi^{(\nu+\nu'+1)}$ bilden. Insbesondere bildet auch Ψ_ζ^a, verbunden mit φ_ζ, eine solche, (a) zugeordnete $X^{(3)}$, und das genannte Schnittverhältniss der $X^{(2\nu+1)}$ zu dieser $X'^{(3)}$ wird eben durch (7) ausgedrückt.

Die einfachsten Curven, auf welche man alle $X^{(2\nu+1)}$ beziehen kann, sind für ungerade (a) die φ_a, für gerade (a) im Allgemeinen nur Curven $X^{(3)}$; jedenfalls aber jene eben genannten speciellen $X'^{(3)} = \Psi_\zeta^a \cdot \varphi_\zeta$.

Die Charakteristiken sind bei diesen Zuordnungen in derselben Weise aufgefasst, wie in § 1 bei den Thetafunctionen specieller Argumente, wie bei $\vartheta_a\left(\left(\int_\zeta^\xi du\right)\right)$ oder bei $\vartheta_a((0))$; und sollen als solche *eigentliche* Charakteristiken heissen, mit den Zeichen (a). —

(B): *μ gerade.*

Seien wieder $l_1, l_2, \ldots, l_{2\nu(p-1)}$ die Schnittpunkte von f mit irgend einer Curve $\Phi^{(\nu)}$. Betrachtet man nun statt (7) eine Zuordnung durch eine Relation:

$$(8) \quad \sum_r^{1\ldots 2\nu(p-1)} \int_{l_r}^{y_r} du_h \equiv \frac{\varpi_h^{[a]}}{2}, \quad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

wo

$$\varpi_h^{[a]} = m_h^a \cdot \pi i + \sum_{\varkappa}^{1\dots p} n_\varkappa^a a_{h\varkappa},$$

so werden die $y_1\, y_2, \dots, y_{2\nu(p-1)}$ solche Punkte, in welchen f von einer Curve $X^{(2\nu)}$ berührt wird, zugeordnet dem halben Periodensystem $\frac{1}{2}\,\varpi^{[a]}$.

In dieser Art von Zuordnung besteht das Curvensystem $\mu = 2\nu$, welches den Zahlen $m_h^a = 0$, $n_\varkappa^a = 0$ (mod. 2) entspricht, nur aus den doppelt gerechneten Curven $\Phi^{(\nu)}$ und stellt also ein *uneigentliches* Berührungssystem dar; aber ausgezeichnet an der Curve selbst, welches auch die Zerschneidung der Riemann'schen Fläche sein mag. Bei den übrigen $2^{2p} - 1$ Classen tritt hier die in § 1 und in (A), § 2 wesentliche Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden (a) gar nicht mehr auf: sie sind unter sich gleichartig.

Dieser zweiten Art von Zuordnung entsprechend, haben wir für den Zahlencomplex m_h^a, $n_\varkappa^a$, welcher in der Periode $\varpi_h^{[a]}$ vorkommt, ein zweites Zeichen einzuführen:

$$[a] = \begin{bmatrix} n_1^a\, n_2^a \dots\ n_p^a \\ m_1^a m_2^a \dots\ m_p^a \end{bmatrix},$$

das *Gruppencharakteristik* genannt sei; wobei das Gruppenzeichen [0] ein uneigentliches ist.

Aus (8) folgt wieder, dass irgend zwei Berührungscurven $X^{(2\nu)}$ und $X'^{(2\nu')}$, welche auf dasselbe $[a]$ führen, sich rational aus einander ergeben, indem ihre Berührungspunkte zusammen den vollständigen Schnitt von f mit einer Curve $\Phi^{(\nu+\nu')}$ bilden; und dass alle Curven $X^{(2\nu)}$ auf diese Weise aus Curven $X^{(2)}$ abgeleitet werden können. —

Um den Zusammenhang der beiden Arten (A) und (B) zu erhalten, ist nur zu bemerken, dass irgend zwei reine Berührungscurven ungerader Dimension $X_\alpha^{(2\mu+1)}$ und $X_\beta^{(2\nu+1)}$, welche bez. den eigentlichen Charakteristiken (α) und (β) zugeordnet sind, zu einer aus ihnen zusammengesetzten Curve $X_\alpha^{(2\mu+1)} \cdot X_\beta^{(2\nu+1)}$ gerader Dimension führen, welche der Gruppencharakteristik $[\alpha\beta]$ zugeordnet ist. Denn die Addition zweier zu (α) und (β) gehöriger, Gleichungen der Art (7) ergiebt, nach (4), eine zu $[\alpha\beta]$ gehörige Gleichung der Art (8).

4. Der *allgemeinen* Zweitheilung der Abel'schen Functionen entsprechen nicht reine Berührungscurven, sondern solche Curven $\Phi^{(\nu)}$, welche durch eine Anzahl von $2\nu(p-1) - 2p$ gegebenen Punkten $\zeta_\varkappa$ von f gehen und f weiter in p Punkten berühren sollen. Solcher Curven giebt es, bei gegebenem ν und gegebenen $\zeta_\varkappa$, 2^{2p}. Sind die

Punkte $\zeta_\varkappa$ nicht specielle, z. B. nicht paarweise zusammenfallend, so kann man in der Definitionsgleichung für die Berührungspunkte $z_1, \ldots, z_p$ der $\Phi^{(\nu)}$:

$$\sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^0}^{z_i} du_h \equiv \frac{1}{2}\left\{\varpi_h - \sum_h \int_{\zeta_\varkappa^0}^{\zeta_\varkappa} du_h\right\},$$

wo sich die $\zeta_\varkappa^0$ und z_i^0 auf eine gegebene $\Phi_0^{(\nu)}$ beziehen, die bis zu den $\zeta_\varkappa$ erstreckten Integrale auf solchen Wegen nehmen, dass irgend *einer* der 2^{2p} Curven $\Phi^{(\nu)}$ eine *beliebige* Periode $\varpi = \varpi^{a_0}$ zugeordnet ist. Zwei Curven $\Phi^{(\nu)}$ und $\Phi'^{(\nu)}$ dagegen, welche zu denselben $\zeta_\varkappa$ gehören, und in den z_i, bez. z_i' berühren, bilden eine reine Berührungscurve $2\nu^{\text{ter}}$ Dimension,

$$X^{(2\nu)} = \Phi^{(\nu)} \cdot \Phi'^{(\nu)},$$

welche in den Punkten $\zeta_\varkappa, z_i, z_i'$ die Curve f berührt; für diese Curve gilt also die Gleichung (8) dieses Paragraphen, d. h. $\Phi^{(\nu)} \cdot \Phi'^{(\nu)}$ ist einer *bestimmten* Gruppencharakteristik $[a]$ zuzuordnen. $\Phi'^{(\nu)}$ gehört dann zur Periode ϖ^{aa_0}, wenn $\Phi^{(\nu)}$ willkürlich der Periode ϖ^{a_0} zugetheilt war.

§ 3.

Algebraische Formulirung der Classenbeziehungen von § 2.

1. In § 2, Nr. 3 wurden alle reinen Berührungscurven X von derselben eigentlichen Charakteristik (a) in *eine* Classe zusammengefasst, ebenso alle zu einer Gruppencharakteristik $[a]$ gehörige. Algebraisch hat man hiernach (vgl. meinen o. c. Aufsatz in Math. Ann. XVII) für zwei Curven $X^{(\mu)}$ und $X^{(2\varrho-\mu)}$ *einer* Classe, wenn $\Phi^{(\varrho)}$ die durch deren Berührungspunkte gehende Curve ϱ^{ter} Dimension ist:

$$\Phi^{(\varrho)2}(\xi) = X^{(\mu)}(\xi)\, X^{(2\varrho-\mu)}(\xi) + \mathrm{A} \cdot f, \tag{9}$$

d. h. vermöge $f = 0$ wird $\sqrt{X^{(\mu)}(\xi)\, X^{(2\varrho-\mu)}(\xi)}$ rational in den Coordinaten von ξ.

Die Gesammtschaar der Gruppen von je $\mu(p-1)$ Punkten, in welchen f von den $X_a^{(\mu)}$, bei festem μ und (a), bez. $[a]$, berührt wird, wird, da sie auch von der linearen Schaar der $\Phi^{(\varrho)}$ aus f ausgeschnitten werden kann, eine lineare $\infty^{\mu(p-1)-p}$-Schaar. Ausgeschlossen ist nur $\mu = 1$, und ferner der uneigentliche Fall $[0]$ von $\mu = 2$. Nimmt man für gegebenes μ und (a), bez. $[a]$, die Curve $X^{(2\varrho-\mu)}$ fest an, so lassen sich alle durch deren Berührungspunkte gehenden Curven $\Phi^{(\varrho)}$ aus $(\mu-1)(p-1)$ speciellen linear zusammensetzen. Für die allgemeinste zu (a), bez. $[a]$ gehörige $X_a^{(\mu)}$ erhält man also einen Ausdruck derart:

$$(10)\qquad \sqrt{X_a^{(\mu)}(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{X^{(2\varrho-\mu)}(\xi)}} \sum_i^{1..(\mu-1)(p-1)} \lambda_i \Phi_i^{(\varrho)}(\xi)$$
$$= \sum_i^{1...(\mu-1)(p-1)} \lambda_i \sqrt{X_{a,i}^{(\mu)}(\xi)},$$

wo die λ_i Parameter und die $X_{a,i}^{(\mu)}$ irgend welche specielle Curven $X_a^{(\mu)}$ sind, für welche die Wurzelformen $\sqrt{X_{a,i}^{(\mu)}(\xi)}$ linear unabhängig sind.

2. Ueber die Wahl der speciellen Wurzelformen von Gleichung (10), durch welche alle $\sqrt{X_a^{(\mu)}}$ darstellbar sind, will ich noch einen Satz beweisen. Ich behaupte, dass es für $\mu \geqq 3$ immer möglich ist, zwei feste Wurzelformen

$$\sqrt{\varphi_a'} \quad \text{und} \quad \sqrt{X_b'^{(\mu-2)}}$$

so zu wählen, dass alle $\sqrt{X_a^{(\mu)}}$, mit demselben μ und a, ausdrückbar sind in der Form:

$$(11)\qquad \sqrt{\varphi_a'} \cdot \sqrt{X_{aa}^{(\mu-1)}} + \sqrt{X_b'^{(\mu-2)}} \cdot \sqrt{X_{ab}^{(2)}}.$$

In der That enthält zunächst $\sqrt{X_{aa}^{(\mu-1)}}$ noch $(\mu-2)(p-1)$ Parameter in homogener linearer Form, nach (10); ebenso $\sqrt{X_{ab}^{(2)}}$ noch $p-1$ Parameter, wenn $[ab]$ nicht $\equiv [0]$. Der Ausdruck (11) enthält also die nach (10) verlangte Zahl von $(\mu-1)(p-1)$ Parametern, wenn derselbe nicht für specielle Werthe dieser Parameter für alle Punkte von f identisch verschwindet. Nun nehme man aber (b) (bez. $[b]$) verschieden von (a) (bez. $[a]$) an und wähle b und $X_b'^{(\mu-2)}$ so allgemein, was immer möglich ist, dass $X_b'^{(\mu-2)}$ und φ_a' keinen Punkt auf f gemeinsam haben. Würde dann eine Relation

$$\sqrt{\varphi_a'} \cdot \sqrt{X_{aa}'^{(\mu-1)}} + \sqrt{X_b'^{(\mu-2)}} \cdot \sqrt{{}_{ab}'^{(2)}} \equiv 0$$

bestehen, so müsste $X_{ab}'^{(2)}$ durch alle Schnittpunkte von φ_a' mit f hindurchgehen, also*) von der Form sein

$$\varphi_a' \cdot \varphi_{aba}',$$

wo φ_{aba}' eine zur eigentlichen Charakteristik $(ab\alpha)$ gehörige berührende φ-Curve würde. Eine solche existirt aber nicht, sobald man nur durch Annahme von b noch $(ab\alpha)$ zu einer geraden nicht speciellen Charakteristik macht. —

Aus der wiederholten Anwendung dieser Darstellung schliesst man, dass man $\sqrt{X_a^{(\mu)}}$ nach (10) durch $(\mu-1)(p-1)$ solche specielle Wurzelformen darstellen kann, welche sämmtlich Producte von je μ

*) S. meinen o. c. Aufsatz, Math. Ann. XVII, § 2.

Wurzelformen der einfachsten Art $\sqrt{\varphi_a}$ — sogenannten „Abel'schen" Formen — sind; vorausgesetzt nur, dass die analoge Darstellung durch je $p-1$ Producte von 2 Abel'schen Formen für die $\sqrt{X_b^{(2)}}$, bei jedem von [0] verschiedenen [b], möglich ist. Die Richtigkeit dieser Voraussetzung ist bei grösseren p direct nur für die hyperelliptischen Curven f leicht zu bestätigen.

§ 4.

Darstellung einfacher Thetaquotienten.

1. Sei $X_a^{(3)}$ eine der eigentlichen Charakteristik (a) zugeordnete Berührungscurve, von der 3^{ten} Dimension in den φ, mit den Berührungspunkten

$$z_1^a, z_2^a, \ldots, z_{3p-3}^a;$$

so hat man nach (7) und (4):

$$\int_{z_1^0}^{\zeta} du_h + \int_{z_2^0}^{\zeta} du_h + \int_{z_3^0}^{\zeta} du_h + \sum_i^{1\ldots p-3} \int_{z_{i+3}^0}^{z_i^a} du_h + \sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^0}^{z_{p-3+i}^a} du_h$$

$$+ \sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^a}^{z_{2p-3+i}^a} du_h \equiv 0.$$

Wir nehmen nun die $3p-3$ Punkte z^a, mit irgend 3 weiteren Punkten, etwa dem 3-fach gezählten Punkte ζ, als die Verschwindungspunkte von drei Thetafunctionen; mögen also setzen:

$$\int_{z_1^0}^{\zeta} du_h + \int_{z_2^0}^{\zeta} du_h + \int_{z_3^0}^{\zeta} du_h + \sum_i^{1\ldots p-3} \int_{z_{i+3}^0}^{z_i^a} du_h \equiv v_h,$$

$$\sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^0}^{z_{p-3+i}^a} du_h \equiv w_h,$$

$$\sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^a}^{z_{2p-3+i}^a} du_h \equiv -v_h - w_h.$$

Ebenso sei $X_b^{(3)}$ eine der Charakteristik (b) zugeordnete Berührungscurve 3ter Dimension, mit den Berührungspunkten

$$z_1^b,\ z_2^b,\ \ldots,\ z_{3p-3}^b,$$

und sei gesetzt:

$$\int_{z_1^0}^{\zeta} du_h + \int_{z_2^0}^{\zeta} du_h + \int_{z_3^0}^{\zeta} + \sum_i^{1\ldots p-3} \int_{z_{i+3}^0}^{z_i^b} du_h \equiv v_h',$$

$$\sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^0}^{z_{p-3+i}^b} du_h \equiv w_h',$$

$$\sum_i^{1\ldots p} \int_{z_i^b}^{z_{2p-3+i}^b} du_h \equiv -v_h' - w_h'.$$

Dann hat man nach § 1, Nr. 4:

$$(12)\quad \frac{\vartheta\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du - v\right)\right)\ \vartheta\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du - w\right)\right)\ \vartheta_a\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du + v + w\right)\right)}{\vartheta\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du - v'\right)\right)\ \vartheta\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du - w'\right)\right)\ \vartheta_b\left(\left(\int_{\zeta}^{\xi} du + v' + w'\right)\right)}$$

$$= c \cdot \sqrt{\frac{X_a^{(3)}(\xi)}{X_b^{(3)}(\xi)}},$$

wo c von ξ unabhängig wird. —

2. Es mögen nun weiter die $2p-3$ willkürlichen Berührungspunkte $z_1^b, \ldots, z_{2p-3}^b$ von $X_b^{(3)}$ in die Punkte $z_1^a, \ldots, z_{2p-3}^a$ von $X_a^{(3)}$ gelegt, also

$$v_h' = v_h, \quad w_h' = w_h$$

gesetzt werden. Bezeichnet man diese $2p-3$ willkürlichen Punkte von f mit

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{2p-3},$$

so schreibt sich die Gleichung (12), nach (4), wenn man noch ξ durch z_0 ersetzt:

$$(13)\quad \frac{\vartheta_a\left(\left(\sum_i^{0\ldots 2p-3} \int_{\zeta_i}^{z_i} du\right)\right)}{\vartheta_b\left(\left(\sum_i^{0\ldots 2p-3} \int_{\zeta_i}^{z_i} du\right)\right)} = A \cdot \sqrt{\frac{X_a^{(3)}(z_0)}{X_b^{(3)}(z_0)}},$$

wo die unteren Grenzen $l_0, l_1, \ldots, l_{2p-3}$ wieder die Schnittpunkte irgend einer Curve φ mit f sind. $\sqrt{X_a^{(3)}(z_0)}$ und $\sqrt{X_b^{(3)}(z_0)}$ verschwinden für $z_0 = z_1, z_2, \ldots, z_{2p-3}$.

Die linke Seite dieser Formel ist im Argumente z_0 und in den $2p-3$ Parameterpunkten $z_1, \ldots, z_{2p-3}$ symmetrisch; die unteren Grenzen der Integrale enthalten keinen ausgezeichneten Punkt mehr, selbst nicht die Berührungspunkte einer Curve $X^{(1)}$.

Auch auf der rechten Seite der Formel (13) wird man die Quadratwurzel symmetrisch in $z_0, z_1, \ldots, z_{2p-3}$ bilden können, indem man nach (10) die Ausdrücke $\sqrt{X_a^{(3)}(z_0)}$ und $\sqrt{X_b^{(3)}(z_0)}$ zuerst mit je $2p-2$ willkürlichen Parametern anschreibt und durch Einsetzen der Nullpunkte $z_1, \ldots, z_{2p-3}$ zu alternirenden Ausdrücken macht.

Alsdann wird A unabhängig von $z_0, z_1, \ldots, z_{2p-3}$. Die Bestimmung von A geschieht dann bekanntlich dadurch, dass man eine solche Gruppencharakteristik $[r]$ auswählt, für welche (ra) und (rb) *gerade* eigentliche Charakteristiken sind, alsdann die $2p-2$ Berührungspunkte y^r irgend einer reinen Berührungscurve $X_r^{(2)}$ und die $2p-2$ Berührungspunkte y^{rab} irgend einer Curve $X_{rab}^{(2)}$ aufsucht, nach den Formeln:

$$\sum_i^{0\ldots 2p-3} \int_{l_i}^{y_i^r} du_h \equiv \frac{1}{2}\,\varpi_h^{[r]}, \qquad \sum_i^{0\ldots 2p-3} \int_{l_i}^{y_i^{rab}} du_h \equiv \frac{1}{2}\,\varpi_h^{[rab]},$$

und die Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_{2p-3}$ das eine Mal mit den Punkten y^r, das andre Mal mit den y^{rab} zusammenfallen lässt. Auf diese Weise ergeben sich aus (13)

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\vartheta_{ra}}{\vartheta_{rb}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{A}\cdot\frac{\vartheta_{rb}}{\vartheta_{ra}}$$

durch die algebraischen Classenmoduln (indem die willkürlichen $p-2$ der Punkte y^r und der Punkte y^{rab} sich wegheben), also auch A und $\frac{\vartheta_{ra}}{\vartheta_{rb}}$, und zwar A^4 eindeutig.

In (13) sind (a) und (b) irgend zwei eigentliche Charakteristiken. Insbesondere könnte man, wenn (a) und (b) beide gerade sind, $[r]=[ab]$ setzen und die Normirung der $X^{(3)}$ nach § 3 leicht so vornehmen, dass A mit $\frac{\vartheta_a}{\vartheta_b}$ identisch wird. Auf solche, nach § 3 leichte, Ausführungen gehe ich aber hier nicht weiter ein, weil für die im Folgenden beabsichtigte Anwendung sich die Bestimmung von A überhaupt als unnöthig erweist.

§ 5.

Anwendung auf das Umkehrproblem.

1. Die Formel (13) — der leicht viele analog gebildete Gleichungen des Riemann'schen Problems, wie schon (12), an die Seite gestellt werden können — eignet sich, da die Argumente der ϑ-Functionen vermöge der Willkürlichkeit der $2p-2$ Punkte z keiner Beschränkung unterworfen sind, zur Aufgabe der Umkehrung, algebraische symmetrische Functionen der oberen Grenzen der Integralsummen durch diese Summen darzustellen.

Um aus (13) eine genügende Zahl von Formeln zu erhalten, welche die symmetrischen Functionen von p Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_p$ aufzufinden gestatten, kann man *entweder* für die von $z_1, z_2, \ldots, z_p$ verschiedenen Punkte z gegebene feste Punkte nehmen und an Stelle der Charakteristik (a) eine Reihe verschiedener eigentlicher Charakteristiken einsetzen; *oder:* man kann (a) und (b) festlassen, aber für $z_0, z_{p+1}, z_{p+2}, \ldots, z_{2p-3}$ eine Reihe verschiedener Punktsysteme vor f einsetzen. *Auf dem letzteren Wege gelangt man leicht und eindeutig zu Gleichungen von Curven, welche durch die gesuchten Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_p$ hindurchgehen, Gleichungen, deren Coefficienten nur bekannte Thetaquotienten enthalten.*

Es genügt zu diesem Zwecke schon, wenn man auch $z_{p+1}, \ldots, z_{2p-3}$ als constant annimmt und nur $z_0 = \xi$ variirt. Wir setzen:

$$z_{p+1} = \zeta_1, \quad z_{p+2} = \zeta_2, \cdots, z_{2p-3} = \zeta_{p-3}.$$

2. Gegeben seien als Gleichungen des Umkehrproblems:

$$\sum_i^{1\ldots p} \int_{c_i}^{z_i} du_h = U_h, \quad (h = 1, 2, \ldots, p). \tag{14}$$

Seien wieder $l_0, l_1, \ldots, l_{2p-3}$ die Schnittpunkte von f mit irgend einer Curve φ, so führen wir die Constanten ein:

$$\varkappa_h = \sum_i^{1\ldots p} \int_{l_i}^{c_i} du_h + \sum_i^{1\ldots p-3} \int_{l_{p+i}}^{\zeta_i} du_h. \tag{15}$$

Dann geht (13) über in:

$$\frac{\vartheta_a\left(\left(\int_{l_0}^{\xi} du + U + \varkappa\right)\right)}{\vartheta_b\left(\left(\int_{l_0}^{\xi} du + U + \varkappa\right)\right)} = A\sqrt{\frac{X_a^{(3)}(\xi)}{X_b^{(3)}(\xi)}}. \tag{16}$$

Hier wollen wir die rechte Seite nach (10) in die Form setzen:

$$(17)\qquad A\sqrt{\frac{X_a^{(3)}(\xi)}{X_b^{(3)}(\xi)}} = c\sqrt{\frac{X_b^{'(3)}(\xi)}{X_a^{'(3)}(\xi)}}\cdot\frac{F_a(\xi)}{F_b(\xi)},$$

wo c von ξ unabhängig ist, $X_a'^{(3)}$ und $X_b'^{(3)}$ irgend welche speciell und fest gewählte, zu (a), bezüglich zu (b), gehörige Berührungscurven dritter Dimension sind, z. B. aus je drei berührenden Curven φ_a bestehend.

Nimmt man $p+1$ linear unabhängige Formen $\Phi_{a,i}^{(3)}(\xi)$ $(i=0,1,\ldots p)$ dritter Dimension in den φ, so, dass die Curven $\Phi_{a,i}^{(3)}$ durch die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-3}$ und durch die Berührungspunkte von $X_a'^{(3)}$ einfach gehen; ebenso $p+1$ Formen $\Phi_{b,i}^{(3)}(\xi)$, so, dass die Curven $\Phi_{b,i}^{(3)}$ durch die Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p-3}$ und die Berührungspunkte von $X_b'^{(3)}$ gehen, so wird

$$(18)\qquad \begin{cases} F_a(\xi) = \sum\limits_i^{0\ldots p} \lambda_i \Phi_{a,i}^{(3)}(\xi), \\[2ex] F_b(\xi) = \sum\limits_i^{0\ldots p} \mu_i \Phi_{b,i}^{(3)}(\xi), \end{cases}$$

wo die Parameter λ_i und μ_i noch zu bestimmen bleiben.

Zur Bestimmung der $2p+1$ Verhältnisse der Parameter λ_i, μ_i, genügt es, für ξ irgend welche nicht von einander abhängige $2p+1$ Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2p+1}$$

einzusetzen. So erhält man aus (16) für $\xi = \xi_j$ $(j=1,2,\ldots,2p+1)$ $2p+1$ Gleichungen

$$(19)\qquad \sum_i^{0\ldots p} \lambda_i \Phi_{a,i}^{(3)}(\xi_j) - C_j \sum_i^{0\ldots p} \mu_i \Phi_{b,i}^{(3)}(\xi_j) = 0,$$

$$(j=1,2,\ldots,2p+1),$$

wo

$$(20)\qquad C_j = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{X_a^{'(3)}(\xi_j)}{X_b^{'(3)}(\xi_j)}}\cdot\frac{\vartheta_a\left(\left(\int_{\xi_0}^{\xi_j} du + U + \varkappa\right)\right)}{\vartheta_b\left(\left(\int_{\xi_0}^{\xi_j} du + U + \varkappa\right)\right)}.$$

3. Das System von $2p+1$ linearen Gleichungen (19) für die $2p+1$ Verhältnisse der λ_i, μ_i ist im Allgemeinen von einander unabhängig. Denn würde eine, etwa die letzte, der Gleichungen (19) bei jedem ξ_{2p+1} eine Folge der übrigen $2p$ Gleichungen sein, so würden

alle unendlich vielen aus ihnen folgenden Werthsysteme der Verhältnisse der λ_i, μ_i die Gleichung (16), welche für $\xi_{2p+1} = \xi$ aus der letzten von (19) hervorgeht, befriedigen. Es würde also das System (14) bei den angenommenen Werthen der U_h unendlich viele Lösungen für die p Punkte z_i zulassen. Sobald also das Umkehrproblem (14) selbst ein *bestimmtes* ist — was eintritt, wenn die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_p$ nicht auf eine Curve φ zu liegen kommen —, und wenn zugleich die Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2p+1}$ nicht speciell gewählt sind, so werden die $2p+1$ Gleichungen (19) von einander unabhängig.

Im unbestimmten Fall des Umkehrproblems genügen dagegen weniger als $2p+1$ der Gleichungen (19) zur Bestimmung der dann unendlich vielen Werthsysteme der Verhältnisse der λ_i, μ_i; und jedes dieser Werthsysteme macht, wenn auch hier die ξ_j nicht speciell gewählt waren, die Gleichung (16), auf deren rechter Seite (17) und (18) einzusetzen ist, zu einer richtigen.

Man hat also in (16), (19) *eine gleichzeitig für den bestimmten und für den unbestimmten Fall des Umkehrproblems* (14) *gültige Lösungsform.*

Wir bestimmen nun aus dem System von linearen Gleichungen (19) nur die Verhältnisse der λ_i unter sich, ebenso die Verhältnisse der μ_i unter sich. Alsdann werden die resultirenden Ausdrücke von der von ξ unabhängigen Grösse c ganz unabhängig.

Hernach hat man in

$$(21) \qquad \sum_i^{0\ldots p} \lambda_i\, \Phi^{(3)}_{a,i}(\xi) = 0, \qquad \sum_i^{0\ldots p} \mu_i\, \Phi^{(3)}_{b,i}(\xi) = 0$$

zwei Curven, dritter Dimension in den φ, welche, ausser in den gegebenen Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-3}$ und in etwaigen gemeinsamen Punkten der speciell und fest gewählten Berührungscurven $X_a'^{(3)}$ und $X_b'^{(3)}$, sich auf f nur noch in den gesuchten Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_p$ treffen.

In die Gleichungen dieser Curven gehen ein: erstens bei der Bildung der Formen 3ter Dimension in den φ, $\Phi^{(3)}_{a,i}(\xi)$ und $\Phi^{(3)}_{b,i}(\xi)$, die gegebenen Punkte ζ und die symmetrischen Functionen der Berührungspunkte der speciellen Curven $X_a'^{(3)}$ und $X_b'^{(3)}$; zweitens bei der Bestimmung der Verhältnisse der λ_i, bez. der μ_i, nach (19), (20), die gegebenen Punkte ξ_j und ζ, und zwar sowohl algebraisch, als auch als obere Grenzen von Integralen, die mit den gegebenen Grössen U_h zusammen als Argumente von ϑ-Functionen auftreten.

5. Eine kleine Vereinfachung der Formeln (17)—(21) erhält man dass man die willkürlichen Charakteristiken (a) und (b) als *ungerade* annimmt. Man kann dann in (16) setzen:

$$(17') \qquad A\sqrt{\frac{X_a^{(3)}(\xi)}{X_b^{(3)}(\xi)}} = c\sqrt{\frac{\varphi_b(\xi)}{\varphi_a(\xi)}} \cdot \frac{\Psi_a(\xi)}{\Psi_b(\xi)},$$

wo nun $\Psi_a(\xi)$, bez. $\Psi_b(\xi)$, Formen 2^{ter} Dimension in den φ werden, welche für die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-3}$ und für die Berührungspunkte $\eta_1^a, \ldots, \eta_{p-1}^a$ von $\varphi_a(\xi)$, bez. $\eta_1^b, \ldots, \eta_{p-1}^b$ von $\varphi_b(\xi)$, verschwinden; also sich in die Gestalt setzen lassen:

$$(18') \qquad \begin{cases} \Psi_a(\xi) = \sum_i^{0\ldots p} \lambda_i \Phi_{a,i}^{(2)}(\xi), \\ \Psi_b(\xi) = \sum_i^{0\ldots p} \mu_i \Phi_{b,i}^{(2)}(\xi). \end{cases}$$

Unter Einführung von $2p+1$ nicht speciell gelegenen Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2p+1}$ erhält man demgemäss für die λ_i, μ_i die $2p+1$ Gleichungen:

$$(19') \qquad \sum_i^{0\ldots p} \lambda_i \Phi_{a,i}^{(2)}(\xi_j) - C_j' \sum_i^{0\ldots p} \mu_i \Phi_{b,i}^{(2)}(\xi_j) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p+1)$$

wo

$$(20') \qquad C_j' = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\varphi_a}{\varphi_b}(\xi)} \cdot \frac{\vartheta_a\left(\left(\int_{\xi_0}^{\xi_j} du + U + \varkappa\right)\right)}{\vartheta_b\left(\left(\int_{\xi_0}^{\xi_j} du + U + \varkappa\right)\right)},$$

und

$$(21') \qquad \Psi_a(\xi) = 0, \quad \Psi_b(\xi) = 0$$

werden jetzt zwei Curven 2^{ter} Dimension in den φ, welche durch die gesuchten Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_p$ von f hindurchgehen.

§ 6.

Charakteristikensubstitutionen und Transformationen erster Ordnung.

1. In Anknüpfung an die §§ 1—3 soll in diesem Paragraphen angegeben werden, wie sich die dort hergestellten Zuordnungen von reinen Berührungscurven und von Thetafunctionen zu Charakteristiken vermöge *Transformation* erster Ordnung der Thetafunctionen, also bei linearer unimodularer Transformation der Perioden, ändern. Auch hierbei wird sich das verschiedenartige Verhalten der eigentlichen und der Gruppencharakteristiken klar ergeben.

Schon in meiner o. c. Abhandlung in Math. Ann. Bd. XVI habe ich die möglichen Zuordnungen der Berührungscurven zu Charakteristiken eingehend behandelt; aber nicht aus dem Standpunkt jener

Periodentransformationen, sondern aus dem der *Gruppentheorie* der Charakteristiken. Auf diesem Standpunkt wurden in die Gruppe die sämmtlichen Substitutionen aufgenommen, welche die Charakteristikenbeziehungen unverändert lassen; welche nämlich den Charakter der geraden und der ungeraden eigentlichen Charakteristiken nicht ändern und eine Summe von einer geraden Anzahl eigentlicher Charakteristiken, die $=0$ ist, wieder in eine solche überführen; welche also auch die Beziehung zwischen Gruppencharakteristiken $[a]$, $[b]$:

$$|a, b| = \sum_{h}^{1\ldots p} |n_h^a\, m_h^b + n_h^b\, m_h^a| \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod{2}$$

unverändert lassen.

Um den Zusammenhang zwischen dieser Substitutionstheorie und der Theorie der Periodentransformation herzustellen, schicke ich die Resultate meiner Untersuchung aus der citirten Abhandlung in der folgenden Nummer voraus.

2. Es wurde ausgegangen von irgend einem speciellen System von p Paaren von Gruppencharakteristiken

$$[\varrho_1], [\sigma_1]; [\varrho_2], [\sigma_2]; \ldots; [\varrho_p], [\sigma_p],$$

wo

$$\left.\begin{aligned} &|\varrho_i, \sigma_i| \equiv 1, \\ &|\varrho_i, \varrho_\varkappa| \equiv |\varrho_i, \sigma_\varkappa| \equiv |\sigma_i, \sigma_\varkappa| \equiv 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{mod. } 2 \\ &(\varkappa \gtrless i); \end{aligned}$$

und zwar wählte ich:

$$(22)\quad \begin{cases} [\varrho_1] = \begin{bmatrix} 1\ 0 \cdots 0 \\ 0\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, & [\varrho_2] = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ 0\ 0\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \ldots, [\varrho_p] = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0\ 1 \\ 0 \cdots 0\ 0 \end{bmatrix}, \\[2ex] [\sigma_1] = \begin{bmatrix} 0\ 0 \cdots 0 \\ 1\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, & [\sigma_2] = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ 1\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \ldots, [\sigma_p] = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0\ 0 \\ 0 \cdots 0\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Eine eigentliche Charakteristik (α) soll in der Gruppencharakteristik $[a]$ „enthalten" sein, wenn (α) und $(a\alpha)$ gleichen Charakter haben, d. h. zugleich gerade oder zugleich ungerade sind; also wenn

$$|a\,\alpha| \equiv |\alpha| \pmod{2}.$$

Dann ist in den $2p$ Gruppen (22) nur eine einzige eigentliche Charakteristik gemeinsam enthalten, nämlich die gerade eigentliche Charakteristik

$$(0) = \begin{pmatrix} 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

Die $2^{2(p-1)}$ in $[\varrho_1]$ und $[\sigma_1]$ zugleich enthaltenen Charakteristiken sind diejenigen, deren erste Verticalreihe aus $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ besteht, und sie verhalten sich gegeneinander genau, wie die $2^{2(p-1)}$ überhaupt existirenden $(p-1)$-reihigen Charakteristiken; so dass es sachgemäss war, von jenen Gruppenpaaren (22) auszugehen.

Alle (22) analogen Systeme von Gruppen:

$$(23)\qquad [r_1],\ [s_1];\ [r_2],\ [s_2];\ \ldots;\ [r_p],\ [s_p],$$

welche durch

$$(23')\qquad \left\{\begin{array}{l} |r_i,\ s_i| \equiv 1, \\ |r_i,\ r_\varkappa| \equiv |r_i,\ s_\varkappa| \equiv |s_i,\ s_\varkappa| \equiv 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{mod. } 2 \\ (\varkappa \gtrless i),\end{array}$$

definirt sind, erhält man aus (22), wenn man darauf sämmtliche Substitutionen anwendet, welche die Charakteristikenrelationen unverändert lassen (s. Nr. 1 dieses Paragraphen). Diese Substitutionen sind (vgl. a. a. O. § 5, Nr. 3) an Zahl

$$Z = R_{2p}\,.\,R_{2(p-1)}\,\ldots\,R_4\,.\,R_2,$$

wo

$$R_\mu = 2^{\mu-1}(2^\mu - 1);$$

und sie lassen sich aus Combinationen gewisser $2^{2p}-1$ specielleren Substitutionen zusammensetzen, welche ich mit $\{a_j\}$ bezeichnen will.

Eine solche Substitution $\{a_j\}$ wird dadurch definirt, dass ihre Anwendung jede eigentliche Charakteristik (α), welche in $[a_j]$ „enthalten" ist, in $(a_j\alpha)$ überführt, die übrigen (α) aber unverändert lässt; in Folge dessen auch eine Gruppencharakteristik $[b]$ in $[a_jb]$ oder in $[b]$ überführt, je nachdem $|a,\ b| \equiv 1$ oder $\equiv 0$ (mod. 2).

In §§ 1—4 der genannten Abhandlung ist auch gezeigt, durch welche Reihenfolge von Substitutionen der Art $\{a\}$ man ein gegebenes System (23) aus (22) ableiten kann.

In allen Gruppen von (23) ist nur *eine* eigentliche Charakteristik gemeinsam enthalten, eine gerade Charakteristik (g), welche aus (0) durch diejenige Substitution hervorgeht, die (22) in (23) überführt.

Am a. O. § 8, Nr. 2 und § 13 habe ich weiter gezeigt, wie aus den durch (23') definirten Systemen (23) alle in die Charakteristikentheorie eingeführten verschiedenartigst definirten Systeme ohne Weiteres als einfachste Combinationen der Elemente von (23) sich hinschreiben lassen; so die von Riemann und H. Stahl benutzten Systeme von $2p+1$ Gruppen $[a_i]$, von der Summe 0 und der Beziehung $|a_i,\ a_\varkappa| \equiv 1$; ferner (unter Benutzung von (g)) die a. a. O. angewandten ausgezeichneten Systeme von $2p+1$ eigentlichen Charakteristiken gleichen Charakters; die Systeme von 2^p Charakteristiken, welche beim Additionstheorem zur Verwendung kommen; etc. Es genügt also auch, nur den Uebergang von (22) zu (23) zu behandeln. —

Die obige aus der Periodenzweitheilung abgeleitete Gruppe von Z Substitutionen ist zwar im Allgemeinen auch die Gruppe für die algebraische Gleichung, welche die in § 2, 3 behandelten „reinen Berührungscurven" an f liefert. Aber diese letztere kann sich natürlich durch Adjunctionen noch erniedrigen, so bei Curven mit speciellen

Moduln; wie denn bei den hyperelliptischen Curven die Gruppen für das algebraische specielle Zweitheilungsproblem nur noch aus $(2p+2)!$ Substitutionen besteht. Ich will hier die aus der Periodenzweitheilung abgeleitete Gruppe von Z Substitutionen zum Unterschiede von der folgenden aus Transformation herzuleitenden Gruppe als Gruppe 1[ter] Art bezeichnen.

3. Wie in § 1, Nr. 1 sei eine I[te] Zerschneidung der auf die Curve f bezogenen Riemann'schen Fläche durch ein System von $2p$ Querschnitten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ bewirkt; eine II[te] Zerschneidung derselben Fläche durch ein System von $2p$ Querschnitten $a'_\varkappa$, $b'_\varkappa$.

Irgend ein Integral 1[ter] Gattung, w, möge an $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_p$ bez. die Periodicitätsmoduln haben:

$$\omega_1, \ldots, \omega_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_{2p}$$

an $a_1', \ldots, a_p'$, $b_1', \ldots, b_p'$ bez.

$$\omega_1', \ldots, \omega_p', \omega_{p+1}', \ldots, \omega_{2p}'.$$

So hat man bekanntlich*), wenn ω_λ^0, $\omega_\lambda^{0\prime}$ dasselbe für ein zweites Integral 1[ter] Gattung, w_0, bedeuten:

$$\Omega \equiv \sum_k^{1\ldots p} (\omega_k \omega_{p+k}^0 - \omega_k \omega_{p+k}^0) = 0,$$

$$\Omega' \equiv \sum_l^{1\ldots p} (\omega_l' \omega_{p+l}^{0\prime} - \omega_l' \omega_{p+l}^{0\prime}) = 0.$$

Die Transformation sei gegeben durch

$$\omega_\lambda' \equiv \sum_\mu^{1\ldots 2p} \alpha_{\lambda,\mu}\, \omega_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, 2p). \tag{24}$$

wo die $\alpha_{\lambda,\mu}$ ganze, von dem speciellen w unabhängige, Zahlen sind, deren Determinante Δ bei unimodularer Transformation:

$$\Delta = 1,$$

und welche den, aus $\Omega' = \Omega$ hervorgehenden, Relationen genügen:

$$\mathsf{A}_{\lambda,\mu} \equiv \sum_l^{1\ldots p} (\alpha_{l,\lambda}\, \alpha_{p+l,\mu} - \alpha_{l,\mu}\, \alpha_{p+l,\lambda}) = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases} \tag{25}$$

je nachdem

$$\mu - \lambda \begin{cases} \neq \pm p, \\ = \quad p. \end{cases}$$

Seien ferner $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die zum I[ten], $u_1', u_2', \ldots, u_p'$ die zum II[ten] System der Querschnitte gehörigen kanonischen Integrale, $a_{h\varkappa}$ die

*) Vgl. für die Formeln und Beziehungen dieser Nr. etwa: **Clebsch-Gordan**, Theorie der Abel'schen Functionen, 12[ter] Abschnitt oder **H. Weber**, Ueber die Transformation der Thetafunctionen etc., Annali di Matematica, Serie 2, Bd. IX.

zur I[ten], a'_{il} die zur II[ten] Zerschneidung gehörigen Periodicitätsmoduln, so habe man:

$$(26)\qquad u_h = \sum_i^{1\ldots p} Q_{i,h}\, u'_i \qquad (h=1,2,\ldots,p).$$

Dann wird nach (24):

$$(27)\qquad \begin{cases} Q_{l,h}\cdot \pi i = \alpha_{l,h} \cdot \pi i + \sum_\varkappa^{1\ldots p} \alpha_{l,p+\varkappa} \cdot a_{h\varkappa} \\ \sum_i^{1\ldots p} Q_{i,h}\cdot a'_{il} = \alpha_{p+l,h}\cdot \pi i + \sum_\varkappa^{1\ldots p} \alpha_{p+l,p+\varkappa}\cdot a_{h\varkappa}. \end{cases}$$

Vermöge dieser linearen Transformation wird

$$(28)\qquad \vartheta((u;\, a_{h\varkappa})) = c\cdot e^{f((u'))}\cdot \vartheta_{\mathfrak{a}'}((u';\, a'_{il})),$$

wo $f((u'))$ ein homogener ganzer quadratischer Ausdruck in den $u'_1,\ldots,u'_p$ wird, c eine von den u' unabhängige Constante, und wo die Elemente der geraden Charakteristik $(\mathfrak{a}')$ gegeben sind durch

$$(29)\qquad \left.\begin{cases} n_l^{\mathfrak{a}'} \equiv \sum_h^{1\ldots p} \alpha_{l,h}\quad \alpha_{l,p+h} \\ m_l^{\mathfrak{a}'} \equiv \sum_h^{1\ldots p} \alpha_{p+l,h}\,\alpha_{p+l,p+h} \end{cases}\right\}\ (\text{mod. } 2).$$

4. Aus Nr. 3 ergeben sich die zugehörigen Charakteristikentransformationen, indem man die allgemeine ϑ-Function transformirt. Aus (26)—(29) folgt unmittelbar

$$(30)\qquad \vartheta_a((u;\, a_{hk})) = c'\cdot e^{f((u'))}\cdot \vartheta_{a'}((u';\, a'_{il})),$$

wo die Elemente der eigentlichen Charakteristiken (a) und (a') in der Beziehung stehen

$$(31)\qquad \left.\begin{cases} n_l^{a'} \equiv \sum_h^{1\ldots p} (n_h^a\cdot \alpha_{l,h} \quad + m_h^a\cdot \alpha_{l,p+h}\quad) + n_l^{\mathfrak{a}'} \\ m_l^{a'} \equiv \sum_h^{1\ldots p} (m_h^a\cdot \alpha_{p+l,h} + m_h^a\cdot \alpha_{p+l,p+h}) + m_l^{\mathfrak{a}'} \end{cases}\right\}\ (\text{mod. } 2),$$

wobei

$$(31')\qquad |a'| \equiv |a|,\ \ (\text{mod. } 2).$$

In (31) ist die Transformation der *eigentlichen* Charakteristiken enthalten. Aus der linearen, nicht homogenen Form dieser Gleichungen folgt, dass durch dieselben auch eine Charakteristik, die als Summe von $2q+1$ eigentlichen Charakteristiken gegeben ist, in diejenige

Charakteristik transformirt wird, welche die Summe der $2q+1$ entsprechenden Charakteristiken ist.

Anders ist es mit einer Summe von $2q$ eigentlichen Charakteristiken, einer *Gruppencharakteristik*. Wenn vermöge (31) die beiden eigentlichen Charakteristiken (a) und (b) bezüglich in (a') und (b') übergehen, so geht $[r] = [ab]$ über in $[r'] = [a'b']$ vermöge:

$$(32) \qquad \left.\begin{cases} n_i^{[r']} \equiv \sum\limits_h^{1\ldots p} \left(n_h^{[r]} \cdot \alpha_{i,h} + m_h^{[r]} \cdot \alpha_{i,p+h}\right) \\ m_i^{[r']} \equiv \sum\limits_h^{1\ldots p} \left(n_h^{[r]} \cdot \alpha_{p+i,h} + m_h^{[r]} \cdot \alpha_{p+i,p+h}\right) \end{cases}\right\} \pmod{2}.$$

So geht also $[0]$ immer in $[0]$ über, und der Charakter von $[r]$ wird im Allgemeinen geändert, da $[a] = [0a]$ übergeführt wird in $[\alpha' a']$, wenn die eigentliche Charakteristik (a) vermöge (31), (31') in (a') übergeht.

Dieselbe Transformation (31), bez. (32), tritt auch in der Zuordnung der eigentlichen, bez. Gruppencharakteristiken zu den reinen Berührungscurven ein. Denn nach § 1, Nr. 2 verschwindet

$$\vartheta_a\left(\left(\int_\zeta^\xi du;\ a_{h\varkappa}\right)\right),$$

als Function von ξ, in einem Punktsystem $\varepsilon_1^a, \varepsilon_2^a, \ldots, \varepsilon_p^a$, das ζ zugehörig war, und in *denselben* Punkten verschwindet auch, nach (30), der Ausdruck

$$\vartheta_{a'}\left(\left(\int_\zeta^\xi du';\ a'_{ii}\right)\right)$$

als Function von ξ. Man sieht also, dass derjenigen nach § 1, Nr. 2 zu ζ gehörigen Curve C_ζ^a, welcher in der ersten Zerschneidung die eigentliche Charakteristik (a) zugeordnet war, in der II^ten Zerschneidung diejenige eigentliche Charakteristik (a') zugeordnet wird, welche vermöge (31) aus (a) hervorgeht. Aus diesen Curven C_ζ waren aber in § 2, Nr. 3 die reinen Berührungscurven eindeutig hergeleitet worden.

5. Fasst man diejenigen Transformationen erster Ordnung, deren Zahlen $\alpha_{\lambda,\mu}$ sich mod. 2 nicht unterscheiden — welche also zu denselben Gleichungen (31), (32) führen —, zusammen, so bleibt nur eine endliche Gruppe mod. 2 verschiedener linearer Transformationen zu betrachten.

Da diese Gruppe alle in diesem §, Nr. 1 als den Charakteristiken eigenthümlich zugeschriebenen Relationen nach Nr. 4 bestehen lässt, so fallen ihre Transformationen unter die in Nr. 2 angegebenen Z

Substitutionen, und bilden diese Gruppen erster Art von Nr 2 selbst, oder doch eine Untergruppe derselben. Es bleibt nun der Zusammenhang zwischen beiden Gruppen zu untersuchen.

Wendet man zu diesem Zwecke die durch (24), (25), (32) gegebene Transformation auf die p speciellen Paare von Gruppencharakteristiken (22):

$$[\varrho_1], [\sigma_1]; [\varrho_2], [\sigma_2]; \ldots; [\varrho_p], [\sigma_p]$$

an, so gehen diese p Paare bez. über in

$$(33) \qquad [\alpha_1], [\alpha_{p+1}]; [\alpha_2], [\alpha_{p+2}]; \ldots; [\alpha_p], [\alpha_{2p}],$$

wo die Bezeichnung gebraucht ist:

$$(33') \qquad [\alpha_\lambda] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,\lambda} & \alpha_{2,\lambda} & \ldots & \alpha_{p,\lambda} \\ \alpha_{p+1,\lambda} & \alpha_{p+2,\lambda} & \ldots & \alpha_{2p,\lambda} \end{bmatrix},$$

und wo für die Elemente der Gruppencharakteristiken (33) nach (25) nur die *Gleichungen* bestehen

$$(25) \qquad \mathsf{A}_{\lambda,\mu} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \text{ je nachdem } \mu - \lambda \begin{cases} \neq \pm p. \\ = p \end{cases}$$

Nun ist

$$(34) \qquad \mathsf{A}_{\lambda,\mu} \equiv |\alpha_\lambda, \alpha_\mu|, \quad (\text{mod. } 2);$$

die p Paare (33) bilden also in der That ein System, wie (23), für welches die *Congruenzen* (23') erfüllt sind.

Man kann aber auch umgekehrt zeigen: sobald die Elemente der Gruppencharakteristiken (33) solche Zahlen $\alpha_{\lambda,\mu}$ sind, für welche die *Congruenzen*

$$(35) \qquad \mathsf{A}_{\lambda,\mu} \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \text{ je nachdem } \mu - \lambda \begin{cases} \neq \pm p \\ = p \end{cases}$$

erfüllt sind, lassen sich immer solche bez. den $\alpha_{\lambda,\mu}$ mod. 2 congruente Zahlen angeben, welche den *Gleichungen* (25) genügen.

Um dies einzusehen, beachte man die bekannte*) Zusammensetzung einer Transformation erster Ordnung (24), deren Zahlen $\alpha_{\lambda,\mu}$ die Gleichungen (25) erfüllen, aus solchen einfachsten Transformationen, von deren Elementen nur einige $= \pm 1$, alle übrigen $= 0$ sind.

Hat man nun eine Transformation T', deren Zahlen $\alpha_{\lambda,\mu}$ nur mod. 2 gegeben sind und nur die Congruenzen (35) erfüllen, deren Determinante also $\equiv 1$ (mod. 2), so setzt sich vermöge derselben einfachen Processe T' (mod. 2) zusammen aus einer Reihe von Transformationen $T_1', T_2', \ldots$ der obigen einfachsten Formen, in denen nur an Stelle von ± 1 und 0 denselben mod. 2 congruente Zahlen stehen können. Ersetzt man diese Zahlen wieder bez. durch ± 1 und 0, so entstehen aus $T_1', T_2', \ldots$ einfachste Transformationen erster Ordnung

*) Vgl. etwa die zu Nr. 3 dieses § citirten Schriften.

$T_1, T_2, \ldots$; und die aus $T_1, T_2, \ldots$ zusammengesetzte Transformation T, erster Ordnung, hat die Eigenschaft, dass ihre Elemente mod. 2 mit denen von T' congruent sind und den *Gleichungen* (25) genügen. —

Da nun durch die Ueberführung von (22) in alle Systeme (33), welche den Congruenzen (35) genügen, die ganze Substitutionsgruppe von § 6, Nr. 2 definirt werden konnte, so folgt:

Die in Nr. 4 angegebene Gruppe von Charakteristikentransformationen ist identisch mit der in Nr. 2 betrachteten Gruppe von Charakteristikensubstitutionen.

6. Ist ein System (23) vorgelegt, so ergiebt sich dessen Ueberführung aus (22) mittels Transformation, indem man (33) für (23) schreibt und die Elemente der Transformation mod. 2 aus (33') entnimmt. Die in vorhergehender Nummer beschriebene Operation bestimmt dann die Elemente selbst.

Insbesondere lassen sich so die in Nr. 2 mit $\{a_j\}$ bezeichneten speciellen Substitutionen, aus deren Combination man alle Substitutionen zusammensetzen kann, leicht durch Transformationen von Nr. 4 ersetzen. Denn es geht vermöge $\{a_j\}$ über:

$$[\varrho_\varkappa] \text{ in } \begin{cases} [\varrho_\varkappa] \\ [\varrho_\varkappa a_j] \end{cases}, \text{ je nachdem } m_\varkappa^{a_j} \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{(mod. 2)},$$

$$[\sigma_\varkappa] \text{ in } \begin{cases} [\sigma_\varkappa] \\ [\sigma_\varkappa a_j] \end{cases}, \text{ je nachdem } n_\varkappa^{a_j} \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{(mod. 2)}.$$

Umgekehrt ergiebt auch die in Nr. 5 erwähnte Methode, jede Transformation (24) aus einfachsten zusammenzusetzen, ein Verfahren, um alle Systeme (23) von p Paaren von Gruppencharakteristiken aus dem speciellen System (22) abzuleiten. Denn die bekannten drei Processe, um die allgemeinste Determinante Δ von (24) auf die Identitätsdeterminante zurückzuführen, nämlich:

a) Vertauschung der h^{ten} Verticalreihe mit der $(p+h)^{\text{ten}}$ (und Zeichenänderung in einer dieser Reihen);

b) Addition (oder Subtraction) der h^{ten} Verticalreihe zur $(p+h)^{\text{ten}}$,

c) Addition der h^{ten} Reihe zur $\varkappa^{\text{ten}}$ und gleichzeitige Subtraction der $(p+\varkappa)^{\text{ten}}$ von der $(p+h)^{\text{ten}}$ —

lassen sich hier so interpretiren:

a') Vertauschung der beiden Gruppen eines Paars von (33);

b') Ersetzen des Paars von (33)

$$[\alpha_h],\ [\alpha_{p+h}]$$

durch das Paar

$$[\alpha_h \alpha_{p+h}],\ [\alpha_{p+h}];$$

c') Ersetzen der beiden Paare von (33)

$$[\alpha_h],\ [\alpha_{p+h}];\quad [\alpha_\varkappa],\ [\alpha_{p+\varkappa}]$$

durch die beiden Paare:

$$[\alpha_h \alpha_\varkappa],\ [\alpha_{p+h}];\quad [\alpha_\varkappa],\ [\alpha_{p+h}\alpha_{p+\varkappa}].$$

Aus diesen drei Operationen folgt auch noch als erlaubte Operation:

d') Vertauschung von zwei Paaren von (33).

Die successive Anwendung dieser Operationen liefert aus (22) *sämmtliche Systeme* (23).

Zu bemerken ist hierbei noch, dass durch die Operationen a'), c'), d') die in den Gruppencharakteristiken von (23) gemeinsam enthaltene eine gerade Charakteristik (g) nicht geändert wird, wohl aber durch alle Operationen b'). —

Zum Schlusse gebe ich noch für diese einzige gemeinsame Charakteristik eine eigenthümliche *explicite* Darstellung.

Durch die lineare Transformation, welche (23) in (33) überführt, geht (0) in die gerade eigentliche Charakteristik ($\mathfrak{a}'$) über (vgl. Nr. 3), welche in allen Gruppencharakteristiken von (33) enthalten ist.

Setzt man nun

$$(\beta_\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mu,1} & \alpha_{\mu,2} & \cdots & \alpha_{\mu,p} \\ \alpha_{\mu,p+1} & \alpha_{\mu,p+2} & \cdots & \alpha_{\mu,2p} \end{pmatrix},$$

und schreibt weiter, wie früher

$$\sum_h^{1\ldots p} n_h^{\beta_\mu} m_h^{\beta_\mu} = |\beta_\mu|,$$

so wird nach (29):

$$(\mathfrak{a}') = \begin{pmatrix} |\beta_1| & |\beta_2| & \cdots & |\beta_p| \\ |\beta_{p+1}| & |\beta_{p+2}| & \cdots & |\beta_{2p}| \end{pmatrix}.$$

Mannheim, im September 1886.

Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete*).

Von

David Hilbert in Königsberg.

Die Theorie der algebraischen Invarianten hat sich vorzugsweise bei Untersuchungen im *binären* Variablengebiete zu bewähren, wo noch die Gruppe aller linearen Transformationen der Variablen den fundamentalen Begriff der allgemeinsten umkehrbar-eindeutigen Zuordnung vollkommen erschöpft. Von den einfachsten Grundlagen ausgehend, hat sich auch in der That gerade die Invariantentheorie der *binären* Formen zu einer umfangreichen Disciplin entwickelt, deren Lehren in verschiedene Gebiete der Analysis und Geometrie eingreifen. Sehen wir jedoch von allen Anwendungen ab, so machen sich in der einschlägigen Litteratur zwei verschieden geartete Tendenzen geltend, denen entsprechend eine Eintheilung sämmtlicher in Frage kommender Probleme in zwei umfassende Kategorien zweckmässig erscheint. Die *erste* Kategorie trägt einen mehr zahlentheoretisch-formalen Charakter, indem sie alle diejenigen Untersuchungen und Fragestellungen begreift, welche sich auf Anzahl, Grad und Ordnung der invarianten Bildungen, sowie auf Struktur und Herstellung vollständiger Formensysteme beziehen. Die gekennzeichnete Klasse von Problemen findet die nothwendige Ergänzung in der *zweiten* Kategorie, deren Tendenzen vorzugsweise auf die Erforschung der analytischen Natur und Bedeutung der invarianten Bildungen gerichtet sind. Das Studium der letzteren ist hier nicht ausschliesslich Selbstzweck, sondern zugleich ein gefügiges und rationelles Mittel zu allgemeineren Untersuchungen im binären Formengebiete. Zur zweiten Kategorie gehören alle Untersuchungen über Canonisirung und andere Darstellungen binärer Formen als Covarianten oder Combinanten, über Ermittelung und Deutung invarianter Kriterien, über auftretende Ausartungen binärer Formen, sowie alle Fragen in Bezug auf Formen und Formensysteme speciali-

---

*) Die nachfolgende Untersuchung wurde vom Verfasser im Juni 1886 der philosophischen Facultät zu Königsberg i. Pr. als Habilitationsschrift vorgelegt. — Vergl. übrigens eine vorläufige Mittheilung in den sächsischen Berichten vom 7. December 1885. —

sirten Charakters. Während nun den Problemen erster Kategorie zwei ausgebildete Methoden, nämlich die „symbolische" von Clebsch und die „abzählende" von Sylvester zur Verfügung stehen, erfreuen sich diese Methoden in ihrer Anwendung auf Probleme der zweiten Kategorie keiner gleich allgemeinen Erfolge. Dementsprechend sind bisher meist nur vereinzelte und specielle, wenn auch an sich hochinteressante Fragen aus dem Bereiche der zweiten Kategorie zur Behandlung gelangt und es dürfte bei der Bedeutsamkeit und Mannigfaltigkeit der sich aufdrängenden Fragen ein umfassenderer Gesichtspunkt Noth thun.

Für die Inangriffnahme von Problemen der letzteren Art bieten sich von vornherein zwei mögliche Wege, jenachdem wir für vorgeschriebene Ausartungen des Grundformensystems nach den nothwendigen Criterien fragen oder umgekehrt unter Annahme der Existenz gewisser invarianter Relationen durch Beschreibung der entsprechenden Ausartung des Grundformensystems nach einer Deutung für jene Relationen suchen. Wie nun die bisher der Untersuchung zugänglichen Einzelfälle bestätigen, geben im Allgemeinen einfache an eine Grundform gestellte Anforderungen, wie z. B. die Forderung einer Doppelwurzel, keineswegs zu übersichtlichen invarianten Bildungen Anlass, während umgekehrt das identische Verschwinden einfacher Covarianten, wie z. B. einer bestimmten Ueberschiebung der Grundform über sich selber, nur selten eine einfache Deutung für jene Grundform gestattet. Um in diese eigenthümlichen Verhältnisse und ihren analytischen Zusammenhang einen Einblick zu erhalten, sowie zugleich für eine ausgedehnte Reihe darauf bezüglicher Fragen ein Untersuchungsmittel zu gewinnen, erscheint *die systematische Behandlung einer gewissen allgemeinen Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten des Grundformensystems* nothwendig.

Zu der erwähnten Gattung irrational-invarianter Bildungen führen naturgemäss und unmittelbar die folgenden Ueberlegungen. Das vorgelegte Grundformensystem bestehe aus den binären Formen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ in bestimmter Anzahl und von vorgeschriebenen Ordnungen. Um dasselbe zu der Gesammtheit aller binären Formen von beliebiger Ordnung in invariante Beziehung zu bringen, fingiren wir als allgemeinsten Repräsentanten jener Gesammtheit eine völlig willkürliche Form φ und gelangen von dieser schrittweise unter ausschliesslicher Benutzung der einfachsten invarianten Processe zu simultanen Bildungen zusammengesetzterer Art, indem wir, wie folgt, operiren. Wir ordnen zunächst die Formen des vorgelegten Systems $f_1, f_2, f_3, \ldots$ in eine bestimmte Reihenfolge mit beliebig gestatteter Wiederholung etwa: $f_{q_1}, f_{q_2}, \ldots, f_{q_\varkappa}$ und ertheilen denselben in dieser Anordnung gewisse Ueberschiebungszahlen resp. $i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$ zu. Die gemachten Festsetzungen genügen zur Definition der Ueberschiebungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} (f_{q_1}, \varphi)_{i_1} &= \varphi_1, \\ (f_{q_2}, \varphi_1)_{i_2} &= \varphi_2, \\ \cdots & \cdots \\ (f_{q_\varkappa}, \varphi_{\varkappa-1})_{i_\varkappa} &= \varphi_\varkappa. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die Ordnungen der vorgelegten Formen, der Reihenfolge $f_{q_1}, f_{q_2}, \ldots, f_{q_\varkappa}$ entsprechend, mit $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa$, und die Ordnungen der fingirten Form φ resp. der abgeleiteten Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varkappa$ mit ν resp. $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$, so bestehen zwischen diesen Zahlen die Relationen:

$$\begin{aligned} n_1 - 2i_1 &= \nu_1 - \nu, \\ n_2 - 2i_2 &= \nu_2 - \nu_1, \\ \cdots & \cdots \\ n_\varkappa - 2i_\varkappa &= \nu_\varkappa - \nu_{\varkappa-1}. \end{aligned}$$

Soll demnach die Ordnung $\nu_\varkappa$ der Form $\varphi_\varkappa$ mit der Ordnung ν der Ausgangsform φ übereinstimmen, so ergiebt sich dafür durch Addition obiger Gleichungen die von der Gradzahl ν unabhängige Bedingung:

$$(2)\qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_\varkappa = 2(i_1 + i_2 + \cdots + i_\varkappa)$$

als hinreichend; d. h. *Sind für eine gewisse Reihenfolge der Formen unseres Systems die Ueberschiebungszahlen $i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$, der Bedingung* (2) *entsprechend, gewählt, so charakterisiren jene Zahlen auf Grund unseres obigen Verfahrens eine bestimmte Transformation des gesammten Formenvorrathes φ in dem Sinne, dass jede Form φ unter Vermittelung des linear zugeordneten Formenkreises $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\varkappa-1}$ schliesslich in eine Form $\varphi_\varkappa$ von gleicher Ordnung übergeht.*

Wollen wir die Deutung einer binären Form ν^{ter} Ordnung als Punkt eines ν-fach ausgedehnten Raumes benutzen, so haben wir uns $\varkappa$ Räume $R, R_1, R_2, \ldots, R_{\varkappa-1}$ von der Dimensionenzahl resp. $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\varkappa-1}$ vorzustellen. Jedem Punkte im Raume R, wie er durch die Form φ festgelegt ist, erscheint vermöge der Formeln (1) ein bestimmter Punkt φ_1 im Raume R_1, dem letzteren wieder ein weiterer Punkt φ_2 im Raume R_2 linear zugeordnet etc. Interpretiren wir die schliesslich gewonnene Form $\varphi_\varkappa$ wieder als Punkt in dem ursprünglichen Raume R, so führt jene Kette von Zuordnungen zu einer Collineation im Raume R, und bei weiterer Fortsetzung der Operation ist leicht ersichtlich, wie auch für jeden der anderen Räume eine entsprechende Collineation zu Stande kommt. Unsere Aufgabe läuft nun im Wesentlichen auf die Untersuchung dieser Collineationen und ihrer Fundamentalgebilde d. h. derjenigen Punkte, Geraden, Ebenen etc. hinaus, welche bei der Ausführung jener Collineationen in sich übergehen.

Kehren wir zur analytischen Fassung unseres Problems zurück, so handelt es sich in erster Linie um die Herstellung und Charakterisirung aller solcher Formen, Formenbüschel, Formenbündel φ etc,, welche die Eigenschaft besitzen, sich nach $\varkappa$-maliger Wiederholung des oben beschriebenen invarianten Processes zu reproduciren. Die Irrationalität der fraglichen Gebilde zeigt sich von der Lösung gewisser determinirender Gleichungen abhängig, deren Coefficienten rationale Invarianten des Grundformensystems sind. In den Wurzeln der erwähnten determinirenden Gleichungen erkennen wir eine allgemeine Gattung *irrationaler Invarianten*, während jene Fundamentalgebilde selber ein zugehöriges System *irrationaler Covarianten* bestimmen. Die folgende Untersuchung begründet in eingehenderer Weise, wie die Discussion dieser irrational-invarianten Gebilde als Mittel zum Studium des vorgelegten Grundformensystems dient.

Nach vorausgeschickter Kennzeichnung des allgemeinen Problems erscheint es als eine naturgemässe Specialisirung desselben, wenn wir uns zunächst *mit dem Falle nur einer Grundform und einmaliger Ueberschiebung* eingehend beschäftigen. Beschränken wir demzufolge die charakteristische Anzahl $\varkappa$ des allgemeinen Falles auf die Einheit, so nimmt die allgemeine Bedingung (2) die einfache Gestalt:

$$n = 2i \tag{3}$$

an, worin n die, wie man sieht, nothwendig gerade vorauszusetzende Ordnung der vorgelegten binären Grundform f, und i die zur Verwendung gelangende Ueberschiebungszahl bedeutet. Die durch Specialisirung des Formelsystems (1) hervorgehende Relation:

$$(f, \varphi)_i = \psi$$

liefert dann die Definitionsgleichung einer Transformation, vermöge welcher irgend eine Form φ aus dem gesammten Formenvorrathe in eine Form gleicher Ordnung ψ übergeführt wird. Unseren früheren allgemeinen Auseinandersetzungen zufolge entsteht in erster Linie die Frage nach denjenigen Formen φ von der Ordnung ν, welche die Eigenschaft besitzen, sich nach ihrer i^{ten} Ueberschiebung über die gegebene Grundform f bis auf einen constanten Factor λ ungeändert zu reproduciren, so dass die Identität:

$$(f, \varphi)_i = \lambda\varphi \tag{4}$$

gilt. Damit ist der eigentliche Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen gewonnen, in deren weiterem Verlaufe sich das eingehende Studium jenes Formensystems φ als ein rationelles Forschungsmittel im Gebiete der binären Formen gerader Ordnung bewährt findet.

§ 1.

Die determinirende Gleichung und ihre Discussion.

Unsere vorgelegte Grundform f und andererseits unser Formenrepräsentant φ mögen in ausführlicher Schreibart, wie folgt, lauten:

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

$$\varphi = \alpha_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \binom{\nu}{2} \alpha_2 x_1^{\nu-2} x_2^2 + \cdots + \alpha_\nu x_2^\nu.$$

Die nunmehrige Fragestellung verlangt die Uebereinstimmung sämmtlicher $\nu + 1$ Coefficienten für die beiden Seiten der Formel (4) und somit zerfällt die Bedingung (4) in $\nu + 1$ Bedingungsgleichungen für die $\nu + 1$ nicht homogenen Unbekannten:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}, \lambda,$$

worin sich von vornherein die Widerspruchsfreiheit und Bestimmtheit des Problems offenbart: *Im Allgemeinen existirt für jede Ordnung* $\nu \geqq i$ *d. h.* $\geqq \frac{n}{2}$ *ein bestimmtes Formensystem* φ, *welches der Grundform* f *im Sinne der Gleichung* (4) *zugehört.*

Die $\nu + 1$ aus Formel (4) durch Vergleichung der Coefficienten beider Seiten erwachsenden Bedingungsgleichungen benutzen wir zunächst dazu, um aus ihnen die $\nu + 1$ homogenen, linear auftretenden unbekannten Coefficienten der Form φ:

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$$

zu eliminiren, wodurch sich die determinirende Gleichung:

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{5}$$

ergiebt. Wie durch das in Klammern beigefügte Argument λ angedeutet werden soll, enthält die Determinante linker Hand ausser den Coefficienten der gegebenen Grundform f nur noch die Unbekannte λ und zwar ausschliesslich linear in den Elementen einer Diagonale also im Grade $\nu + 1$. Da der Coefficient dieser höchsten Potenz von λ einen bestimmten, von Null verschiedenen Zahlenwerth annimmt, so ist es unter keinen Umständen möglich, dass die gefundene Determinante identisch für alle Werthe λ verschwindet. Es gilt ferner allgemein der Satz:

Die Determinante $\Delta(\lambda)$ *besitzt gegenüber den linearen Transformationen der Grundform* f *einen invarianten Charakter, d. h. nach ihrer Entwickelung sind sämmtliche Coefficienten der Potenzen von* λ *Invarianten der Grundform* f.

Der Beweis dieses Satzes in seiner vollen Allgemeinheit gestaltet sich am einfachsten, wenn wir im Hinblick auf Formel (4) die Bedeutung und Entstehungsweise der Determinante $\Delta(\lambda)$ zur Geltung bringen. Vermöge der linearen Substitution:

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2',$$
$$x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2'$$

mit der Substitutionsdeterminante:

$$\varrho = \alpha\delta - \beta\gamma$$

führen wir die Formen f und φ simultan in die Gestalten f' und φ' über und erhalten dann auf Grund der simultancovarianten Natur des Gebildes $(f, \varphi)_i$ die Relation:

$$(f, \varphi)_i - \lambda\varphi = \varrho^{-i}(f', \varphi')_i - \lambda\varphi' = \varrho^{-i}\left\{(f', \varphi')_i - \varrho^i\lambda\varphi'\right\},$$

welche zu folgenden Betrachtungen Anlass giebt: Vermöge der beliebig zu wählenden Transformationsconstanten α, β, γ, δ entspricht jedem Formenpaare f, φ mit der Eigenschaft (4) für ein bestimmtes λ ein anderes Formenpaar f', φ' mit der analogen Eigenschaft:

$$(f', \varphi')_i = \lambda'\varphi'$$

für ein $\lambda' = \varrho^i\lambda$. Ist also λ in dem fraglichen Sinne eine der Grundform f zugeordnete Constante, so findet dieselbe Zuordnung zwischen der Constanten $\lambda' = \varrho^i\lambda$ und der Form f' statt, und umgekehrt. Das Bestehen einer solchen Zugehörigkeit von f und λ ist nun nach dem Bisherigen an die einzige Bedingung des Verschwindens der Determinante $\Delta(\lambda)$ geknüpft. Da mit der Erfüllung dieser Bedingung auch gleichzeitig die Zugehörigkeit von f' und λ' in dem fraglichen Sinne statt haben soll, so wird nothwendig die in den Coefficienten der transformirten Form f' gebildete Determinante $\Delta'(\lambda')$ mit der ursprünglichen bis auf eine von Null verschiedene Constante C übereinstimmen müssen, also:

$$\Delta'(\lambda') = \Delta'(\varrho^i\lambda) = C\Delta(\lambda).$$

Die Constante C finden wir durch Vergleichung der Coefficienten von $\lambda^{\nu+1}$ gleich der $i(\nu+1)^{\text{ten}}$ Potenz von ϱ und haben somit die Beziehung:

$$\Delta'(\varrho^i\lambda) = \varrho^{i(\nu+1)}\Delta(\lambda),$$

welche nichts anderes als unseren obigen Satz zum Ausdruck bringt. Zugleich bemerken wir, *dass λ als Wurzel der determinirenden Gleichung* (5) *mit invarianten Coefficienten selber eine irrationale Invariante der Grundform f vom Gewichte i darstellt.* Für die Entwickelung der Determinante $\Delta(\lambda)$ nach Potenzen von λ gilt der Ansatz:

$$\Delta(\lambda) = J_0\lambda^{\nu+1} + J_1\lambda^{\nu} + J_2\lambda^{\nu-1} + \cdots + J_{\nu+1}.$$

Hierin bedeutet J_0 eine von Null verschiedene Zahl; J_1 muss sich bei

der Unmöglichkeit rationaler linearer Invarianten auf Null reduciren, während J_2 der einzig existirenden quadratischen Invariante $(f, f)_n$ proportional ausfällt. Die folgenden Coefficienten $J_3, J_4, \ldots, J_{\nu+1}$ sind Invarianten resp. vom Grade $3, 4, \ldots, \nu+1$ in den Coefficienten der Grundform f.

Die Determinante $\Delta(\lambda)$ besitzt jedoch noch andere bemerkenswerthe Eigenschaften, zu deren Erforschung ein näheres Eingehen auf ihren Bau erforderlich ist. Wir schreiben zu dem Zwecke die i^{te} gegenseitige Ueberschiebung der beiden Formen f und φ in der Gestalt:

$$(f,\varphi)_i = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \{(-1)^\nu k_0{}^\sigma a_{i+\sigma-\nu}\alpha_\nu + (-1)^{\nu-1} k_1{}^\sigma a_{i+\sigma-\nu+1}\alpha_{\nu-1} + \cdots$$
$$\cdots + k_\nu{}^\sigma a_{i+\sigma}\alpha_0\}\, x_1{}^{\nu-\sigma} x_2{}^\sigma,$$

worin die mit oberem und unterem Index versehenen Buchstaben k die bezüglichen Zahlencoefficienten der ausgeführten Simultancovariante bedeuten. Die Determinante wird dann:

$$(6)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} k_0^0 a_{i-\nu}, & k_1^0 a_{i-\nu+1}, \ldots & k_{\nu-1}^0 a_{i-1}, & k_\nu^0 a_i - \lambda \\ k_0^1 a_{i-\nu+1}, & k_1^1 a_{i-\nu+2}, \ldots & k_{\nu-1}^1 a_i + \binom{\nu}{1}\lambda, & k_\nu^1 a_{i+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdot \\ k_0^\nu a_i - (-1)^\nu\lambda, & k_1^\nu a_{i+1}, \ldots & k_{\nu-1}^\nu a_{i+\nu-1}, & k_\nu^\nu a_{i+\nu} \end{vmatrix}.$$

Doch leiten wir zuvor einige eigenthümliche Beziehungen zwischen den Zahlen k durch Benutzung der symbolischen Darstellungsweise der Covariante $(f, \varphi)_i$ ab, indem wir unter Bezugnahme auf die Relation (3) setzen:

$$(7)\qquad (f,\varphi)_i = (a\alpha)^i a_x^i \alpha_x^{\nu-i} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{\nu-\varrho} k_\varrho^\sigma a_{i+\sigma-\nu+\varrho}\alpha_{\nu-\varrho} x_1^{\nu-\sigma} x_2^\sigma$$
$$= (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)^i (a_1 x_1 + a_2 x_2)^i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{\nu-i}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{\nu-\varrho} k_\varrho^\sigma a_1^{i-\sigma+\nu-\varrho} a_2^{i+\sigma-\nu+\varrho} \alpha_1^\varrho \alpha_2^{\nu-\varrho} x_1^{\nu-\sigma} x_2^\sigma.$$

Die letztere Gleichung (7) wird offenbar in ihrer Gültigkeit nicht beeinträchtigt, wenn man in ihr der Reihe nach folgende beide Vertauschungen vornimmt. Erstens setzen wir für a_1, α_1, x_1 die Zeichen resp. a_2, α_2, x_2 und umgekehrt, wodurch sich ergiebt:

$$(-1)^i (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^i (a_1 x_1 + a_2 x_2)^i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{\nu - i}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{\nu-\varrho} k_\varrho{}^\sigma a_1{}^{i+\sigma-\nu+\varrho} a_2{}^{i-\sigma+\nu-\varrho} \alpha_1{}^{\nu-\varrho} \alpha_2{}^\varrho x_1{}^\sigma x_2{}^{\nu-\sigma}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)_\varrho \, k_{\nu-\varrho}^{\nu-\sigma} a_1{}^{i-\sigma+\nu-\varrho} a_2{}^{i+\sigma-\nu+\varrho} \alpha_1{}^\varrho \alpha_2{}^{\nu-\varrho} x_1{}^{\nu-\sigma} x_2{}^\sigma.$$

Die ursprüngliche Gleichung (7) liefert aber nach ihrer Multiplication mit $(-1)^i$:

$$(-1)^i (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^i (a_1 x_1 + a_2 x_2)^i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{\nu - i}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{i+\nu-\varrho} k_\varrho{}^\sigma a_1{}^{i-\sigma+\nu-\varrho} a_2{}^{i+\sigma-\nu+\varrho} \alpha_1{}^\varrho \alpha_2{}^{\nu-\varrho} x_1{}^{\nu-\sigma} x_2{}^\sigma.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten in beiden Doppelsummen erhalten wir für die Zahlen k die allgemeine Relation:

$$k_{\nu-\varrho}^{\nu-\sigma} = (-1)^{i+\nu} k_\varrho^\sigma. \tag{8}$$

Zweitens werde in der ursprünglichen Gleichung (7) α_1 in $-x_2$, α_2 in x_1 und umgekehrt x_2 in $-\alpha_1$, x_1 in α_2 umgewandelt; dann ist:

$$(-1)^{\nu-i} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^i (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{\nu - i}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{\nu+\sigma} k_\varrho{}^\sigma a_1{}^{i-\sigma+\nu-\varrho} a_2{}^{i+\sigma-\nu+\varrho} \alpha_1{}^\sigma \alpha_2{}^{\nu-\sigma} x_1{}^{\nu-\varrho} x_2{}^\varrho$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{\nu+\varrho} k_\sigma{}^\varrho a_1{}^{i-\sigma+\nu-\varrho} a_2{}^{i+\sigma-\nu+\varrho} \alpha_1{}^\varrho \alpha_2{}^{\nu-\varrho} x_1{}^{\nu-\sigma} x_2{}^\sigma.$$

Die ursprüngliche Gleichung (7) ergiebt andererseits durch Multiplication mit $(-1)^{\nu-i}$,

$$(-1)^{\nu-i} (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^i (a_1 x_1 + a_2 x_2)^i (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{\nu - i}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} (-1)^{-\varrho-i} k_\varrho{}^\sigma a_1{}^{i-\sigma+\nu-\varrho} a_2{}^{i+\sigma-\nu+\varrho} \alpha_1{}^\varrho \alpha_2{}^{\nu-\varrho} x_1{}^{\nu-\sigma} x_2{}^\sigma,$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten für die Zahlen k die weitere allgemeine Relation:

$$k_\sigma{}^\varrho = (-1)^{i+\nu} k_\varrho{}^\sigma \tag{9}$$

gewonnen wird. Die beiden Formeln (8) und (9) fassen wir kurz in die Doppelgleichung:

$$k_\varrho^\sigma = k_{\nu-\sigma}^{\nu-\varrho} = (-1)^{i+\nu} k_\sigma^\varrho \tag{10}$$

zusammen, welche für uns ein besonderes Interesse beansprucht, da

sie die Determinante (6) und damit unsere Gleichung (5) als Bestimmungsgleichung für λ einer näheren Behandlung zugänglich macht.

Die $\nu + 1$ Wurzeln λ der determinirenden Gleichung (5) mögen $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}$ heissen. Nach dem Früheren sind dies die einzigen Werthe, welche die Constante λ annehmen darf, damit zur Grundform f eine zugehörige Form φ mit der Eigenschaft (4) existiren kann. Wie wir leicht erkennen werden, ist fernerhin zur Discussion der determinirenden Gleichung und damit überhaupt zur Weiterentwickelung unseres Problems eine durchgehende *Unterscheidung folgender vier Hauptfälle* nothwendig:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Hauptfall} & \text{I:} & i \equiv 0, \quad \nu \equiv 0 \text{ (mod. 2)} \\ \quad " & \text{II:} & i \equiv 1, \quad \nu \equiv 1 \quad " \\ \quad " & \text{III:} & i \equiv 1, \quad \nu \equiv 0 \quad " \\ \quad " & \text{IV:} & i \equiv 0, \quad \nu \equiv 1 \quad " \end{array}\right\} n = 2i, \quad \nu \gtreqless i.$$

Vertauschen wir nämlich in der Determinante (6) die Horizontalreihen mit den Verticalreihen derart, dass die Diagonalelemente:

$$k_0{}^0 a_{i-\nu},\ k_1{}^1 a_{i-\nu+2}, \ldots, k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}$$

ihre Plätze nicht ändern, so ergiebt sich:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} k_0{}^0 a_{i-\nu}, & k_0{}^1 a_{i-\nu+1}, \ldots k_0{}^{\nu-1} a_{i-1}, & k_0{}^\nu a_i - (-1)^\nu \lambda \\ k_1{}^0 a_{i-\nu+1}, & k_1{}^1 a_{i-\nu+2}, \ldots k_1{}^{\nu-1} a_i + (-1)^\nu \binom{\nu}{1} \lambda, & k_1{}^\nu a_{i+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdot \\ k_\nu{}^0 a_i - \lambda, & k_\nu{}^1 a_{i+1}, \quad \ldots k_\nu{}^{\nu-1} a_{i+\nu-1}, & k_\nu{}^\nu a_{i+\nu} \end{vmatrix}$$

und nach Benutzung der Relation (9) und Multiplication sämmtlicher Elemente mit $(-1)^{i+\nu}$:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{(\nu+1)(i+\nu)} \begin{vmatrix} k_0^0 a_{i-\nu}, & k_1^0 a_{i-\nu+1}, \ldots k_{\nu-1}^0 a_{i-1}, & k_\nu^0 a_i - (-1)^i \lambda \\ k_0^1 a_{i-\nu+1}, & k_1^1 a_{i-\nu+2}, \ldots k_{\nu-1}^1 a_i + (-1)^i \binom{\nu}{1} \lambda, & k_\nu^1 a_{i+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdot \\ k_0^\nu a_i - (-1)^{i+\nu} \lambda, & k_1^\nu a_{i+1}, \quad \ldots k_{\nu-1}^\nu a_{i+\nu-1}, & k_\nu^\nu a_{i+\nu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(\nu+1)(i+\nu)} \Delta\left((-1)^i \lambda\right).$$

Die so gewonnene Relation:

$$(11) \qquad \Delta(\lambda) = (-1)^{(\nu+1)(i+\nu)} \Delta\left((-1)^i \lambda\right)$$

liefert für ein gerades i, also in den beiden Hauptfällen I und IV nichts anderes als die Identität:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{\nu(\nu+1)} \Delta(\lambda).$$

Für den Hauptfall II dagegen erhalten wir:

$$\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda)$$

d. h. $\Delta(\lambda)$ ist eine gerade Function von λ; die $\nu + 1$ Wurzeln λ unserer determinirenden Gleichung (5) ordnen sich in $\frac{\nu+1}{2}$ Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln. Für den Hauptfall III endlich führt die Formel (11) zu der Relation:

$$\Delta(\lambda) = -\Delta(-\lambda)$$

d. h. $\Delta(\lambda)$ ist eine ungerade Function von λ; von den $\nu + 1$ Wurzeln der determinirenden Gleichung ist eine gleich Null, während sich die übrigen ν in $\frac{\nu}{2}$ Paare entgegengesetzt gleicher Werthe anordnen. Was die beiden bisher noch nicht in analoger Weise unterschiedenen Hauptfälle I und IV betrifft, so ist allein der erstere von beiden dadurch ausgezeichnet, dass für ihn die determinirende Gleichung im Allgemeinen $\nu + 1$ wesentlich unter einander verschiedene Wurzeln liefert. Für Hauptfall IV nämlich erscheint unsere Determinante (6) vermöge der den Zahlen k anhaftenden Eigenschaft (9) als schiefsymmetrisch bezüglich des Diagonalgliedes:

$$k_0^0 a_{i-\nu},\ k_1^1 a_{i-\nu+2}, \ldots, k_\nu^\nu a_{i+\nu}.$$

Da dieselbe zudem geradreihig ausfällt, so stellt sie einem bekannten Determinantensatze zufolge das vollständige Quadrat eines Ausdruckes dar, welcher λ im $\frac{\nu+1}{2}$ ten Grade enthält. Die $\nu + 1$ Wurzeln λ der determinirenden Gleichung ordnen sich demnach für Hauptfall IV in $\frac{\nu+1}{2}$ Paare gleicher Wurzeln. Zur Erleichterung der Uebersicht bei späterer Bezugnahme gruppiren wir *die* $\nu+1$ *Wurzeln der determinirenden Gleichung* (5) *in den vier Hauptfällen*, wie folgt:

$$\begin{array}{lll} & \textit{Hauptfall}\ \mathrm{I}: & \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}. \\ & \text{,,}\quad \mathrm{II}: & \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)} = -\lambda^{(0)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)} = -\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\nu-1)}, \lambda^{(\nu)} = -\lambda^{(\nu-1)}. \\ (12) & \text{,,}\quad \mathrm{III}: & \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)} = -\lambda^{(0)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)} = -\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\nu-2)}, \lambda^{(\nu-1)} = -\lambda^{(\nu-2)}, \lambda^{(\nu)} = 0. \\ & \text{,,}\quad \mathrm{IV}: & \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)} = \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\nu-1)}, \lambda^{(\nu)} = \lambda^{(\nu-1)}. \end{array}$$

Damit ist die Untersuchung der determinirenden Gleichung im Allgemeinen erledigt. Die speciellen Vorkommnisse betreffs weiteren Zusammenfallens von Wurzeln werden in § 4 ausführlich zur Sprache gelangen.

§ 2.

Die Bestimmung des Systems der irrationalen Covarianten φ.

Nach Ableitung der Bestimmungsgleichung für die Constante λ handelt es sich um die Ermittelung und Discussion der fraglichen Formen φ selber. Wählen wir zu dem Zwecke von den oben gefundenen $\nu+1$ Wurzeln eine aus, etwa $\lambda^{(\mu)}$ und setzen ihren Werth in die Bedingung (4) an Stelle des anfangs unbestimmten Factors λ ein, so ergiebt sich für die $\lambda^{(\mu)}$ zugeordnete Form $\varphi^{(\mu)}$ die besondere Bedingungsgleichung:

$$(f, \varphi^{(\mu)})_i = \lambda^{(\mu)} \varphi^{(\mu)}, \tag{13}$$

welche durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten in folgende $\nu+1$ lineare Bestimmungsgleichungen für die $\nu+1$ homogenen allein noch unbekannten Coefficienten $\alpha_0^{(\mu)}, \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_\nu^{(\mu)}$ der Form $\varphi^{(\mu)}$ zerfällt:

$$\begin{aligned}
&(-1)^\nu k_0{}^0 a_{i-\nu} \alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} k_1{}^0 a_{i-\nu+1} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^0 a_i \alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)} \alpha_0^{(\mu)} = 0,\\
&(-1)^\nu k_0{}^1 a_{i-\nu+1} \alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} k_1{}^1 a_{i-\nu+2} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^1 a_{i+1} \alpha_0^{(\mu)}\\
&\qquad\qquad - \binom{\nu}{1} \lambda^{(\mu)} \alpha_1^{(\mu)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(-1)^\nu k_0{}^\nu a_i \alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} k_1{}^\nu a_{i+1} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^\nu a_{i+\nu} \alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)} \alpha_\nu^{(\mu)} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Da in Folge der Wahl von $\lambda^{(\mu)}$ die Determinante dieses Systems verschwindet, so führen die erhaltenen Bedingungen für die gesuchten Coefficienten $\alpha_0^{(\mu)}, \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_\nu^{(\mu)}$ zu keinem Widerspruch. Zwischen jenen $\nu+1$ Bedingungsgleichungen besteht vielmehr eine lineare Abhängigkeit, vermöge welcher je *eine* von ihnen mit den übrigen ν stets gleichzeitig befriedigt erscheint. Nachdem wir damit die Möglichkeit der Auflösung des Gleichungssystems (14) erkannt haben, ist es unsere Aufgabe, die Bestimmung der gesuchten Coefficienten $\alpha_0^{(\mu)}, \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_\nu^{(\mu)}$ ohne Bevorzugung oder Auszeichnung einer der $\nu+1$ Gleichungen (14) wirklich durchzuführen. Zu dem Zwecke fingiren wir eine neue $(\nu+2)^{\text{te}}$ Unbekannte u und betrachten an Stelle des früheren Systems (14) das folgende:

$$\begin{aligned}
&(-1)^\nu k_0{}^0 a_{i-\nu} \alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} k_1{}^0 a_{i-\nu+1} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^0 a_i \alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)} \alpha_0^{(\mu)}\\
&\qquad\qquad + y_2{}^\nu u = 0,\\
&(-1)^\nu k_0{}^1 a_{i-\nu+1} \alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} k_1{}^1 a_{i-\nu+2} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^1 a_{i+1} \alpha_0^{(\mu)}\\
&\qquad\qquad - \binom{\nu}{1} \lambda^{(\mu)} \alpha_1^{(\mu)} - \binom{\nu}{1} y_1 y_2{}^{\nu-1} u = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(-1)^\nu k_0{}^\nu a_i \alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} k_1{}^\nu a_{i+1} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^\nu a_{i+\nu} \alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)} \alpha_\nu^{(\mu)}\\
&\qquad\qquad + (-1)^\nu y_1{}^\nu u = 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

wo noch als letzte Gleichung mit der Unbekannten $\varphi^{(\mu)}$ die Identität hinzutritt:

$$(16)\quad (-1)^\nu \alpha_\nu^{(\mu)} x_2^\nu + (-1)^\nu \binom{\nu}{1} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} x_1 x_2^{\nu-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \alpha_0^{(\mu)} x_1^\nu - (-1)^\nu \varphi^{(\mu)} = 0.$$

Das aufgestellte Gleichungssystem (15), (16) enthält $\nu + 2$ lineare Gleichungen mit den $\nu + 3$ homogenen Unbekannten $\alpha_\nu^{(\mu)}$, $\alpha_{\nu-1}^{(\mu)}, \ldots,$ $\alpha_0^{(\mu)}$, u, $\varphi^{(\mu)}$. Für die Verhältnisse der letzteren liefert demnach die gewöhnliche Auflösungsmethode mittelst Determinanten das Ergebniss:

$$(17)\quad \alpha_\nu^{(\mu)} : \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} : \cdots : u : \varphi^{(\mu)} = \Delta_\nu^{(\mu)} : \Delta_{\nu-1}^{(\mu)} : \cdots : \pm \Delta(\lambda^{(\mu)}) : \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}),$$

worin $\Delta_\nu^{(\mu)}$, $\Delta_{\nu-1}^{(\mu)}, \ldots$ die den Unbekannten $\alpha_\nu^{(\mu)}$, $\alpha_{\nu-1}^{(\mu)}, \ldots$ entsprechenden Determinanten des Systems bedeuten und insbesondere die Determinante $\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)})$ in ausführlicher Schreibweise folgende Gestalt annimmt:

$$(18)\quad \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)})$$
$$= \begin{vmatrix} k_0{}^0 a_{i-\nu}, & k_1{}^0 a_{i-\nu+1}, & \cdots & k_{\nu-1}^0 a_{i-1}, & k_\nu{}^0 a_i - \lambda^{(\mu)}, & y_2^\nu \\ k_0{}^1 a_{i-\nu+1}, & k_1{}^1 a_{i-\nu+2}, & \cdots & k_{\nu-1}^1 a_i + \binom{\nu}{1} \lambda^{(\mu)}, & k_\nu{}^1 a_{i+1}, & -\binom{\nu}{1} y_1 y_2^{\nu-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_0{}^\nu a_i - (-1)^\nu \lambda^{(\mu)}, & k_1{}^\nu a_{i+1}, & \cdots & k_{\nu-1}^\nu a_{i+\nu-1}, & k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}, & (-1)^\nu y_1^\nu \\ x_2^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1 x_2^{\nu-1}, & \cdots & (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{1} x_1^{\nu-1} x_2, & (-1)^\nu x_1^\nu, & 0 \end{vmatrix}.$$

Aus der Proportion (17) finden wir für die Unbekannte u den Werth Null, dessen Einsetzung das Gleichungssystem (15) in das ursprüngliche System (14) überführt. Damit kennzeichnen sich die eben erhaltenen Lösungen (17) zugleich als Lösungen des Systems (14) und erscheinen überdies wesentlich unabhängig von den eingeführten Parametern y_1, y_2. Die Beziehung (17) lehrt ferner die Proportionalität der Form $\varphi^{(\mu)}$ mit der Determinante $\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)})$ d. h.:

$$(19)\quad \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) = \varphi^{(\mu)}(x)\, \psi^{(\mu)}(y),$$

worin für $\varphi^{(\mu)}$ genauer $\varphi^{(\mu)}(x)$ geschrieben ist, und $\psi^{(\mu)}(y)$ eine noch unbestimmte Function von y_1, y_2 und den Coefficienten der Grundform f bedeutet. Für die Ermittelung der letzteren Function ist es unerlässlich, die oben begonnene Unterscheidung der vier sogenannten Hauptfälle wiederaufzunehmen. Setzen wir nämlich in (18) y_1, y_2 für x_1, x_2, und umgekehrt und vertauschen dann in der Determinante die Horizontalreihen mit den Verticalreihen ohne Verstellung der Diagonalelemente:

$$k_0{}^0 a_{i-\nu},\ k_1{}^1 a_{i-\nu+2},\ \cdots,\ k_\nu{}^\nu a_{i+\nu},\ 0,$$

so finden wir:

$$\Delta(y,\, x,\, \lambda^{(\mu)})$$

$$= \begin{vmatrix} k_0{}^0 a_{i-\nu}, & k_0{}^1 a_{i-\nu+1}, \cdots & k_0{}^{\nu-1} a_{i-1}, & k_0{}^\nu a_i - (-1)^\nu \lambda^{(\mu)}, & y_2{}^\nu \\ k_1{}^0 a_{i-\nu+1}, & k_1{}^1 a_{i-\nu+2}, \cdots & k_1{}^{\nu-1} a_i + (-1)^\nu \binom{\nu}{1} \lambda^{(\mu)}, & k_1{}^\nu a_{i+1}, & -\binom{\nu}{1} y_1 y_2{}^{\nu-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots\,\vdots\,\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_\nu{}^0 a_i - \lambda^{(\mu)}, & k_\nu{}^1 a_{i+1}, \cdots & k_\nu{}^{\nu-1} a_{i+\nu-1}, & k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}, & (-1)^\nu y_1{}^\nu \\ x_2{}^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1 x_2{}^{\nu-1}, \cdots & (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{1} x_1{}^{\nu-1} x_2, & (-1)^\nu x_1{}^\nu, & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir in dieser Determinante die 1^{ste}, 2^{te}, $\cdots$, $(\nu+1)^{\text{te}}$ Verticalreihe und die letzte Horizontalreihe mit $(-1)^{i+\nu}$, so ergiebt sich mit Benutzung der Relation (10):

$$(20) \qquad \Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = (-1)^{\nu(i+\nu)} \Delta(x, y, (-1)^i \lambda^{(\mu)}).$$

Diese allgemeine Formel ist der früher gefundenen Relation (11) analog. In dem Hauptfalle I: $i \equiv 0$, $\nu \equiv 0 \pmod 2$ liefert sie die Beziehung:

$$\Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}),$$

deren Anwendung auf (19) die Gleichungen:

$$\varphi^{(\mu)}(x)\, \psi^{(\mu)}(y) = \varphi^{(\mu)}(y)\, \psi^{(\mu)}(x);$$

also:

$$\psi^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}$$

und des weiteren:

$$(21) \qquad \begin{aligned} \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y) \\ \Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) &= [\varphi^{(\mu)}(x)]^2 \end{aligned}$$

zur Folge hat. In dem zweiten Hauptfall: $i \equiv 1$, $\nu \equiv 1 \pmod 2$ nimmt die allgemeine Formel (20) die Gestalt an:

$$\Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = \Delta(x, y, -\lambda^{(\mu)}).$$

Setzen wir der Einfachheit halber μ als gerade voraus, so ist nach (12) für Hauptfall II:

$$\lambda^{(\mu+1)} = -\lambda^{(\mu)},$$

und die erhaltene Relation schreibt sich in der Gestalt:

$$\Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = \Delta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}),$$

oder mit Benutzung von (19):

$$\varphi^{(\mu)}(y)\, \psi^{(\mu)}(x) = \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \psi^{(\mu+1)}(y),$$

also:

$$\psi^{(\mu)} = \varphi^{(\mu+1)}, \quad \psi^{(\mu+1)} = \varphi^{(\mu)},$$

und wir erhalten somit die endgültigen Formeln:

$$(22) \qquad \begin{aligned} \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(y), \\ \Delta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y), \\ \Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) &= \Delta(x, x, \lambda^{(\mu+1)}) = \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x). \end{aligned}$$

Aus der letzteren Relation folgt noch, dass $\Delta(x, x, \lambda)$ eine gerade

Function von λ ist. Für den dritten Hauptfall: $i \equiv 1$, $\nu \equiv 0 \pmod{2}$ haben wir mittelst Formel (20):

$$\Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = \Delta(x, y, -\lambda^{(\mu)}). \tag{23}$$

Setzen wir wiederum der Einfachheit halber μ als gerade voraus und schliessen vorläufig den Sonderfall $\mu = \nu$ aus, so ist nach (12) für Hauptfall III:

$$\lambda^{(\mu+1)} = -\lambda^{(\mu)}$$

und die gefundene Relation schreibt sich:

$$\Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = \Delta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}),$$

oder mit Benutzung von (19):

$$\varphi^{(\mu)}(y)\, \psi^{(\mu)}(x) = \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \psi^{(\mu+1)}(y),$$

also:

$$\psi^{(\mu)} = \varphi^{(\mu+1)}, \quad \psi^{(\mu+1)} = \varphi^{(\mu)}.$$

Dieselbe Formel (19) führt somit zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) &&= \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(y), \\ &\Delta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}) &&= \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y), \\ &\Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) &&= \Delta(x, x, \lambda^{(\mu+1)}) = \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x), \end{aligned} \tag{24}$$

wo die letzte Gleichung die Determinante $\Delta(x, x, \lambda)$ als gerade Function von λ kennzeichnet. Der bisher ausgeschlossene Fall $\mu = \nu$ erledigt sich durch Einsetzung des Werthes:

$$\lambda^{(\nu)} = -\lambda^{(\nu)} = 0$$

in (23). Wir finden dann:

$$\Delta(y, x, 0) = \Delta(x, y, 0) = \varphi^{(\nu)}(x)\, \psi^{(\nu)}(y),$$

mithin:

$$\psi^{(\nu)} = \varphi^{(\nu)}$$

und schliesslich:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y, 0) &= \varphi^{\nu}(x)\, \varphi^{\nu}(y), \\ \Delta(x, x, 0) &= [\varphi^{\nu}(x)]^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Bevor wir zur analogen Behandlung des letzten Hauptfalles übergehen, möge hier noch der folgende Satz zur Sprache gelangen:

Die Determinante $\Delta(x, y, \lambda)$ besitzt gegenüber den linearen Transformationen der Grundform einen invarianten Charakter; d. h. entwickeln wir dieselbe nach Potenzen von λ, wie folgt:

$$\Delta(x, y, \lambda) = C_0 \lambda^{\nu} + C_1 \lambda^{\nu-1} + \cdots + C_{\nu},$$

so sind die Coefficienten $C_0, C_1, \cdots, C_{\nu}$ rationale Covarianten von der Ordnung ν für jede der beiden Variablenreihen x_1, x_2; y_1, y_2, dagegen vom Grade $0, 1, \cdots, \nu$ in den Coefficienten der Grundform f.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird leicht erkannt, sobald wir uns analoger Ueberlegungen wie beim Beweise des entsprechenden Satzes auf Seite 385 bedienen. Wenden wir nämlich die vorhin gewonnenen Relationen für unsere Determinante $\Delta(x, y, \lambda)$ nach linearer Trans-

formation der Grundform f an, so muss offenbar das rechter Hand sich ergebende Formenproduct mit dem durch directe Transformation hervorgehenden Ausdrucke $\varphi'(x')\,\psi'(y')$ bis auf eine Constante übereinstimmen, d. h. unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise wird:

$$\Delta'(x', y', \lambda') = C\varphi'(x')\,\psi'(y') = C\varphi(x)\,\psi(y)$$

und folglich:

$$\Delta'(x', y', \varrho^i\lambda) = C\Delta(x, y, \lambda),$$

wodurch, nach Bestimmung der Constanten C als $\nu(i-1)^{\text{ter}}$ Potenz der Substitutionsdeterminante ϱ, unsere Behauptung erwiesen ist.

Die gewonnenen Formeln (21), (22), (24), (25) ermöglichen für die ersten drei Hauptfälle die Bestimmung der Form $\varphi^{(\mu)}$, und zwar in der Weise, dass ausser der Hülfe rationaler Covarianten nur die Kenntniss der irrationalen Invariante $\lambda^{(\mu)}$ erforderlich ist. *Die Form $\varphi^{(\mu)}$ bezeichnen wir demnach als eine der irrationalen Invariante $\lambda^{(\mu)}$ zugehörige irrationale Covariante der Grundform f.*

Wir wenden uns schliesslich zur Erörterung des vierten Hauptfalles: $i \equiv 0$, $\nu \equiv 1$ (mod. 2), welcher eine gesonderte Stellung einnimmt. Die allgemeine Relation (20) nimmt die Gestalt an:

$$\Delta(y, x, \lambda^{(\mu)}) = -\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}),$$

oder mit Benutzung von (19):

$$\varphi^{(\mu)}(y)\,\psi^{(\mu)}(x) = -\varphi^{(\mu)}(x)\,\psi^{(\mu)}(y).$$

Mittelst des Ansatzes:

$$\psi^{(\mu)} = C\varphi^{(\mu)}$$

ergiebt sich die Relation:

$$C\varphi^{(\mu)}(y)\,\varphi^{(\mu)}(x) = -C\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(y),$$

welche nur durch die Annahme eines verschwindenden C befriedigt werden kann. Eine Folge hiervon ist das identische Verschwinden der Determinante $\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)})$ oder, was ebensoviel sagt, das gleichzeitige Verschwinden sämmtlicher ersten Unterdeterminanten von $\Delta(\lambda^{(\mu)})$. Der letztere Umstand nöthigt zur Wiederaufnahme der Betrachtungen, welche im Anschluss an das Gleichungssystem (14) zu der wichtigen Relation (19) geführt haben. Die dort entwickelten Schlüsse verlieren ihre Wirksamkeit, sobald neben der Determinante $\Delta(\lambda^{(\mu)})$ des Systems (14) noch sämmtliche ersten Unterdeterminanten verschwinden und damit die lineare Abhängigkeit der Gleichungen des Systems (14) derart gesteigert wird, dass stets je zwei von ihnen Folge der $\nu - 1$ übrigen sind. Um auch unter diesen Umständen die Bestimmung der gesuchten Coefficienten $\alpha_0^{(\mu)}, \alpha_1^{(\mu)}, \cdots, \alpha_\nu^{(\mu)}$ ohne Bevorzugung oder

Auszeichnung irgend einer der $\nu+1$ Gleichungen (14) wirklich durchzuführen, fingiren wir ausser der Unbekannten u noch eine weitere $(\nu+3)^{\text{te}}$ Unbekannte $u^{(1)}$ und betrachten an Stelle des Systems (14) das folgende:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
&-k_0{}^0 a_{i-\nu}\alpha_\nu^{(\mu)} + k_1{}^0 a_{i-\nu+1}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^0 a_i \alpha_0{}^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)}\alpha_0{}^{(\mu)} + y_2{}^\nu u \\
&\qquad\qquad + y_2{}^{(1)\nu} u^{(1)} = 0, \\
&-k_0{}^1 a_{i-\nu+1}\alpha_\nu^{(\mu)} + k_1{}^1 a_{i-\nu+2}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^1 a_{i+1}\alpha_0{}^{(\mu)} - \binom{\nu}{1}\lambda^{(\mu)}\alpha_0{}^{(\mu)} \\
&\qquad\qquad - \binom{\nu}{1} y_1 y_2{}^{\nu-1} u - \binom{\nu}{1} y_1{}^{(1)} y_2{}^{(1)\nu-1} u^{(1)} = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&-k_0{}^\nu a_i \alpha_\nu{}^{(\mu)} + k_1{}^\nu a_{i+} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}\alpha_0{}^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)}\alpha_\nu{}^{(\mu)} \\
&\qquad\qquad - y_1{}^\nu u - y_1{}^{(1)\nu} u^{(1)} = 0.
\end{aligned}
$$

Um die Unbestimmtheit der Lösungen zu vermeiden, fügen wir noch die lineare Gleichung:

$$
(27)\qquad -\alpha_\nu{}^{(\mu)} x_2{}^{(1)\nu} - \binom{\nu}{1}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} x_1{}^{(1)} x_2{}^{(1)\nu-1} - \cdots - \alpha_0{}^{(\mu)} x_1{}^{(1)\nu} = 0
$$

mit den willkürlichen Parametern $x_1{}^{(1)}$, $x_2{}^{(1)}$ hinzu, während für die Unbekannte $\varphi^{(\mu)}$ die Relation:

$$
(28)\qquad -\alpha_\nu{}^{(\mu)} x_2{}^\nu - \binom{\nu}{1}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} x_1 x_2{}^{\nu-1} - \cdots - \alpha_0{}^{(\mu)} x_1{}^\nu + \varphi^{(\mu)} = 0
$$

bestehen bleibt. Das aufgestellte Gleichungssystem (26), (27), (28) enthält $\nu+3$ lineare Gleichungen mit den $\nu+4$ homogenen Unbekannten: $\alpha_\nu{}^{(\mu)}, \alpha_{\nu-1}^{(\mu)}, \cdots, \alpha_0{}^{(\mu)}, u, u^{(1)}, \varphi^{(\mu)}$. Für die Verhältnisse der letzteren liefert demgemäss die gewöhnliche Auflösungsmethode mittelst Determinanten das Ergebniss:

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_\nu{}^{(\mu)} : \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} : \cdots : u : u^{(1)} : \varphi^{(\mu)} = \Delta_\nu{}^{(\mu)} : \Delta_{\nu-1}^{(\mu)} : \cdots \\
&\qquad : \pm\,\Delta(x^{(1)}, y^{(1)}, \lambda^{(\mu)}) : \pm\,\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) : \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

wo $\Delta_\nu^{(\mu)}, \Delta_{\nu-1}^{(\mu)}, \cdots$ die den Unbekannten $\alpha_\nu^{(\mu)}, \alpha_{\nu-1}^{(\mu)}, \cdots$ entsprechenden Determinanten des Systems bedeuten und insbesondere die Determinante $\Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix}$ in ausführlicher Schreibweise eine Gestalt annimmt, wie sie sich andererseits direct durch zweimalige Ränderung unserer ursprünglichen Determinante (6) ergiebt, nämlich:

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{pmatrix}\lambda^{(\mu)} \tag{30}$$

$$= \begin{vmatrix} k_0{}^0 a_{i-\nu}, & k_1{}^0 a_{i-\nu+1}, & \cdots k^0_{\nu-1} a_{i-1}, & k_\nu{}^0 a_i - \lambda^{(\mu)}, & y_2{}^\nu, & y_2{}^{(1)\nu} \\ k_0{}^1 a_{i-\nu+1}, & k_1{}^1 a_{i-\nu+2}, & \cdots k^1_{\nu-1} a_i + \binom{\nu}{1}\lambda^{(\mu)}, & k_\nu{}^1 a_{i+1}, & -\binom{\nu}{1} y_1 y_2^{\nu-1}, & -\binom{\nu}{1} y_1^{(1)} y_2^{(1)\nu-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_0{}^\nu a_i + \lambda^{(\mu)}, & k_1{}^\nu a_{i+1}, & \cdots k^\nu_{\nu-1} a_{i+\nu-1}, & k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}, & -y_1{}^\nu, & -y_1^{(1)\nu} \\ x_2{}^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1 x_2{}^{\nu-1}, & \cdots + \binom{\nu}{1} x_1{}^{\nu-1} x_2, & -x_1{}^\nu, & 0, & 0 \\ x_2{}^{(1)\nu}, & -\binom{\nu}{1} x_1^{(1)} x_2^{(1)\nu-1}, & \cdots + \binom{\nu}{1} x_1^{(1)\nu-1} x_2^{(1)}, & -x_1^{(1)\nu}, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Mit Rücksicht auf das identische Verschwinden der einfach geränderten Determinante folgt aus der Proportion (29) für jede der beiden Unbekannten u und $u^{(1)}$ der Werth Null, dessen Einsetzung das Gleichungssystem (26) in das ursprüngliche Gleichungssystem (14) überführt. Die der Proportion (29) entnommenen Verhältnisswerthe der Unbekannten befriedigen daher zugleich das System (14) und erscheinen überdies wesentlich unabhängig von den Parametern y_1, y_2 und $y_1{}^{(1)}$, $y_2{}^{(1)}$. Der letztere Umstand rechtfertigt den Ansatz:

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{pmatrix}\lambda^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)})\, \psi^{(\mu)}(y, y^{(1)}). \tag{31}$$

Sehen wir nun vorläufig von etwaigen weiteren Ausartungen des Gleichungssystems (14) ab, so lässt das letztere im gegenwärtigen Falle eine einfach und nur eine einfach unendliche Mannichfaltigkeit von Lösungswerthen für die Unbekannten zu. Diese Thatsache findet ihren Ausdruck darin, dass die Function $\varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)})$ in (31) bei variablen Parametern $x_1{}^{(1)}$, $x_2{}^{(1)}$ ein Formenbüschel repräsentirt, also nothwendigerweise die Gestalt annimmt:

$$\varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)}) = \varphi_0{}^{(\mu)}(x)\, \chi_0{}^{(\mu)}(x^{(1)}) + \varphi_1{}^{(\mu)}(x)\, \chi_1{}^{(\mu)}(x^{(1)}). \tag{32}$$

Da ferner die Determinante (30) für $x_1 = x_1{}^{(1)}$, $x_2 = x_2{}^{(1)}$ identisch verschwindet, so haben wir auch:

$$\varphi^{(\mu)}(x^{(1)}, x^{(1)}) = \varphi_0{}^{(\mu)}(x^{(1)})\, \chi_0{}^{(\mu)}(x^{(1)}) + \varphi_1{}^{(\mu)}(x^{(1)})\, \chi_1{}^{(\mu)}(x^{(1)}) = 0.$$

Auf Grund dieser Beziehung nimmt (32) die neue Gestalt:

$$\varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)}) = F(x^{(1)})\left\{\varphi_0{}^{(\mu)}(x)\, \varphi_1{}^{(\mu)}(x^{(1)}) - \varphi_1{}^{(\mu)}(x)\, \varphi_0{}^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}$$

an, wo $F(x^{(1)})$ einen nur von $x_1{}^{(1)}$, $x_2{}^{(1)}$ abhängigen Quotienten bedeutet. Da nun die Determinante (30) durch Vertauschung von x_1, x_2 und $x_1{}^{(1)}$, $x_2{}^{(1)}$ nur ihr Vorzeichen ändert, so gilt das Gleiche von der Function $\varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)})$ und wir erhalten aus der letzten Formel:

$$\varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)}) = F(x)\left\{\varphi_0^{(\mu)}(x)\,\varphi_1^{(\mu)}(x^{(1)}) - \varphi_1^{(\mu)}(x)\,\varphi_0^{(\mu)}(x^{(1)})\right\},$$

d. h. $F(x^{(1)}) = F(x)$ stellt nothwendig eine Constante etwa die Einheit dar. Schliesslich ersetzen wir in der Determinante (30) y_1, y_2 durch x_1, x_2; $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ durch $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ und umgekehrt, und vertauschen dann ihre Verticalreihen mit den Horizontalreihen ohne Verstellung der Diagonalelemente:

$$k_0^0 a_{i-\nu},\ k_1^1 a_{i-\nu+2},\ \cdots,\ k_\nu^\nu a_{i+\nu},\ 0,\ 0.$$

Die so erhaltene Determinante geht durch Multiplication der $1^{\text{sten}}, 2^{\text{ten}}, \cdots, (\nu+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe und der vorletzten und letzten Horizontalreihe mit -1 unter Vermittelung der Relation (10) genau in die frühere Gestalt (30) über. Wir gewinnen damit die Beziehung:

$$\Delta\begin{pmatrix} y, & x & \\ y^{(1)}, & x^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix}$$

oder wegen (31):

$$\varphi^{(\mu)}(y, y^{(1)})\,\psi^{(\mu)}(x, x^{(1)}) = \varphi^{(\mu)}(x, x^{(1)})\,\psi^{(\mu)}(y, y^{(1)}),$$

folglich:

$$\psi^{(\mu)}(y, y^{(1)}) = \varphi^{(\mu)}(y, y^{(1)}) = \varphi_0^{(\mu)}(y)\,\varphi_1^{(\mu)}(y^{(1)}) - \varphi_1^{(\mu)}(y)\,\varphi_0^{(\mu)}(y^{(1)}).$$

Demnach ergeben sich zur Bestimmung der gesuchten Formen $\varphi^{(\mu)}$ als Endresultat die Formeln:

$$(33)\quad \begin{aligned} \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix} &= \left\{\varphi_0^{(\mu)}(x)\,\varphi_1^{(\mu)}(x^{(1)}) - \varphi_1^{(\mu)}(x)\,\varphi_0^{(\mu)}(x^{(1)})\right\} \\ &\quad \times \left\{\varphi_0^{(\mu)}(y)\,\varphi_1^{(\mu)}(y^{(1)}) - \varphi_1^{(\mu)}(y)\,\varphi_0^{(\mu)}(y^{(1)})\right\} \\ \Delta\begin{pmatrix} x, & x & \\ x^{(1)}, & x^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix} &= \left\{\varphi_0^{(\mu)}(x)\,\varphi_1^{(\mu)}(x^{(1)}) - \varphi_1^{(\mu)}(x)\,\varphi_0^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}^2. \end{aligned}$$

Nach den letzteren Ausführungen ist jede Form des Büschels $c_0\varphi_0^{(\mu)} + c_1\varphi_1^{(\mu)}$ im Sinne der Bedingung (13) dem Wurzelwerthe $\lambda^{(\mu)}$ zugeordnet. Während also in den ersten drei Hauptfällen jedem der $\nu+1$ unter einander verschiedenen Wurzelwerthe λ eine einzige Form φ entspricht, existiren im vorliegenden vierten Hauptfalle nur $\frac{\nu+1}{2}$ unter einander verschiedene Wurzelwerthe λ, deren jeder zur Construction zweier zugeordneter Formen φ_0 und φ_1 Anlass giebt. Aus den Formeln:

$$(f, \varphi_0^{(\mu)})_i = \lambda^{(\mu)}\varphi_0^{(\mu)}, \quad (f, \varphi_1^{(\mu)})_i = \lambda^{(\mu)}\varphi_1^{(\mu)}$$

ist dann die Gleichberechtigung der fraglichen Formen mit irgend zwei linearen Combinationen ihrer selbst direct erkennbar. Um mit den früheren drei Hauptfällen in möglichster Uebereinstimmung zu bleiben, mögen im Hinblick auf die Festsetzungen (12) unter Annahme eines geraden μ die Bezeichnungen gelten:

$$\varphi_0^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}, \quad \varphi_1^{(\mu)} = \varphi^{(\mu+1)},$$

durch deren Einführung die Bestimmungsgleichungen (33) in die folgenden übergehen:

$$
(34)\quad
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{pmatrix} \lambda^{(\mu)} \Big) &= \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(x^{(1)})\right\} \\
&\times \left\{\varphi^{(\mu)}(y)\, \varphi^{(\mu+1)}(y^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(y)\, \varphi^{(\mu)}(y^{(1)})\right\} \\
\Delta\Big(\begin{matrix} x, & x \\ x^{(1)}, & x^{(1)} \end{matrix}\, \lambda^{(\mu)}\Big) &= \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}^2.
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung ähnlicher Schlüsse, wie oben, lässt sich zeigen, *dass auch die gegenwärtig auftretende Determinante* $\Delta\Big(\begin{matrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{matrix}\, \lambda\Big)$ *gegenüber den linearen Transformationen der Grundform einen invarianten Charakter besitzt; d. h. entwickeln wir dieselbe nach Potenzen von* λ *in der Gestalt:*

$$
\Delta\Big(\begin{matrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{matrix}\, \lambda\Big) = C_0 \lambda^{\nu-1} + C_1 \lambda^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1},
$$

so sind die Coefficienten $C_0, C_1, \cdots, C_{\nu-1}$ *rationale Covarianten von der Ordnung* ν *für jede der vier Variablenreihen* $x_1, x_2;\ y_1, y_2;\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)};\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$ *dagegen resp. vom Grade* $0, 1, \cdots, \nu - 1$ *in den Coefficienten der Grundform.*

Schliesslich erledigen wir noch die naheliegende Frage nach der Jacobischen Covariante des gefundenen Formenbüschels. Zu dem Zwecke combiniren wir in der Determinante (30) die vorletzte und letzte Horizontalreihe derart, dass die Absonderung des Factors $x_1 x_2^{(1)} - x_2 x_1^{(1)}$ möglich wird. Wir erhalten dann nach Vollziehung des Grenzüberganges $x_1^{(1)} = x_1$, $x_2^{(1)} = x_2$ die Relation:

$$
\frac{1}{\nu} \lim_{x^{(1)}=x} \frac{\Delta\Big(\begin{matrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{matrix}\, \lambda^{(\mu)}\Big)}{x_1 x_2^{(1)} - x_2 x_1^{(1)}}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
k_0{}^0 a_{i-\nu}, & k_1{}^0 a_{i-\nu+1}, & \cdots & k_{\nu-1}^0 a_{i-1}, & k_\nu{}^0 a - \lambda, & y_2{}^\nu, & y_2{}^{(1)\nu} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
k_0{}^\nu a_i + \lambda^{(\mu)}, & k_1{}^\nu a_{i+1}, & \cdots & k_{\nu-1}^\nu a_{i+\nu-1}, & k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}, & -y_1{}^\nu, & -y_1{}^{(1)\nu} \\
0, & x_2{}^{\nu-1}, & \cdots & -\binom{\nu-1}{1} x_1^{\nu-2} x_2, & x_1{}^{\nu-1}, & 0, & 0 \\
x_2{}^{\nu-1}, & -\binom{\nu-1}{1} x_1 x_2{}^{\nu-2}, & \cdots & x_1{}^{\nu-1}, & 0, & 0, & 0
\end{vmatrix}.
$$

Da nun der Werth von:

$$\frac{1}{\nu} \lim_{x^{(1)}=x} \frac{\varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(x^{(1)})}{x_1 x_2^{(1)} - x_2 x_1^{(1)}}$$

nichts anderes als die gesuchte Jacobische Covariante $J^{(\mu)}(x)$ darstellt, so haben wir zu deren Bestimmung die Formeln:

$$\begin{aligned} &\Delta'(x, y, \lambda^{(\mu)}) = J^{(\mu)}(x)\, J^{(\mu)}(y), \\ &\Delta'(x, x, \lambda^{(\mu)}) = [J^{\mu}(x)]^2, \end{aligned} \tag{35}$$

worin die Bezeichnung gilt:

$$\Delta'(x, y, \lambda) \tag{36}$$

$$= \begin{vmatrix} k_0{}^0 a_{i-\nu}, & k_1{}^0 a_{i-\nu+1}, \cdots & k^0_{\nu-1} a_{i-1}, & k_\nu{}^0 a_i - \lambda, & 0, & y_2{}^{\nu-1} \\ k_0{}^1 a_{i-\nu+1}, & k_1{}^1 a_{i-\nu+2}, \cdots & k^1_{\nu-1} a_i + \binom{\nu}{1}\lambda, & k_\nu{}^1 a_{i-1}, & y_2{}^{\nu-1}, & -\binom{\nu-1}{1} y_1 y_2{}^{\nu-2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_0{}^\nu a_i + \lambda, & k_1{}^\nu a_{i+1}, \cdots & k^\nu_{\nu-1} a_{i+\nu-1}, & k_\nu{}^\nu a_{i+\nu}, & y_1{}^{\nu-1}, & 0 \\ 0, & x_2{}^{\nu-1}, \cdots & -\binom{\nu-1}{1} x_1^{\nu-2} x_2, & x_1{}^{\nu-1}, & 0, & 0 \\ x_2{}^{\nu-1}, & -\binom{\nu-1}{1} x_1 x_2{}^{\nu-2}, \cdots & x_1{}^{\nu-1}, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

Offenbar ist auch diese Determinante gegenüber den linearen Transformationen der Grundform invariant, indem bei ihrer Entwickelung nach Potenzen von λ:

$$\Delta'(x, y, \lambda) = C_0 \lambda^{\nu-1} + C_1 \lambda^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1}$$

die Coefficienten $C_0, C_1, \ldots, C_{\nu-1}$ *rationale Covarianten von der Ordnung* $2\nu - 2$ *für jede der beiden Variablenreihen* x_1, x_2; y_1, y_2, *dagegen vom Grade* $0, 1, \ldots, \nu - 1$ *in den Coefficienten der Grundform* f *darstellen.*

Der Uebersicht halber seien im Folgenden diejenigen Ergebnisse kurz zusammengestellt, welche in den vier Hauptfällen zur Bestimmung der gesuchten $\nu + 1$ Formen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ dienen. *Bezeichnet allgemein* $\varphi^{(\mu)}$ *die im Sinne der Formel* (13) *dem Wurzelwerthe* $\lambda^{(\mu)}$ *zugeordnete Form, so gelten bei Zugrundelegung der Festsetzungen* (12) *die Formeln:*

Hauptfall I:
$$\left.\begin{aligned} \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y) \\ \Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) &= [\varphi^{(\mu)}(x)]^2 \end{aligned}\right\} \mu = 0, 1, \cdots, \nu.$$

" II:
$$\left.\begin{aligned} \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(y) \\ \Delta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y) \\ \Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) &= \Delta(x, x, \lambda^{(\mu+1)}) \\ &= \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x) \end{aligned}\right\} \mu = 0, 2, \cdots, \nu - 1.$$

Hauptfall III:
$$\left.\begin{aligned} \Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(y) \\ \Delta(x, y, \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(y) \\ \Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) &= \Delta(x, x, \lambda^{(\mu+1)}) \\ &= \varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(x) \end{aligned}\right\}\ \mu = 0, 2, \cdots, \nu - 2.$$
$$\begin{aligned} \Delta(x, y, 0) &= \varphi^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(\nu)}(y) \\ \Delta(x, x, 0) &= [\varphi^{(\nu)}(x)]^2 \end{aligned}$$

" IV:
$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{pmatrix}\lambda^{(\mu)}\Big) = \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}$$
$$\times\left\{\varphi^{(\mu)}(y)\,\varphi^{(\mu+1)}(y^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(y)\,\varphi^{(\mu)}(y^{(1)})\right\}$$
$$\Delta\begin{pmatrix} x, & x \\ x^{(1)}, & x^{(1)} \end{pmatrix}\lambda^{(\mu)}\Big) = \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}^2$$
$$\left.\begin{aligned} \Delta'(x, y, \lambda^{(\mu)}) &= J^{(\mu)}(x)\,J^{(\mu)}(y) \\ \Delta'(x, x, \lambda^{(\mu)}) &= [J^{(\mu)}(x)]^2. \end{aligned}\right\}\ \mu = 0, 2, \cdots, \nu - 1.$$

Die Determinanten $\Delta(x, y, \lambda)$, $\Delta\begin{pmatrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{pmatrix}\lambda\Big)$ *und* $\Delta'(x, y, \lambda)$ *bedeuten den Formeln* (18), (30), (36) *zu Folge bekannte ganze Functionen von* λ; *ihre Coefficienten sind Covarianten der gegebenen Grundform* f. *Die eindeutige Zugehörigkeit der irrationalen Covariante* $\varphi^{(\mu)}$ *zum Wurzelwerthe* $\lambda^{(\mu)}$ *erleidet eine allgemeine Ausnahme nur im vierten Hauptfalle, wo jede Form des Formenbüschels* $\varphi^{(\mu)}$, $\varphi^{(\mu+1)}$ *mit der Jacobischen Covariante* $J^{(\mu)}(x)$ *in gleichberechtigter Weise der Doppelwurzel* $\lambda^{(\mu)} = \lambda^{(\mu+1)}$ *zugeordnet erscheint.*

§ 3.

Die Discussion des Formensystems φ.

Der gegenwärtige Paragraph beschäftigt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften, welche das Formensystem φ als ein System irrationaler Covarianten der fraglichen Art kennzeichnen. Unsere Betrachtungen führen gleichzeitig zu einer Darstellung der Grundform f und gewisser rationaler Covarianten derselben unter Vermittelung der Formen φ.

Wir zeigen zunächst, *dass die* $\nu + 1$ *Formen* $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ *ein System linear von einander unabhängiger Formen* ν^{ter} *Ordnung bilden.* Denn bestehe zwischen ihnen eine lineare Relation etwa von der Gestalt:

(37) $$c^{(0)}\varphi^{(0)} + c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} = 0,$$

so folgt aus derselben nach Multiplication der Formel (13) mit $c^{(\mu)}$ und Summation von $\mu = 0$ bis $\mu = \nu$ die weitere Relation:

$$(38)\qquad \lambda^{(0)}c^{(0)}\varphi^{(0)}+\lambda^{(1)}c^{(1)}\varphi^{(1)}+\cdots+\lambda^{(\nu)}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)}=0.$$

Die Multiplication derselben Formel (13) mit $\lambda^{(\mu)}c^{(\mu)}$ und Summation von $\mu=0$ bis $\mu=\nu$ liefert auf Grund der eben erhaltenen Relation (38) in analoger Weise:

$$(39)\qquad \lambda^{(0)^2}c^{(0)}\varphi^{(0)}+\lambda^{(1)^2}c^{(1)}\varphi^{(1)}+\cdots+\lambda^{(\nu)^2}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)}=0.$$

Die Fortsetzung dieser Operation ergiebt:

$$(40)\qquad \begin{array}{l} \lambda^{(0)^3}c^{(0)}\varphi^{(0)}+\lambda^{(1)^3}c^{(1)}\varphi^{(1)}+\cdots+\lambda^{(\nu)^3}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^{(0)^\nu}c^{(0)}\varphi^{(0)}+\lambda^{(1)^\nu}c^{(1)}\varphi^{(1)}+\cdots+\lambda^{(\nu)^\nu}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)}=0, \end{array}$$

und nach Elimination der Ausdrücke $c^{(0)}\varphi^{(0)}$, $c^{(1)}\varphi^{(1)}$, $\ldots$, $c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)}$ aus den nunmehr erhaltenen Gleichungen (37), (38), (39), (40) erscheint als nothwendige Folge die Identität:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda^{(0)} & \lambda^{(1)} & \cdots & \lambda^{(\nu)}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \lambda^{(0)^\nu} & \lambda^{(1)^\nu} & \cdots & \lambda^{(\nu)^\nu} \end{vmatrix}=\prod^{\mu,\varkappa}(\lambda^{(\mu)}-\lambda^{(\varkappa)})=0.$$

Die darin ausgesprochene Forderung der Gleichheit zweier Wurzeln λ ist in den ersten drei Hauptfällen offenbar nicht erfüllt, sobald unter vorläufiger Ausschliessung aller Vorkommnisse specieller Natur die betrachtete Grundform f eine Form vom allgemeinsten Charakter bedeutet. Dementsprechend kann eine lineare Relation von der Art (37) nicht existiren. Betreffs des vierten Hauptfalles nehmen die Gleichungen (37), (38), (39), (40) in Folge der paarweisen Gleichheit der Wurzeln λ die Gestalt an:

$$\begin{array}{l} (c^{(0)}\varphi^{(0)}+c^{(1)}\varphi^{(1)})+(c^{(2)}\varphi^{(2)}+c^{(3)}\varphi^{(3)})+\cdots\\ \qquad\qquad +(c^{(\nu-1)}\varphi^{(\nu-1)}+c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)})=0,\\ \lambda^{(0)}(c^{(0)}\varphi^{(0)}+c^{(1)}\varphi^{(1)})+\lambda^{(2)}(c^{(2)}\varphi^{(2)}+c^{(3)}\varphi^{(3)})+\cdots\\ \qquad\qquad +\lambda^{(\nu-1)}(c^{(\nu-1)}\varphi^{(\nu-1)}+c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)})=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^{(0)\frac{\nu-1}{2}}(c^{(0)}\varphi^{(0)}+c^{(1)}\varphi^{(1)})+\lambda^{(2)\frac{\nu-1}{2}}(c^{(2)}\varphi^{(2)}+c^{(3)}\varphi^{(3)})+\cdots\\ \qquad\qquad +\lambda^{(\nu-1)\frac{\nu-1}{2}}(c^{(\nu-1)}\varphi^{(\nu-1)}+c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)})=0, \end{array}$$

wovon das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ \lambda^{(0)} & \lambda^{(2)} & \cdots \lambda^{(\nu-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \lambda^{(0)\frac{\nu-1}{2}} & \lambda^{(2)\frac{\nu-1}{2}} & \cdots \lambda^{(\nu-1)\frac{\nu-1}{2}} \end{vmatrix} = \prod^{\mu,\varkappa} (\lambda^{(\mu)} - \lambda^{(\varkappa)}), \quad \mu, \varkappa = 0, 2, \ldots \frac{\nu-1}{2}.$$

eine Folge ist, die mit der angenommenen Allgemeinheit der zu Grunde gelegten Form f nicht vereinbart werden kann.

Des Weiteren leiten wir eine eigenthümliche invariante Beziehung zwischen den Formen des Systems φ ab, indem wir die ν^{te} Ueberschiebung $\varphi^{(\varkappa)}$ über die Formel (13) bilden, wie folgt:

$$((f, \varphi^{(\mu)})_i \varphi^{(\varkappa)})_\nu = \lambda^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu.$$

Unter Zugrundelegung der schon zu Anfang benutzten Bezeichnungen:

$$f = a_x^n; \quad \varphi^{(\mu)} = \alpha_x^{(\mu)\nu}; \quad \varphi^{(\varkappa)} = \alpha_x^{(\varkappa)\nu}$$

lautet jene Identität in symbolischer Schreibweise:

$$(a\alpha^{(\mu)})^i (a\alpha^{(\varkappa)})^i (\alpha^{(\mu)}\alpha^{(\varkappa)})^{\nu-i} = \lambda^{(\mu)} (\alpha^{(\mu)}\alpha^{(\varkappa)})^\nu,$$

woraus wir durch Vertauschung der Indices μ und $\varkappa$ die zweite Relation gewinnen:

$$(a\alpha^{(\varkappa)})^i (a\alpha^{(\mu)})^i (\alpha^{(\varkappa)}\alpha^{(\mu)})^{\nu-i} = \lambda^{(\varkappa)} (\alpha^{(\varkappa)}\alpha^{(\mu)})^\nu.$$

Multipliciren wir diese letztere Relation mit $(-1)^{\nu-i+1}$ und addiren sie dann zur ersteren, so bleibt:

$$\lambda^{(\mu)} (\alpha^{(\mu)}\alpha^{(\varkappa)})^\nu + (-1)^{\nu-i+1} \lambda^{(\varkappa)} (\alpha^{(\varkappa)}\alpha^{(\mu)})^\nu = 0,$$

oder:

$$\{\lambda^{(\mu)} - (-1)^i \lambda^{(\varkappa)}\} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu = 0.$$

Ist hierin der erstere Factor von Null verschieden, so muss der zweite Null ergeben, d. h. *es besteht die Relation:*

(41) $$(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu = 0$$

für alle Werthe der Indices μ und $\varkappa$, für welche nicht die Beziehung:

$$\lambda^{(\mu)} = (-1)^i \lambda^{(\varkappa)}$$

gilt. Um die Bedeutung dieses Ergebnisses im Einzelnen zu erkennen, stellen wir in der folgenden Tabelle für die vier Hauptfälle alle diejenigen Werthepaare der zusammengehörigen Indices $\mu, \varkappa$ auf, für welche die Ueberschiebung $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ endlich bleiben darf. Für die Anordnung und Bezeichnungsweise der $\nu + 1$ Wurzeln λ gelten die früheren Festsetzungen:

(42)
$$\begin{aligned} &\textit{Hauptfall}\ \mathrm{I}: \mu, \varkappa = 0, 0; = 1, 1; = 2, 2; \cdots = \nu, \nu, \\ &\mathrm{II}: \mu, \varkappa = 0, 1; = 2, 3; = 4, 5; \cdots = \nu - 1, \nu, \\ &\mathrm{III}: \mu, \varkappa = 0, 1; = 2, 3; = 4, 5; \cdots = \nu - 2, \nu - 1; = \nu, \nu. \\ &\mathrm{IV}: \mu, \varkappa = 0, 1; = 2, 3; = 4, 5; \cdots = \nu - 1, \nu. \end{aligned}$$

Dass die in vorstehender Tabelle ausgezeichneten Ueberschiebungen $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ auch wirklich im Allgemeinen von Null verschieden sind, lehrt folgende Ueberlegung. Die Functionalinvariante Φ des Formensystems φ besitzt wegen der oben erwiesenen linearen Unabhängigkeit der Formen φ einen von Null verschiedenen Werth. Betrachten wir nun das Product:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0^{(0)} & \alpha_1^{(0)} & \cdots & \alpha_\nu^{(0)} \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_\nu^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_0^{(\nu)} & \alpha_1^{(\nu)} & \cdots & \alpha_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_\nu^{(0)} & -\binom{\nu}{1}\alpha_{\nu-1}^{(0)} & \cdots & (-1)^\nu \alpha_0^{(0)} \\ \alpha_\nu^{(1)} & -\binom{\nu}{1}\alpha_{\nu-1}^{(1)} & \cdots & (-1)^\nu \alpha_0^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_\nu^{(\nu)} & -\binom{\nu}{1}\alpha_{\nu-1}^{(\nu)} & \cdots & (-1)^\nu \alpha_0^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich durch Ausführung der Multiplication nach dem bekannten Multiplicationsgesetze der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} (\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\nu & (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\nu & \cdots & (\varphi^{(0)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \\ (\varphi^{(1)}, \varphi^{(0)})_\nu & (\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\nu & \cdots & (\varphi^{(1)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(0)})_\nu & (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(1)})_\nu & \cdots & (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \end{vmatrix} = N\Phi^2,$$

worin N das Product aller Binomialcoefficienten von ν mit geeignetem Vorzeichen bedeutet. Die Auswerthung der Determinante linker Hand liefert unter Benutzung der Relationen (41) *die Resultate:*

$$(43)\quad \begin{aligned} &\textit{Hauptfall}\ \mathrm{I}: (\varphi^{(0)},\varphi^{(0)})_\nu\, (\varphi^{(1)},\varphi^{(1)})_\nu \cdots (\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_\nu = N\Phi^2, \\ &\mathrm{II}: (\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu^2 (\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\nu^2 \cdots (\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\nu^2 = N\Phi^2, \\ &\mathrm{III}: (\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu^2 (\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\nu^2 \cdots (\varphi^{(\nu-2)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu^2 (\varphi^{\nu},\varphi^{\nu})_\nu = N\Phi^2, \\ &\mathrm{IV}: (\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu^2 (\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\nu^2 \cdots (\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\nu^2 = N\Phi^2. \end{aligned}$$

Da die Invariante Φ nicht verschwinden darf, so gilt dasselbe auch von jedem einzelnen Factor der linken Seite, womit unsere Behauptung betreffs der Endlichkeit der in Tabelle (42) bezeichneten Ueberschiebungen erwiesen ist. Wir werden später erkennen, wie dieselben zugleich eine einfache Darstellung als Function der Wurzelwerthe λ gestatten.

Was die Frage nach den weiteren invarianten Eigenschaften betrifft, welche das System φ als ein irrational-covariantes Formensystem im fraglichen Sinne charakterisiren, so bedienen wir uns in unserer Untersuchung des folgenden bereits von Clebsch eingeführten Differentiationssymbols*):

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 6 und § 12.

$$\Omega^\sigma = \frac{\nu-\sigma!\;\nu-\sigma!}{\nu!\;\nu!}\left\{\frac{\partial^{2\sigma}}{\partial x_1{}^\sigma\,\partial y_2{}^\sigma} - \binom{\sigma}{1}\frac{\partial^{2\sigma}}{\partial x_1{}^{\sigma-1}\partial x_2\partial y_1\partial y_2{}^{\sigma-1}} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^\sigma \frac{\partial^{2\sigma}}{\partial x_2{}^\sigma\,\partial y_1{}^\sigma}\right\}.$$

Die Anwendung desselben auf eine Covariante $C = a_x^\nu b_y^\nu$ von zwei Variablenreihen x_1, x_2; y_1, y_2 liefert die neue Covariante $(ab)^\sigma a_x^{\nu-\sigma} b_y^{\nu-\sigma}$ von einer um σ geringeren Ordnung bezüglich beider Variablenreihen. Bezeichnen wir die aus dieser durch Identificirung beider Variablenreihen entstehende Covariante von einer Variablenreihe mit $\underset{y=x}{\Omega^\sigma}$, so gilt für die ursprüngliche Covariante die folgende nach Potenzen der identischen Covariante $(x\,y)$ fortschreitende Entwickelung:*)

$$C = D^\nu \underset{y=x}{\Omega^0} + \alpha_1 (xy) D^{\nu-1} \underset{y=x}{\Omega^1} + \alpha_2 (xy)^2 D^{\nu-2} \underset{y=x}{\Omega^{(2)}} + \cdots + \alpha_\nu (xy)^\nu \underset{y=x}{\Omega^\nu},$$

worin die Vorsetzung des Symbols D eine entsprechend wiederholte Polarisation nach y_1, y_2, dagegen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ gewisse Zahlencoefficienten bedeuten.

Das obige Differentiationssymbol Ω^σ wenden wir nun zunächst rücksichtlich der ersten drei Hauptfälle auf die Gleichungen (21), (22), (24), (25) an. Im vierten Hauptfalle legen wir den Ausdruck für die Formencombination:

$$\varphi^\mu(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(y) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(y)$$

zu Grunde, wie er sich nach Formel (34) gleich der Quadratwurzel aus der geradreihigen schiefsymmetrischen Determinante $\Delta\begin{pmatrix} x, x \\ y, y \end{pmatrix}\lambda^{(\mu)}$ ergiebt. Nach Ausführung unserer Operation kehren wir vermöge der Substitution $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ zu invarianten Bildungen mit einer Variablenreihe zurück und gelangen dadurch, wie einfache Ueberlegungen zeigen, beziehungsweise in den vier Hauptfällen zu folgenden Ansätzen:

$$\textit{Hauptfall}\ \text{I:}\ \underset{y=x}{\Omega^\sigma} = C_0^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^\nu} + C_1^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-1}} + \cdots + C_\nu^{(2\nu-2\sigma)}$$
$$= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu)})_\sigma \qquad \begin{cases}\mu = 0, 1, \ldots, \nu, \\ \sigma = 0, 1, \ldots, \nu,\end{cases}$$

$$(44)\qquad \text{,,}\quad \text{II:}\ \underset{y=x}{\Omega^\sigma} = C_1^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-1}} + C_3^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-3}} + \cdots + C_\nu^{(2\nu-2\sigma)}$$
$$= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases}\mu = 0, 2, \ldots, \nu-1, \\ \sigma = 0, 2, \ldots, \nu-1,\end{cases}$$
$$= C_0^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^\nu} + C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-2}} + \cdots + C_{\nu-1}^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)}$$
$$= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases}\mu = 0, 2, \ldots, \nu-1, \\ \sigma = 1, 3, \ldots, \nu,\end{cases}$$

*) l. c. § 7 und § 8.

$$
\begin{aligned}
\textit{Hauptfall}\,\mathrm{III}:\ \underset{y=x}{\Omega^\sigma} &= C_0^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^\nu} + C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-2}} + \cdots + C_\nu^{(2\nu-} \\
&= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases}\mu = 0, 2, \ldots, \nu-2, \\ \sigma = 0, 2, \ldots, \nu,\end{cases} \\
&= C_1^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-1}} + C_3^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\nu-3}} + \cdots + C_{\nu-1}^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu} \\
(44)\qquad &= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases}\mu = 0, 2, \ldots, \nu-2, \\ \sigma = 1, 3, \ldots, \nu-1,\end{cases} \\
&= C_\nu^{(2\nu-2\sigma)} = (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma \qquad \sigma = 0, 2, \ldots, \nu, \\
\text{„}\quad \mathrm{IV}:\ \underset{y=x}{\Omega^\sigma} &= C_0^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\frac{\nu-1}{2}}} + C_1^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\mu)^{\frac{\nu-3}{2}}} + \cdots + C_{\frac{\nu-1}{2}}^{(2\nu-2\sigma)} \\
&= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases}\mu = 0, 2, \ldots, \nu-1, \\ \sigma = 1, 3, \ldots, \nu.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Die $C_\tau^{(\varrho)}$ bedeuten hierin rationale Covarianten von der Ordnung ϱ in den Variablen x_1, x_2 und vom Grade τ in den Coefficienten der Grundform f. Bemerkenswerth ist, dass zu ihrer Bestimmung und Darstellung durch übersichtliche invariante Bildungen allgemeinen Principien gemäss die Berechnung der Leitglieder d. h. der Coefficienten der höchsten Potenz von x_1 ausreicht.

In ähnlicher Weise wie die einfachen Ueberschiebungen lassen sich auch andere simultane Covarianten des Formensystems φ ausdrücken; so erhalten wir z. B. für den ersten Hauptfall das Product der Formen φ und ihrer Functionalinvariante, wenn wir aus der Simultancovariante mit 2ν Variablenreihen:

$$\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(0)}(y)\,\varphi^{(1)}(x)\,\varphi^{(1)}(y)\ldots\varphi^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(\nu)}(y) = \alpha_x^{(0)^\nu}\beta_y^{(0)^\nu}\alpha_x^{(1)^\nu}\beta_y^{(1)^\nu}\ldots\alpha_x^{(\nu)^\nu}\beta_y^{(\nu)^\nu}$$

die invariante Bildung:

$$\alpha_x^{(0)^\nu}\alpha_x^{(1)}\ldots\alpha_x^{(\nu)^\nu}(\beta^{(0)}\beta^{(1)})\,(\beta^{(1)}\beta^{(2)})\ldots(\beta^{(\nu-1)}\beta^{(\nu)})$$

ableiten und dieselbe als rationale Covariante der Grundform f darstellen. Doch erscheint ein weiteres Eingehen auf Fragen solcher Art an dieser Stelle nicht angebracht.

Was nun zunächst den ersten Hauptfall betrifft, so repräsentirt die entsprechende Formel in Tabelle (44) für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu$ und ein festes σ $\nu+1$ Gleichungen und es folgt somit durch Elimination von:

$$C_1^{(2\nu-2\sigma)},\ C_2^{(2\nu-2\sigma)},\ \ldots,\ C_\nu^{(2\nu-2\sigma)}$$

das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(0)^{\nu-1}}, \lambda^{(0)^{\nu-2}}, \ldots 1, (\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(0)^\nu} \\ \lambda^{(1)^{\nu-1}}, \lambda^{(1)^{\nu-2}}, \ldots 1, (\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(1)^\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdot \\ \lambda^{(\nu)^{\nu-1}}, \lambda^{(\nu)^{\nu-2}}, \ldots 1, (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\nu)^\nu} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir andererseits dieselbe Formel zuvor mit $\lambda^{(\mu)}$ und drücken dann $\lambda^{(\mu)^{\nu+1}}$ mittelst der determinirenden Gleichung (5) durch die niederen Potenzen von $\lambda^{(\mu)}$ aus, so folgt durch Elimination von:

$$C_2^{(2\nu-2\sigma)}, C_3^{(2\nu-2\sigma)}, \ldots, C_{\nu+1}^{(2\nu-2\sigma)}$$

das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(0)^{\nu-1}}, \lambda^{(0)^{\nu-2}}, \ldots 1, \lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\sigma - C_1^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(0)^\nu} \\ \lambda^{(1)^{\nu-1}}, \lambda^{(1)^{\nu-2}}, \ldots 1, \lambda^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_1^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(1)^\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdot \\ \lambda^{(\nu)^{\nu-1}}, \lambda^{(\nu)^{\nu-2}}, \ldots 1, \lambda^{(\nu)}(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma - C_1^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\nu)^\nu} \end{vmatrix}.$$

Die Entwickelung der erhaltenen Determinanten nach ihrer letzten Verticalreihe ergiebt schliesslich die beiden Relationen:

$$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_1} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = C_0^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{\lambda^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_1} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu)}(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = C_1^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, \nu,$$

wo allgemein $\Pi_\varkappa$ das Product der Differenzen von $\lambda^{(\varkappa)}$ mit den übrigen λ bedeutet. Im zweiten Hauptfalle erhalten wir in analoger Weise für ein gerades σ durch Elimination von:

$$C_3^{(2\nu-2\sigma)}, C_5^{(2\nu-2\sigma)}, \ldots, C_\nu^{(2\nu-2\sigma)}$$

die Relation:

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = C_1^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\sigma = 0, 2, \ldots, \nu - 1,$$

und für ein ungerades σ durch Elimination von:

$$C_2^{(2\nu-2\sigma)}, C_4^{(2\nu-2\sigma)}, \ldots, C_{\nu-1}^{(2\nu-2\sigma)}:$$

$$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = C_0^{(2\nu-2\sigma)}, \ \sigma = 1, 3, \ldots, \nu,$$

Für den dritten Hauptfall folgen nach entsprechender Behandlung unseres Gleichungssystems (44) die Relationen:

$$\frac{2(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{2(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{2(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma}{\Pi_{\nu-2}} + \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = C_0^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\sigma = 0, 2, \ldots, \nu,$$

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma}{\Pi_{\nu-2}} = C_1^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\sigma = 1, 3, \ldots, \nu-1,$$

und für den vierten Hauptfall endlich wird:

$$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\pi_0} + \frac{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\pi_2} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\pi_{\nu-1}} = C_0^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\pi_0} + \frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\pi_2} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\pi_{\nu-1}} = C_1^{(2\nu-2\sigma)},$$

$$\sigma = 1, 3, \ldots, \nu,$$

wo hier $\pi_\varkappa$ das Product der Differenzen der Wurzel $\lambda^{(\varkappa)}$ mit den übrigen λ von geradem Index bedeutet. Durch Berechnung irgend eines bequem gewählten Gliedes der Determinanten $\Delta(x, x, \lambda)$ resp. $\Delta\begin{pmatrix} x, y \\ p, q \end{pmatrix}\lambda$ erweist sich nun in allen vier Hauptfällen einerseits der Ausdruck $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$ für $\sigma = \nu$, andererseits der Ausdruck $C_1^{(2\nu-2\sigma)}$ für $\sigma = \nu - i$ als von Null verschieden. Es bedeutet somit $C_0^{(0)}$ eine endliche Zahl E, während $C_1^{(\varkappa)}$ der Grundform f proportional ausfällt. Berücksichtigen wir ferner, dass jene Ausdrücke für alle anderen Werthe von σ wegen der Unmöglichkeit invarianter Bildungen von entsprechenden Graden nothwendig identisch verschwinden müssen, so nehmen unsere obigen Formeln folgende definitive Gestalt an:

(45)

Hauptfall I: $$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_1} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = 0,$$

$$\sigma = 0, 2, \ldots, \nu - 2.$$

„ II: $$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = 0,$$

$$\sigma = 1, 3, \ldots, \nu - 2,$$

„ III: $$\frac{2(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{2(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{2(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma}{\Pi_{\nu-2}}$$

$$+ \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = 0, \quad \sigma = 0, 2, \ldots, \nu - 2,$$

$$(45)\quad \textit{Hauptf.}\,\mathrm{IV}:\ \frac{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\sigma}{\pi_0}+\frac{(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\sigma}{\pi_2}+\cdots+\frac{(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\sigma}{\pi_{\nu-1}}=0,$$
$$\sigma=1,3,\ldots,\nu-2,$$

und:

$$(46)\quad\begin{aligned}
&\textit{Hauptfall}\ \mathrm{I}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(0)})_\sigma+l^{(1)}(\varphi^{(1)},\varphi^{(1)})_\sigma+\cdots+l^{(\nu)}(\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_\sigma=0,\\
&\qquad\sigma=0,2,\ldots,\nu-i-2,\nu-i+2,\ldots,\nu,\\
&\quad\text{„}\ \ \mathrm{II}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\sigma+l^{(2)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\sigma+\cdots+l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\sigma=0,\\
&\qquad\sigma=0,2,\ldots,\nu-i-2,\nu-i+2,\ldots,\nu-1,\\
&\quad\text{„}\ \ \mathrm{III}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})+l^{(2)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\sigma+\cdots+l^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)},\varphi^{(\nu-1)})_\sigma=0,\\
&\qquad\sigma=1,3,\ldots,\nu-i-2,\nu-i+2,\ldots,\nu-1,\\
&\quad\text{„}\ \ \mathrm{IV}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\sigma+l^{(2)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_\sigma+\cdots+l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\sigma=0,\\
&\qquad\sigma=1,3,\ldots,\nu-i-2,\nu-i+2,\ldots,\nu,
\end{aligned}$$

und endlich:

$$(47)\quad\begin{aligned}
&\textit{Hauptfall}\ \mathrm{I}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(0)})_{\nu-i}+l^{(1)}(\varphi^{(1)},\varphi^{(1)})_{\nu-i}+\cdots+l^{(\nu)}(\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_{\nu-i}=f,\\
&\quad\text{„}\ \ \mathrm{II}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_{\nu-i}+l^{(2)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_{\nu-i}+\cdots+l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_{\nu-1}=f,\\
&\quad\text{„}\ \ \mathrm{III}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_{\nu-i}+l^{(2)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_{\nu-i}+\cdots+l^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)},\varphi^{(\nu-1)})_{\nu-i}=f,\\
&\quad\text{„}\ \ \mathrm{IV}: l^{(0)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_{\nu-i}+l^{(2)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_{\nu-i}+\cdots+l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_{\nu-i}=f.
\end{aligned}$$

In Tabelle (45) nehmen die Ausdrücke linker Hand für $\sigma=\nu$ einen endlichen Zahlenwerth E an und in den Tabellen (46) und (47) bedeutet allgemein $l^{(\varkappa)}$ eine dem Quotienten $\frac{\lambda^{(\varkappa)}}{\Pi_\varkappa}$ resp. $\frac{\lambda^{(\varkappa)}}{\pi_\varkappa}$ proportionale Constante.

Zugleich sei an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, dass man in analoger Weise wie $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$ und $C_1^{(2\nu-2\sigma)}$ auch die weiteren rationalen Covarianten $C_2^{(2\nu-2\sigma)}, C_3^{(2\nu-2\sigma)}, \ldots, C_\nu^{(2\nu-2\sigma)}$ durch Summen von der Form:

$$\sum\lambda^2(\varphi,\varphi)_\sigma,\ \sum\lambda^3(\varphi,\varphi)_\sigma,\ \ldots,\ \sum\lambda^\nu(\varphi,\varphi)_\sigma$$

ausdrücken kann, und wir werden später an Beispielen bestätigt finden, wie in der That ein Verfahren dieser Art zu bemerkenswerthen Darstellungen gewisser rationaler Covarianten der Grundform führt.

Die eben abgeleiteten Tabellen zeigen, dass zwischen den quadratischen Covarianten der Formen φ immer je zwei von einander unabhängige lineare Identitäten bestehen. Inwiefern dieselben in ihrer Gesammtheit das früher gefundene System invarianter Eigenschaften (41) in sich enthalten oder vervollständigen, ist auf Grund folgender Ueberlegungen zu entscheiden.

Wir verstehen unter φ, ψ, χ drei beliebige Formen ν^{ter} Ordnung und bestimmen die Zahl aller linear unabhängiger Simultancovarianten

von der Ordnung ν, welche die Coefficienten jeder einzelnen Form nur im ersten Grade enthalten. Die gesuchte Zahl ist nach bekannten Sätzen gleich der Differenz der Anzahl der Darstellungen der Zahl ν und der Zahl $\nu-1$ als Summe dreier Zahlen aus der Reihe: $0, 1, 2, \ldots, \nu$. Wir finden diese Anzahl gleich $\nu+1$ und schliessen daraus, dass zwischen irgend $\nu+2$ Covarianten der fraglichen Art etwa den Covarianten:

$$(\varphi,\chi)_\nu.\psi,\ (\varphi,(\psi.\chi))_\nu,\ (\varphi,(\psi,\chi)_1)_{\nu-1},\ldots,\varphi.(\psi,\chi)_\nu$$

allgemein eine lineare Relation mit Zahlencoefficienten besteht, welche die Gestalt:

$$(\varphi,\chi)_\nu.\psi = c_0(\varphi,(\psi.\chi))_\nu + c_1(\varphi,(\psi,\chi)_1)_{\nu-1} + \cdots + c_\nu\varphi.(\psi,\chi)_\nu$$

besitzen möge. Die Vertauschung von ψ und χ liefert eine zweite Formel, deren Combination mit der ursprünglichen die beiden Relationen:

$$\begin{aligned}(\varphi,\chi)_\nu.\psi+(\varphi,\psi)_\nu.\chi &= 2c_0(\varphi,(\psi.\chi))_\nu + 2c_2(\varphi,(\psi,\chi)_2)_{\nu-2}+\cdots,\\ (\varphi,\chi)_\nu.\psi-(\varphi,\psi)_\nu.\chi &= 2c_1(\varphi,(\psi,\chi)_1)_{\nu-1} + 2c_3(\varphi,(\psi,\chi)_3)_{\nu-3}+\cdots\end{aligned}\tag{48}$$

zur Folge hat. Bilden wir nun die $\nu-\sigma^{\text{te}}$ Ueberschiebung der Form $\varphi^{(\mu)}$ über die Formensummen linker Hand in den Tabellen (45), (46), (47) und multipliciren die entstandenen Gleichungen mit c_σ, so liefert die Summation für $\sigma = 0, 2, \ldots, \nu$ resp. $1, 3, \ldots, \nu$ mit Benutzung der Relationen (48) das Ergebniss:

$$\begin{aligned}
&\text{Hauptfall I:}\ \frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(0)}}{\Pi_0}+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(1)}}{\Pi_1}+\cdots+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu)}}{\Pi_\nu}\\
&\qquad = c_\nu E\varphi^{(\mu)},\\
&\quad\text{,,}\quad \text{II:}\ \frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(0)}}{\Pi_0}+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(1)}}{\Pi_1}+\cdots+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu-1)}}{\Pi_{\nu-1}}\\
&\qquad +\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu\varphi^{(\nu)}}{\Pi_\nu} = c_\nu E\varphi^{(\mu)},\\
&\quad\text{,,}\quad \text{III:}\ \frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(0)}}{\Pi_0}+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(1)}}{\Pi_1}+\cdots+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu\varphi^{(\nu-2)}}{\Pi_{\nu-2}}\\
&\qquad +\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-2)})_\nu\varphi^{(\nu-1)}}{\Pi_{\nu-1}}+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu)}}{\Pi_\nu} = c_\nu E\varphi^{(\mu)},\\
&\quad\text{,,}\quad \text{IV:}\ \frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(0)}-(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(1)}}{\pi_0}\\
&\qquad +\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(3)})_\nu\varphi^{(2)}-(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(2)})_\nu\varphi^{(3)}}{\pi_2}+\cdots\\
&\qquad \cdots+\frac{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu-1)}-(\varphi^{(\mu)},\varphi^{\nu-1})_\nu\varphi^{(\nu)}}{\pi_{\nu-1}} = c_\nu E\varphi^{(\mu)},
\end{aligned}\tag{49}$$

und:

$$\text{Hauptfall I:}\; l^{(0)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(0)}+l^{(1)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(1)}+\cdots+l^{(\nu)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu)} = c_{\nu-i}(\varphi^{(\mu)},f)_i,$$

$$\text{,, II:}\; l^{(0)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(0)}+l^{(1)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(1)}+\cdots$$
$$\cdots+l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu-1)}+l^{(\nu)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu\varphi^{(\nu)} = c_{\nu-i}(\varphi^{(\mu)},f)_i,$$

$$\text{,, III:}\; l^{(0)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(0)}+l^{(1)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(1)}+\cdots$$
$$\cdots+l^{(\nu-2)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu\varphi^{(\nu-2)}+l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-2)})_\nu\varphi^{(\nu-1)}$$
$$+l^{(\nu)}(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu)} = c_{\nu-i}(\varphi^{(\mu)},f)_i,$$

$$\text{,, IV:}\; l^{(0)}\left\{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(1)})_\nu\varphi^{(0)}-(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(0)})_\nu\varphi^{(1)}\right\}$$
$$+l^{(2)}\left\{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(3)})_\nu\varphi^{(2)}-(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(2)})_\nu\varphi^{(3)}\right\}+\cdots$$
$$\cdots+l^{(\nu-1)}\left\{(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu)})_\nu\varphi^{(\nu-1)}-(\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu\psi^{(\nu)}\right\} = c_{\nu-i}(\varphi^{(\mu)},f)_i,$$

oder mit Benutzung der Anfangs abgeleiteten invarianten Eigenschaften (41) des Formensystems φ:

$$
\begin{array}{llll}
& \text{Hauptfall I:}\; (\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\mu)})_\nu & = E'\Pi_\mu, & \mu=0,1,\ldots,\nu, \\
& \text{,, II:}\; (\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\mu+1)})_\nu & = E'\Pi_\mu, & \mu=0,2,\ldots,\nu-1, \\
(50) & \text{,, III:}\; (\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\mu+1)})_\nu & = E'\Pi_\mu, & \mu=0,2,\ldots,\nu-2, \\
& (\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_\nu & = E'\Pi_\nu, & \\
& \text{,, IV:}\; (\varphi^{(\mu)},\varphi^{(\mu+1)})_\nu & = E'\pi_\mu. & \mu=0,2,\ldots,\nu-1,
\end{array}
$$

und:

$$(51)\quad \text{Hauptfall I, II, III, IV:}\; (f,\varphi^{(\mu)})_i = E''\lambda^{(\mu)}\varphi^{(\mu)},\quad \mu=0,1,\ldots,\nu,$$

worin E', E'' andere von Null verschiedene Zahlen bedeuten. Der eben vollzogene Uebergang von dem Formelsystem (45), (46), (47) zu (50), (51) giebt zu Schlussfolgerungen von endgültiger Bedeutung Anlass. Zunächst sind die Formeln der Tabelle (50) desshalb interessant, weil sie die allein von Null verschiedenen quadratischen Invarianten der Formen φ in einfacher Weise als Function der Wurzeln λ darstellen. Unter Zuhülfenahme der früher gefundenen Relationen (43) zeigen sie ferner, dass für die ersten drei Hauptfälle das Quadrat der Functionalinvariante der Formen φ bis auf einen Zahlenfactor mit der Discriminante der determinirenden Gleichung und im vierten Hauptfalle jene Functionalinvariante selbst mit der Discriminante der durch Wurzelziehen reducirten determinirenden Gleichung übereinstimmt. Andererseits ist bemerkenswerth, dass die Existenz linearer Relationen zwischen den quadratischen Covarianten von der Art der Tabelle (45) für das Formensystem φ keine neuen Eigenschaften bedingt, sondern vielmehr nur das bekannte Bedingungssystem (41) bestätigt. Betrachten wir nämlich ein beliebiges System von $\nu+1$ Formen ν^{ter} Ordnung:

$$\varphi^{(\mu)}=\alpha_0^{(\mu)}x_1^\nu+\binom{\nu}{1}\alpha_1^{(\mu)}x_1^{\nu-1}x_2+\cdots+\alpha_\nu^{(\mu)}x_2^\nu,\quad \mu=0,1,\ldots,\nu,$$

für welches die invarianten Bedingungen (41) erfüllt sind, so folgt nach dem Multiplicationsgesetze der Determinanten:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & x_1^\nu & -x_1^{\nu-1}x_2 & \cdots & (-1)^\nu x_2^\nu \\ 0 & \alpha_\nu^{(0)} & \alpha_{\nu-1}^{(0)} & \cdots & \alpha_0^{(0)} \\ 0 & \alpha_\nu^{(1)} & \alpha_{\nu-1}^{(1)} & \cdots & \alpha_0^{(1)} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & \alpha_\nu^{(\nu)} & \alpha_{\nu-1}^{(\nu)} & \cdots & \alpha_0^{(\nu)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & y_2^\nu & \binom{\nu}{1}y_1y_2^{\nu-1} & \cdots & y_1^\nu \\ 0 & \alpha_0^{(0)} & -\binom{\nu}{1}\alpha_1^{(0)} & \cdots & (-1)^\nu\alpha_\nu^{(0)} \\ 0 & \alpha_0^{(1)} & -\binom{\nu}{1}\alpha_1^{(1)} & \cdots & (-1)^\nu\alpha_\nu^{(1)} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & \alpha_0^{(\nu)} & -\binom{\nu}{1}\alpha_1^{(\nu)} & \cdots & (-1)^\nu\alpha_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (x_1y_2-x_2y_1)^\nu & \varphi^{(0)}(x) & \varphi^{(1)}(x) & \cdots & \varphi^{(\nu)}(x) \\ \varphi^{(0)}(y) & (\varphi^{(0)},\varphi^{(0)})_\nu & (\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu & \cdots & (\varphi^{0},\varphi^{\nu})_\nu \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ \varphi^{(\nu)}(y) & (\varphi^{(\nu)},\varphi^{(0)})_\nu & (\varphi^{(\nu)},\varphi^{(1)})_\nu & \cdots & (\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_\nu \end{vmatrix}.$$

Durch Auswerthung der letzteren Determinante erhalten wir auf Grund der vorausgesetzten Beschaffenheit des Formensystems φ beziehungsweise in den vier Hauptfällen die Gleichungen:

Hauptfall I: $$\frac{\varphi^{(0)}(x)\varphi^{(0)}(y)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(0)})_\nu}+\frac{\varphi^{(1)}(x)\varphi^{(1)}(y)}{(\varphi^{(1)},\varphi^{(1)})_\nu}+\cdots+\frac{\varphi^{(\nu)}(x)\varphi^{(\nu)}(y)}{(\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_\nu}=(x_1y_2-x_2y_1)^\nu,$$

„ II: $$\frac{\varphi^{(0)}(x)\varphi^{(1)}(y)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu}-\frac{\varphi^{(0)}(y)\varphi^{(1)}(x)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu}+\cdots+\frac{\varphi^{(\nu-1)}(x)\varphi^{(\nu)}(y)}{(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\nu}-\frac{\varphi^{(\nu-1)}(y)\varphi^{(\nu)}(x)}{(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\nu}=(x_1y_2-x_2y_1)^\nu,$$

„ III: $$\frac{\varphi^{(0)}(x)\varphi^{(1)}(y)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu}+\frac{\varphi^{(0)}(y)\varphi^{(1)}(x)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu}+\cdots+\frac{\varphi^{(\nu-2)}(x)\varphi^{(\nu-1)}(y)}{(\varphi^{(\nu-2)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu}+\frac{\varphi^{(\nu-2)}(y)\varphi^{(\nu-1)}(x)}{(\varphi^{(\nu-2)},\varphi^{(\nu-1)})_\nu}+\frac{\varphi^{(\nu)}(x)\varphi^{(\nu)}(y)}{(\varphi^{(\nu)},\varphi^{(\nu)})_\nu}=\pm(x_1y_2-x_2y_1)^\nu,$$

„ IV: $$\frac{\varphi^{(0)}(x)\varphi^{(1)}(y)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu}-\frac{\varphi^{(0)}(y)\varphi^{(1)}(x)}{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_\nu}+\cdots+\frac{\varphi^{(\nu-1)}(x)\varphi^{(\nu)}(y)}{(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\nu}-\frac{\varphi^{(\nu-1)}(y)\varphi^{(\nu)}(x)}{(\varphi^{(\nu-1)},\varphi^{(\nu)})_\nu}=(x_1y_2-x_2y_1)^\nu.$$

Nach Anwendung des vorhin charakterisirten Differentiationssymbols Ω^{σ} auf diese Formeln und nachträglicher Rückkehr zu *einer* Variablenreihe x_1, x_2 erkennen wir in dem Ergebnisse unsere früheren Formeln der Tabelle (45) wieder. Umgekehrt zieht die Existenz der Relationen von der Art der Tabelle (45) das Bedingungssystem (41) nach sich. Benutzen wir nämlich die früher erwiesene Thatsache der linearen Unabhängigkeit der Formen φ, so folgt aus den Formeln (49) das Verschwinden der einzelnen mit jenen Formen φ multiplicirten Ausdrücke, d. h. ihrer bezüglichen ν^{ten} Ueberschiebungen, wie es das Bedingungssystem (41) verlangt. Das Verschwinden jener quadratischen Invarianten und die Existenz der Relationen von der Art der Tabelle (45) repräsentiren mithin für unsere Formen φ zwei Bedingungssysteme, welche sich nicht ergänzen, sondern vielmehr einander völlig äquivalent sind. Anders verhält es sich mit dem Bedingungssystem in Tabelle (46), welches jedes der früheren Systeme genau vervollständigt. Wie nämlich der Uebergang zu den Formeln (51) lehrt, reicht die Hinzufügung dieses Systems für die Formen φ hin, damit dieselben im fraglichen Sinne einer Grundform f zugehören. Wir gewinnen auf diese Weise das Ergebniss:

Verschwinden für ein System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen φ ν^{ter} Ordnung alle quadratischen Invarianten mit Ausnahme der beziehungsweise in Tabelle (42) *angegebenen, so bestehen gleichzeitig zwischen den quadratischen Covarianten des Formensystems beziehungsweise lineare Relationen von der Art der Tabelle* (45) *und umgekehrt. Existiren ferner für dasselbe Formensystem obenein beziehungsweise $\nu+1$, $\frac{\nu+1}{2}$, $\frac{\nu}{2}$, $\frac{\nu+1}{2}$ Constante l von der Art, dass zwischen den quadratischen Covarianten die linearen Beziehungen in Tabelle* (46) *stattfinden, dann und nur dann gehört das Formensystem φ im Sinne der Bedingungsgleichung* (4) *einer Grundform f von der Ordnung $n=2i$ zu. Die Grundform f erhält man beziehungsweise aus den Formeln der Tabelle* (47), *während die irrationalen Invarianten λ den Constanten l sowie den entsprechenden Invarianten $(\varphi, \varphi)_\nu$ von endlichem Werthe proportional ausfallen.*

Was die Anzahl der Bedingungen für unser Formensystem φ betrifft, so steht das eben gewonnene Resultat mit der directen Constantenabzählung in bestem Einklange. Beachten wir nämlich, dass bei unserem Verfahren alle nur um constante Factoren differirenden Formen φ zu der gleichen Grundform f Anlass geben und ausserdem im vierten Hauptfalle jede Form durch eine beliebige Form des entsprechenden Büschels ersetzbar ist, so haben wir für das System von $\nu+1$ Formen ν^{ter} Ordnung in den ersten drei Hauptfällen $\nu(\nu+1)$, im vierten Hauptfalle nur $(\nu-1)(\nu+1)$ verfügbare Constanten in

Anrechnung zu bringen. Das Bedingungssystem (41) enthält nun offenbar in den vier Hauptfällen resp. $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2}$, $\frac{\nu(\nu+2)}{2}$, $\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2}$ einfache Bedingungen, und betreffs des zweiten Bedingungssystems (46) zeigt eine leichte Ueberlegung, dass dasselbe resp. mit $\frac{\nu(\nu+1)}{2}-(2i+1)$, $\frac{(\nu+1)^2}{2}-(2i+1)$, $\frac{\nu^2}{2}-(2i+1)$, $\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2}-(2i+1)$ einfachen Bedingungen äquivalent ist. Die Anzahl der noch willkürlichen Parameter des Formensystems φ ist somit beziehungsweise:

$$\text{Hauptfall I: } \nu(\nu+1)-\frac{\nu(\nu+1)}{2}-\left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}-(2i+1)\right\}=2i+1,$$

$$\text{„ II: } \nu(\nu+1)-\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2}-\left\{\frac{(\nu+1)^2}{2}-(2i+1)\right\}=2i+1,$$

$$\text{„ III: } \nu(\nu+1)-\frac{\nu(\nu+2)}{2}-\left\{\frac{\nu^2}{2}-(2i+1)\right\}=2i+1,$$

$$\text{„ IV: } (\nu-1)(\nu+1)-\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2}-\left\{\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2}-(2i+1)\right\}=2i+1,$$

und stimmt in der That für alle vier Hauptfälle mit der Coefficientenzahl einer Grundform f von der Ordnung $n=2i$ überein.

Das am Schlusse der Einleitung gekennzeichnete Problem verlangt nunmehr zu seiner völligen Erledigung nur noch das Studium der möglichen Ausartungen und speciellen Vorkommnisse.

§ 4.

Die Ausartungen des Formensystems φ.

Die Construction eines vollständigen Formensystems φ ist in der oben beschriebenen Weise offenbar nur dann durchführbar, sobald einerseits die $\nu+1$ Wurzeln λ der determinirenden Gleichung, von ihrer paarweisen Gleichheit im vierten Hauptfalle abgesehen, unter einander verschieden ausfallen, andererseits die covariante Determinante (18) resp. (30) für keinen jener Wurzelwerthe λ identisch verschwindet. Das Zusammenfallen von Wurzelwerthen λ sowie das identische Verschwinden jener irrationalen Covariante bedingen dementsprechend Vorkommnisse besonderer Art, die in ihrer Gesammtheit um so mehr eines eingehenden Studiums bedürfen, als dieselben ein gefügiges und rationelles Mittel zur Untersuchung der Ausartungen der Grundform f selber an die Hand geben.

Um bei der Mannigfaltigkeit der zu berücksichtigenden Ausnahmefälle befriedigende Vollständigkeit zu erzielen, erweisen sich zuvor einige Hülfsbetrachtungen bezüglich einer Verallgemeinerung der Determinantenbildung (18) als unerlässlich. Zu Bildungen dieser Art führt eine Modification der früheren Formulirung und Behandlungsweise unseres Problems, indem wir nunmehr die weitergreifende Frage nach den Formen ψ_τ mit den Bedingungen:

$$
(52) \qquad \begin{gathered}
(f, \psi_\tau)_i - \lambda \psi_\tau + u(yx)^\nu + u^{(1)}(y^{(1)}x)^\nu + \cdots + u^{(\tau)}(y^{(\tau)}x)^\nu = 0, \\
\psi_\tau(x^{(1)}) = 0,\ \psi_\tau(x^{(2)}) = 0, \ldots, \psi_\tau(x^{(\tau)}) = 0,
\end{gathered}
$$

aufwerfen, wobei:

$$
x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_1^{(\tau)}, x_2^{(\tau)}, y_1^{(1)} y_2^{(1)}, \ldots, y_1^{(\tau)} y_2^{(\tau)}
$$

gegebene Grössen, $u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\tau)}$ dagegen verfügbare Constanten bedeuten. Betrachten wir dann allgemein die durch $\pi + 1$ fache Ränderung aus $\Delta(\lambda)$ hervorgehende Determinantenbildung:

$$
(53) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{vmatrix}
k_0^0 a_{i-\nu}, & k_1^0 a_{i-\nu+1}, & \ldots\ k_\nu^0 a_i - \lambda, & y_2^\nu, & \ldots & y_2^{(\pi)^\nu} \\
k_0^1 a_{i-\nu+1}, & k_1^1 a_{i-\nu+2}, & \ldots\ k_\nu^1 a_{i+1}, & -\binom{\nu}{1} y_1 y_2^{\nu-1}, & \ldots & -\binom{\nu}{1} y_1^{(\pi)} y_2^{(\pi)^{\nu-1}} \\
\cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
k_0^\nu a_i - (-1)^\nu \lambda, & k_1^\nu a_{i+1}, & \ldots\ k_\nu^\nu a_{i+\nu}, & (-1)^\nu y_1^\nu, & \cdots & (-1)^\nu y_1^{(\pi)^\nu} \\
x_2^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1 x_2^{\nu-1}, & \cdots (-1)^\nu x_1^\nu, & 0, & \ldots & 0, \\
x_2^{(1)^\nu}, & -\binom{\nu}{1} x_1^{(1)} x_2^{(1)^{\nu-1}}, & \cdots (-1)^\nu x_1^{(1)^\nu}, & 0, & \ldots & 0, \\
\cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
x_2^{(\pi)^\nu}, & -\binom{\nu}{1} x_1^{(\pi)} x_2^{(\pi)^{\nu-1}}, & \cdots (-1)^\nu x_1^{(\pi)^\nu}, & 0, & \ldots & 0,
\end{vmatrix},
$$

so ergeben sich nach einfachen und schon früher angewandten Determinantensätzen für die Form ψ_τ und die Constanten u_τ, von einem willkürlichen Proportionalitätsfactor abgesehen, die folgenden Ausdrücke:

$$\psi_\tau = \Delta \begin{vmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \\ x^{(2)}, & y^{(2)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)}, & y^{(\tau)} & \end{vmatrix}, \qquad u_\tau = \Delta \begin{pmatrix} x^{(1)}, & y^{(1)} & \\ x^{(2)}, & y^{(2)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)}, & y^{(\tau)} & \end{pmatrix},$$

$$u_\tau^{(1)} = \Delta \begin{pmatrix} x^{(1)}, & y & \\ x^{(2)}, & y^{(2)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)}, & y^{(\tau)} & \end{pmatrix}, \ldots \; u_\tau^{(\tau)} = \Delta \begin{pmatrix} x^{(1)}, & y & \\ x^{(2)}, & y^{(1)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)}, & y^{(\tau-1)} & \end{pmatrix}.$$

Da die Gleichung (52) durch Einsetzung dieser Werthe für ψ_τ, u_τ, $u_\tau^{(1)}, \ldots, u_\tau^{(\tau)}$ identisch erfüllt sein muss, so ist eine σ-malige Differentiation derselben nach λ gestattet, und wir erhalten dadurch die weitere Beziehung:

$$(54) \quad \left(f, \frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^\sigma}\right)_i - \lambda \frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^\sigma} - \sigma \frac{\partial^{\sigma-1} \psi_\tau}{\partial \lambda^{\sigma-1}} + \frac{\partial^\sigma u_\tau}{\partial \lambda^\sigma} (y x)^\nu + \frac{\partial^\sigma u_\tau^{(1)}}{\partial \lambda^\sigma} (y^{(1)} x)^\nu + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial^\sigma u_\tau^{(\tau)}}{\partial \lambda^\sigma} (y^{(\tau)} x)^\nu = 0.$$

Der invariante Charakter unserer allgemeinen Determinantenbildung (53) lässt sich durch ähnliche Schlüsse und Ueberlegungen erweisen, wie sie oben zum Nachweise der gleichen Thatsache für die Determinanten (6) und (18) nöthig waren; es gilt demnach der Satz:

Nach Entwickelung der Determinante in Potenzen von λ, wie folgt:

$$\Delta \begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix} = C_0 \lambda^{\nu-\pi} + C_1 \lambda^{\nu-\pi-1} + \cdots + C_{\nu-\pi}$$

bedeuten die Coefficienten $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$ rationale Covarianten von der Ordnung ν für jede der $2(\pi+1)$ Variablenreihen:

$$x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; x_1^{(1)}, x_2^{(1)};\; y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\; \ldots;\; x_1^{(\pi)}, x_2^{(\pi)};\; y_1^{(\pi)}, y_2^{(\pi)},$$

dagegen resp. vom Grade $0, 1, \ldots, \nu - \pi$ in den Coefficienten der Grundform f.

Es erübrigt noch, die nach λ genommenen Differentialquotienten unserer allgemeinen Determinante (53) mit gewissen einfachen Invariantenbildungen derselben in Zusammenhang zu bringen. Schreiben wir zu dem Zwecke jene Determinante allein als Form des Variablenpaares $x_2, x_2;\ y_1, y_2$ betrachtet, in der Gestalt:

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix} = -\sum^{\iota,\varkappa}\binom{\nu}{\iota}\binom{\nu}{\varkappa}\Delta_\iota^\varkappa\, x_1^{(\iota)} x_2^{(\nu-\iota)}\, y_1^{(\varkappa)} y_2^{(\nu-\varkappa)}$$
$$= A_{x^{(1)}\dots x^{(\pi)}}\, B_{y^{(1)}\dots y^{(\pi)}}\, \alpha_x^\nu\, \beta_y^\nu,$$

so stellt der Ausdruck:

$$(55)\qquad -\sum^{\varkappa}(-1)^\varkappa\binom{\nu}{\varkappa}\Delta_{\nu-\varkappa}^\varkappa = A_{x^{(1)}\dots x^{(\pi)}}\, B_{y^{(1)}\dots y^{(\pi)}}\, (\alpha\beta)^\nu$$

eine Invariante dar, welche nur noch die übrigen Variablen:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)};\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ \dots;\ x_1^{(\pi)}, x_2^{(\pi)};\ y_1^{(\pi)}, y_2^{(\pi)}$$

enthält. Die in der Summe zur Verwendung gelangte Bezeichnung $\Delta_\iota^\varkappa$ bedeutet, wie man erkennt, allgemein die auf das Element $k_\iota^\varkappa\, a_{i-\nu+\varkappa+\iota}$ bezügliche Unterdeterminante der Determinante $\Delta\begin{pmatrix} x^{(1)}, & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix}$.

Andererseits setzen wir nun in der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots, (\nu+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe der letzteren Determinante für λ beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ ein und ertheilen unter Vermittelung der so erhaltenen Determinante Δ' dem nach λ genommenen Differentialquotienten der ursprünglichen Determinante die Gestalt:

$$(56)\qquad \frac{\partial\Delta\begin{pmatrix} x^{(1)}, & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix}}{\partial\lambda} = \left[\frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda_0} + \frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda_1} + \dots + \frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda_\nu}\right]_{\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_\nu=\lambda}.$$

Zufolge der Beziehungen:

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu+1}\Delta' &= \lambda_0\Delta_\nu^0 + \cdots \\ &= -\binom{\nu}{1}\lambda_1\Delta_{\nu-1}^1 + \cdots \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (-1)^\nu\,\lambda_\nu\Delta_0^\nu + \cdots \end{aligned}$$

erkennen wir, vom Vorzeichen abgesehen, die Uebereinstimmung der rechten Seite von Formel (55) mit der linken Seite in Formel (56) und gewinnen damit das Resultat:

$$\frac{\partial \Delta \begin{pmatrix} x^{(1)}, & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix}}{\partial \lambda} = (-1)^{\nu} A_{x^{(1)} \ldots x^{(\pi)}} B_{y^{(1)} \ldots y^{(\pi)}} (\alpha \beta)^{\nu},$$

dessen σ-malige Anwendung zu dem allgemeinen Satze führt:

Schreiben wir die Determinante (53), *allein als Form der Variablenpaare:*

$$x_1, x_2; y_1, y_2; x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y_1^{(1)}, y_2^{(1)}; \ldots; x_1^{(\sigma-1)}, x_2^{(\sigma-1)}; y_1^{(\sigma-1)}, y^{(\sigma-1)}$$

betrachtet, in der symbolischen Gestalt:

$$\Delta \begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix} = A_{x^{(\sigma)} \ldots x^{(\pi)}} B_{y^{(\sigma)} \ldots y^{(\pi)}} \alpha_x^{\nu} \beta_y^{\nu} \alpha_{x^{(1)}}^{(1)^{\nu}} \beta_{y^{(1)}}^{(1)^{\nu}} \cdots \alpha_{x^{(\sigma-1)}}^{(\sigma-1)^{\nu}} \beta_{y^{(\sigma-1)}}^{(\sigma-1)^{\nu}},$$

so gilt für die lineare Invariante dieser Form die Relation:

$$(57) \qquad A_{x^{(\sigma)} \ldots x^{(\pi)}} B_{y^{(\sigma)} \ldots y^{(\pi)}} (\alpha \beta)^{\nu} (\alpha^{(1)} \beta^{(1)})^{\nu} \cdots (\alpha^{(\sigma-1)} \beta^{(\sigma-1)})^{\nu}$$

$$= (-)^{\nu \sigma} \frac{\partial^{\sigma} \Delta \begin{pmatrix} x^{(\sigma)}, & y^{(\sigma)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda \\ x^{(\pi)}, & y^{(\pi)} & \end{pmatrix}}{\partial \lambda}.$$

Nach diesen einleitenden Betrachtungen wenden wir uns der vorhin in Aussicht gestellten Untersuchung zu, indem wir zur leichteren Orientirung in der Gesammtheit aller möglichen Ausartungen des Formensystems φ drei Gattungen unterscheiden, die in der angewandten Reihenfolge den Fortschritt von der einfacheren zur zusammengesetzteren Ausartung erkennen lassen.

An erster Stelle behandeln wir den Fall der blossen Existenz einer $(\varrho + 1)$-maligen Wurzel $\lambda^{(0)}$; *derselbe besitzt die charakteristischen Criterien:*

$$(58) \quad \Delta(\lambda^{(0)}) = 0, \quad \frac{\partial \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \cdots, \frac{\partial^{\varrho} \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} = 0, \quad \frac{\partial^{\varrho+1} \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)\varrho+1}} \neq 0,$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) \neq 0.$$

Da die letztere Determinante $\Delta(x, y, \lambda^{(0)})$ nach den Ausführungen auf pag. 395 im vierten Hauptfalle stets identisch verschwindet, so bleibt die in Rede stehende Ausartung in der verlangten Reinheit ausschliesslich den drei ersten Hauptfällen vorbehalten. Die obigen Criterien liegen irrational vor, lassen sich jedoch auf einfache Weise in eine rationale Gestalt umsetzen, sobald wir zwischen den invarianten Coefficienten $J_0, J_2, \ldots, J_{\nu}$ der determinirenden Gleichung (5) die Bedingungs-

gleichungen für das Statthaben einer $\varrho + 1$-fachen Wurzel aufstellen. So genügt beispielsweise zur Charakterisirung unserer Ausartung für $\varrho = 1$ das Verschwinden der Discriminante der determinirenden Gleichung.

Was nun die Bedeutung des gekennzeichneten Ausnahmefalles betrifft, so finden wir unter Benutzung der charakteristischen Criterien (58) aus Formel (54) für $\tau = 0$, $\sigma = 0, 1, \ldots, \varrho$ und $\lambda = \lambda^{(0)}$ das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l|l}
(f, \psi_0)_i = \lambda^{(0)} \psi_0 & \psi_0 = \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) \\
\left(f, \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}}\right)_i = \lambda^{(0)} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} + \psi_0 & \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} = \dfrac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} \\
\left(f, \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}}\right)_i = \lambda^{(0)} \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}} + 2 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} & \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}} = \dfrac{\partial^2 \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)2}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\left(f, \dfrac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}}\right)_i = \lambda^{(0)} \dfrac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} + \varrho \dfrac{\partial^{\varrho-1} \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho+1}} & \dfrac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} = \dfrac{\partial^\varrho \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)\varrho}},
\end{array}$$

wobei die rechter Hand definirten Formen:

$$\psi_0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}}, \quad \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}}, \ldots, \frac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}}$$

als Function des Variablenpaares x_1, x_2 und eines Parameterpaares y_1, y_2 zu betrachten sind. Die Form ψ_0 ist wesentlich nichts anderes als die früher benannte Form $\varphi^{(0)}$ und für die übrigen Formen der obigen Reihe kann die Variation des Parameterpaares y_1, y_2 nur innerhalb gewisser Grenzen von Einfluss sein, wie dieselben in folgendem Ansatze zum Ausdruck gelangen:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \psi^{(0)}(x)\, \chi^{(0)}(y), \\
\frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} &= \psi^{(1)}(x)\, \chi^{(0)}(y) + \psi^{(0)}(x)\, \chi^{(1)}(y), \\
\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}} &= \psi^{(2)}(x)\, \chi^{(0)}(y) + \psi^{(1)}(x)\, \chi^{(1)}(y) + \psi^{(0)}(x)\, \chi^{(2)}(y), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{\varrho!} \frac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} &= \psi^{(\varrho)}(x)\, \chi^{(0)}(y) + \psi^{(\varrho-1)}(x)\, \chi^{(1)}(y) + \cdots + \psi^{(0)}(x)\, \chi^{(\varrho)}(y).
\end{aligned}$$

Es ist damit ein System von Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ definirt, für welches das obige Gleichungssystem die Gestalt annimmt:

$$
\begin{aligned}
&(f,\psi^{(0)})_i=\lambda^{(0)}\psi^{(0)}\\
&(f,\psi^{(1)})_i=\lambda^{(0)}\psi^{(1)}+\psi^{(0)}\\
&(f,\psi^{(2)})_i=\lambda^{(0)}\psi^{(2)}+\psi^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&(f,\psi^{(\varrho)})_i=\lambda^{(0)}\psi^{(\varrho)}+\psi^{(\varrho-1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta(x,y,\lambda^{(0)})=\psi^{(0)}(x)\chi^{(0)}(y)\\
&\frac{\partial\Delta(x,y,\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}}=\psi^{(1)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(0)}(x)\chi^{(1)}(y)\\
(59)\quad&\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Delta(x,y,\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)^2}}=\psi^{(2)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(1)}(x)\chi^{(1)}(y)+\varphi^{(0)}(x)\chi^{(2)}(y)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{\varrho!}\frac{\partial^\varrho\Delta(x,y,\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)^\varrho}}=\psi^{(\varrho)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(\varrho-1)}(x)\chi^{(1)}(y)+\cdots+\psi^{(0)}(x)\chi^{(\varrho)}(y).
\end{aligned}
$$

Mit Rücksicht auf das Statthaben eines solchen kettenähnlichen Algorithmus möge die Formenreihe $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ die ϱ-fache Fortsetzung der Form $\psi^{(0)}=\varphi^{(0)}$ genannt werden, und es gilt dann der Satz:

Die den Criterien (58) *entsprechende Ausartung bedingt für die Form* $\varphi^{(0)}$ *die Existenz einer* ϱ*-fachen Fortsetzung, deren Repräsentanten* $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ *durch die Gleichungen* (59) *definirt sind.*

Betreffs der Formen χ sei noch bemerkt, dass dieselben zu keinen neuen Formbildungen Anlass geben, sondern beziehungsweise mit den Formen ψ wesentlich äquivalent erscheinen. Da jedoch ein näheres Eingehen auf diesen Punkt eine Unterscheidung zwischen den drei Hauptfällen erfordert, so sei hier der Kürze halber nur auf die Beispiele im folgenden Paragraphen verwiesen.

Die Umkehrung obiger Schlussfolgerungen lehrt ferner, *dass die Existenz jener* ϱ*-fachen Fortsetzung auch ihrerseits die charakteristischen Criterien* (58) *unserer Ausartung als erfüllt voraussetzt.*

Indem wir somit die nothwendigen Folgen und hinreichenden Ursachen der in Rede stehenden Ausartung zur Untersuchung gebracht haben, ist in den Formen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ gleichzeitig ein genügender Ersatz für die offenbar in Wegfall kommenden Formen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(\varrho)}$ des allgemeinen Falles beschafft. Eine einfache Ueberlegung zeigt nämlich, dass sämmtliche für die Formen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(\varrho)}$ als Theil des Formensystems φ gültigen Theoreme des allgemeinen Falles nach geringen Modificationen die Uebertragung auf die Formen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ gestatten. Ohne jedoch die Schlussfolgerungen des vorigen Paragraphen unter den so veränderten Verhältnissen mit genauer Unterscheidung der einzelnen Hauptfälle zu wiederholen, mögen an dieser Stelle nur folgende Hauptpunkte Erwähnung finden.

Die $\nu+1$ *Formen* $\psi^{(0)}=\varphi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}, \varphi^{(\varrho+1)}, \varphi^{(\varrho+2)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ *bilden ein System linear von einander unabhängiger Formen* ν^{ter} *Ordnung.*

Die ν^{ten} Ueberschiebungen einer Form ψ mit jeder zu einer einfachen Wurzel $\lambda^{(\varkappa)}$ gehörigen Form $\varphi^{(\varkappa)}$ verschwinden, während für die ν^{ten} Ueberschiebungen der Formen ψ unter einander Relationen gelten, deren Gestalt von der Eigenart des betrachteten Hauptfalles abhängt.

Zur Uebertragung der weiteren Theoreme des allgemeinen Falles haben wir nur nöthig, an Stelle der Formeln (21), (22), (24) für $\mu = 0, 1, \ldots, \varrho$ die $\varrho + 1$ Definitionsgleichungen (59) der Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ einzufügen und dann die frühere Kette von Schlussfolgerungen zu wiederholen. Den Formeln (46), (47) des allgemeinen Falles entsprechend, gelangen wir auf diese Weise *zu linearen Relationen zwischen den quadratischen Covarianten des Formensystems ψ, φ, welche einerseits zur vollständigen Charakterisirung desselben als eines Formensystems der verlangten Ausartung dienen, andererseits die Darstellung der entsprechend ausgearteten Grundform f sowie gewisser rationaler Covarianten derselben ermöglichen.* Die Beispiele im fünften Paragraphen werden unsere Behauptungen bestätigen.

Während der eben erledigte Ausnahmefall durch die Existenz gewisser Relationen zwischen *Invarianten* der Grundform charakterisirt werden konnte, begreift die zweite Gattung von Ausartungen solche Vorkommnisse, welche beim identischen Verschwinden der zur Construction des Formensystems φ dienenden *covarianten* Gebilde zu Tage treten. Um diese Gattung von Ausartungen von vornherein im allgemeinsten Sinne aufzufassen, setzen wir das Bestehen der Identitäten:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0,\ \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \end{pmatrix} = 0, \ldots, \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ x^{(r-1)}, & y^{(r-1)} & \end{pmatrix} = 0$$

voraus. Betrachten wir nun die Determinanten linker Hand als Formen resp. mit $2, 4, \ldots, 2r$ Variablenreihen, so werden offenbar sämmtliche Invarianten dieser Formen und damit wegen der Relation (57) für $\pi = \sigma - 1$ und $\sigma = 1, 2, \ldots, r$ gleichzeitig die r ersten nach $\lambda^{(0)}$ genommenen Differentialquotienten der Determinante $\Delta(\lambda^{(0)})$ verschwinden d. h. $\lambda^{(0)}$ ist unter der zu Grunde gelegten Annahme eine $r+1$-fache Wurzel der determinirenden Gleichung. Nach Ausschliessung einer höheren Vielfachheit der Wurzel $\lambda^{(0)}$ *erhalten wir in dem Bedingungssystem:*

$$(60)\quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0,\ \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \end{pmatrix} = 0, \ldots, \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ x^{(r-1)}, & y^{(r-1)} & \end{pmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial^{r+1}\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial {\lambda^{(0)}}^{r+1}} \neq 0$$

die charakteristischen Criterien der in Rede stehenden Ausartung.

Bemerkt sei noch, dass in der Reihe der Determinantenbildungen:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}), \quad \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \end{pmatrix}, \ldots$$

das identische Verschwinden irgend einer unter ihnen zugleich das Verschwinden aller vorhergehenden Bildungen mit sich bringt, und es wird daher beispielsweise bei Umsetzung der oben irrational vorliegenden Criterien in rationale Gestalt nur die letzte der aufgeführten Identitäten der Berücksichtigung bedürfen.

Um die Bedeutung des gekennzeichneten Ausnahmefalles zu erkennen, bedienen wir uns der pag. 415 gewonnenen Mittel. Das Gleichungssystem (52) repräsentirt für $\tau = r$ $r + \nu + 1$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der $\nu + 1$ Coefficienten der Grundform ψ_r und der weiteren Unbekannten $u, u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$. Die Determinante des Systems ist jedenfalls von Null verschieden, da das identische Verschwinden derselben nach Formel (57) für $\pi = r$, $\sigma = r + 1$ gleichzeitig das Verschwinden des $r + 1^{\text{ten}}$ nach $\lambda^{(0)}$ genommenen Differentialquotienten der Determinante $\Delta(\lambda^{(0)})$ zur Folge hat und dadurch mit unserer obigen Annahme in Widerspruch geräth. Die Lösungen unseres Gleichungssystems sind mithin eindeutig bestimmt, und zwar ergeben sich für die Unbekannten $u, u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$ wegen Bestehens der charakteristischen Criterien (60) die Werthe Null, nach deren Einsetzung unser Gleichungssystem in das folgende übergeht:

$$\begin{aligned} &(f, \psi_r)_i = \lambda^{(0)} \psi_r, \\ &\psi_r(x^{(1)}) = 0, \ \psi_r(x^{(2)}) = 0, \ldots, \psi_r(x^{(r)}) = 0. \end{aligned}$$

Wir ersehen daraus, dass in dem Ausdrucke für die gesuchte Form:

$$\psi_r = \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(r)}, & y^{(r)} & \end{pmatrix}$$

die Variation der Parameter $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}$ gar keinen wesentlichen Einfluss zeigen, dagegen die Variation der Parameter $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ nur eine Vertauschung zwischen Formen einer bestimmten r-fach unendlichen linearen Mannigfaltigkeit bewirken kann. Bedienen wir uns des somit berechtigten Ansatzes:

$$\psi_r = \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(r)}, & y^{(r)} & \end{pmatrix} = \{\psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) + \psi^{(1)}(x)\psi^{(1)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) + \cdots \\ \cdots + \psi^{(r)}(x)\psi^{(r)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)})\} \, \chi(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}),$$

so liefern die entsprechenden Schlüsse, wie sie bei Behandlung des allgemeinen vierten Hauptfalles auf pag. 397 durchgeführt sind, das Ergebniss:

$$(61)\qquad \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(r)}, & y^{(r)} & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \psi^{(0)}(x) & \psi^{(1)}(x) & \cdots \psi^{(r)}(x) \\ \psi^{(0)}(x^{(1)}) & \psi^{(1)}(x^{(1)}) & \cdots \psi^{(r)}(x^{(1)}) \\ . & . & \cdots\ . \\ \psi^{(0)}(x^{(r)}) & \psi^{(1)}(x^{(r)}) & \cdots \psi^{(r)}(x^{(r)}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi^{(0)}(y) & \chi^{(1)}(y) & \cdots \chi^{(r)}(y) \\ \chi^{(0)}(y^{(1)}) & \chi^{(1)}(y^{(1)}) & \cdots \chi^{(r)}(y^{(1)}) \\ . & . & \cdots\ . \\ \chi^{(0)}(y^{(r)}) & \chi^{(1)}(y^{(r)}) & \cdots \chi^{(r)}(y^{(r)}) \end{vmatrix},$$

wo von den Formen χ wiederum das beim ersten Ausnahmefall pag. 420 Bemerkte gilt. Um die gewonnenen Resultate zusammenzufassen, sprechen wir den Satz aus:

Die den charakteristischen Criterien (60) *entsprechende Ausartung zweiter Gattung bewirkt, dass der Wurzel $\lambda^{(0)}$ im Sinne unseres Problems jede Form einer r-fach unendlichen linearen Formenmannigfaltigkeit zugehört. Die letztere ist durch Formel* (61) *definirt.*

Durch Umkehrung der früheren Schlüsse ist leicht ersichtlich, *dass auch stets unsere Criterien* (60) *erfüllt sind, sobald dem Wurzelwerthe $\lambda^{(0)}$ eine r-fach lineare Mannigfaltigkeit von Formen und nur eine solche zugehört.* Es ist ferner klar, dass die Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$ für die in Wegfall kommenden Formen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$ des allgemeinen Falles auch in jeder anderen Hinsicht ausreichenden Ersatz bieten werden. *Zunächst erweisen sich nämlich die $\nu+1$ Formen:*

$$\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}, \varphi^{(r+1)}, \varphi^{(r+2)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$$

als linear unabhängig, während ihre ν^{ten} Ueberschiebungen theils Null, theils durch die Wurzelwerthe λ in einfacher Weise darstellbar sind.

Um jedoch auch für die weiteren Theoreme des allgemeinen Falles eine Uebertragung zu ermöglichen, betrachten wir das Determinantenproduct rechter Hand in Formel (61) als Form mit $2(r+1)$ Variablenreihen, wie folgt:

$$\begin{vmatrix} \psi^{(0)}(x) & \psi^{(1)}(x) & \cdots \psi^{(r)}(x) \\ \psi^{(0)}(x^{(1)}) & \psi^{(1)}(x^{(1)}) & \cdots \psi^{(r)}(x^{(1)}) \\ . & . & \cdots\ . \\ \psi^{(0)}(x^{(r)}) & \psi^{(1)}(x^{(r)}) & \cdots \psi^{(r)}(x^{(r)}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi^{(0)}(x) & \chi^{(1)}(x) & \cdots \chi^{(r)}(x) \\ \chi^{(0)}(x^{(1)}) & \chi^{(1)}(x^{(1)}) & \cdots \chi^{(r)}(x^{(1)}) \\ . & . & \cdots\ . \\ \chi^{(0)}(x^{(r)}) & \chi^{(1)}(x^{(r)}) & \cdots \chi^{(r)}(x^{(r)}) \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_x^\nu \beta_y^\nu\, \alpha_{x^{(1)}}^{(1)\nu} \beta_{y^{(1)}}^{(1)\nu} \cdots \alpha_{x^{(r)}}^{(r)\nu} \beta_{y^{(r)}}^{(r)\nu}.$$

Auf Grund der Formel (57) erhalten wir dann *die bemerkenswerthen Gleichungen:*

$$
\begin{aligned}
&\alpha_x^\nu \beta_y^\nu \cdots \alpha_{x^{(r-1)}}^{(r-1)^\nu} \beta_{y^{(r-1)}}^{(r-1)^\nu} (\alpha^{(r)} \beta^{(r)})^\nu &&= \frac{\partial \Delta \begin{pmatrix} x, & y & \\ \vdots & \vdots & \lambda^{(0)} \\ x^{(r-1)}, & y^{(r-1)} & \end{pmatrix}}{\partial \lambda^{(0)}} \\
(62)\quad &\alpha_x^\nu \beta_y^\nu \cdots \alpha_{x^{(r-2)}}^{(r-2)^\nu} \beta_{y^{(r-2)}}^{(r-2)^\nu} (\alpha^{(r-1)} \beta^{(r-1)})^\nu (\alpha^{(r)} \beta^{(r)})^\nu &&= \frac{\partial^2 \Delta \begin{pmatrix} x, & y & \\ \vdots & \vdots & \lambda^{(0)} \\ x^{(r-2)}, & y^{(r-2)} & \end{pmatrix}}{\partial \lambda^{(0)^2}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_x^\nu \beta_y^\nu (\alpha^{(1)} \beta^{(1)})^\nu \cdots (\alpha^{(r)} \beta^{(r)})^\nu &&= \frac{\partial^r \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)^r}},
\end{aligned}
$$

welche eine Reihe invarianter Bildungen der Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$ und $\chi^{(0)}, \chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(r)}$ durch den Wurzelwerth $\lambda^{(0)}$ und durch rationale Covarianten der Grundform auszudrücken gestatten. Unter Benutzung der Criterien (60) ergiebt sich ferner nach Formel (57) für $\pi = \sigma = 1, 2, \ldots, r-1$:

$$
\frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)^2}} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial^{r-1} \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)^{r-1}}} = 0.
$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit der letzten von den zuvor abgeleiteten Formeln (62) sind an Stelle der Gleichungen (21), (22), (24), (34) für $\mu = 1, 2, \ldots, r$ einzufügen, worauf die blosse Wiederholung der Schlussfolgerungen des allgemeinen Falles *zu einem System von linearen Relationen zwischen den quadratischen Covarianten der Formen:*

$$
\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}; \quad \chi^{(0)}, \chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(r)}; \quad \varphi^{(r+1)}, \varphi^{(r+2)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}
$$

führt, welches bezüglich der wünschenswerthen Vollständigkeit und Leistungsfähigkeit den Relationen (45), (46), (47) *des allgemeinen Falles genau entspricht.* Betreffs näherer Begründung und Ausführung sei auf die Beispiele pag. 434, 439, 440, 443 im fünften Paragraphen verwiesen.

Der gegenwärtige Ausnahmefall besitzt noch Vorkommnisse besonderer Art, indem die Formeln (61), (62) durch Absonderung der Factoren:

$$
\begin{aligned}
&x_1 x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2, \quad x_1 x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2, \quad x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)}, \ldots \\
&y_1 y_2^{(1)} - y_1^{(1)} y_2, \quad y_1 y_2^{(2)} - y_1^{(2)} y_2, \quad y_1^{(1)} y_2^{(2)} - y_1^{(2)} y_2^{(1)}, \ldots
\end{aligned}
$$

und darauf folgende Gleichsetzung der Variablen:

$$x_1 = x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = \cdots, \quad x_2 = x_2^{(1)} = x_2^{(2)} = \cdots$$
$$y_1 = y_1^{(1)} = y_1^{(2)} = \cdots, \quad y_2 = y_2^{(1)} = y_2^{(2)} = \cdots$$

zu bemerkenswerthen Relationen Anlass geben. Beispielsweise ergiebt sich nach dem angedeuteten Verfahren *das Product der Functionalcovarianten der r-fach unendlichen linearen Formenmannigfaltigkeiten:*

$$\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)} \quad \textit{und} \quad \chi^{(0)}, \chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(r)}$$

in folgender Gestalt:

$$\Delta^{(r)}(x, y, \lambda^{(0)}) = C_0\, \lambda^{(0)^{\nu-r}} + C_1\, \lambda^{(0)^{\nu-r-1}} + \cdots + C_{\nu-r},$$

wo die Entwickelungscoefficienten $C_0, C_1, \ldots, C_{\nu-r}$ *rationale Covarianten von der Ordnung* $(r+1)(\nu-r)$ *in jeder der beiden Variablenreihen* $x_1, x_2;\ y_1, y_2$ *und vom Grade* $0, 1, \ldots, \nu - r$ *in den Coefficienten der Grundform* f *bedeuten.* Dabei bezeichnet der Ausdruck linker Hand diejenige Determinante, welche entsteht, wenn wir die Determinante $\Delta(\lambda)$ rechts mit:

$$\begin{array}{cccc}
0, & 0, & \cdots & y_2^{\nu-r} \\
0, & 0, & \cdots & -\binom{\nu-r}{1} y_1 y_2^{\nu-r-1} \\
. & . & \cdots & . \\
0, & y_2^{\nu-r}, & \cdots & . \\
y_2^{\nu-r}, & -\binom{\nu-r}{1} y_1 y_2^{\nu-r-1}, & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & (-1)^{\nu-r} y_1^{\nu-r} \\
. & . & \cdots & . \\
(-1)^{\nu-r} y_1^{\nu-r}, & 0, & \cdots & 0
\end{array}$$

und unterhalb mit:

$$\begin{array}{ccccccc}
0, & \cdot\ 0, & x_2^{\nu-r}, & \cdots & . & \cdots & (-1)^{\nu-r} x_1^{\nu-r} \\
0, & \cdot\ x_2^{\nu-r}, & -\binom{\nu-r}{1} x_1 x_2^{\nu-r-1}, & \cdots & . & \cdots & 0 \\
. & \cdot\ \cdot & . & \cdots & . & \cdots & . \\
x_2^{\nu-r}, & \cdot\ \cdot & . & \cdots (-1)^{\nu-r} x_1^{\nu-r}, & \cdots & & 0
\end{array}$$

rändern, dagegen die $(r+1)^2$ freibleibenden Eckfelder rechts unten durch Nullen ausfüllen.

Die bisher zum Studium der Ausnahmefälle verwendeten Principien führen durch wechselseitige Combination zur allgemeinsten Gattung möglicher Ausartungen, welche ihrerseits die beiden früheren Gattungen als Specialfälle von besonders einfacher Form in sich schliesst. Ehe wir die charakteristischen Criterien dieser allgemeinsten Ausartung aufstellen, setzen wir für unsere geänderten Determinanten und ihre nach $\lambda^{(0)}$ genommenen Differentialquotienten die abkürzenden Bezeichnungen fest:

$$\mathsf{A}_\pi = \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\pi-1)}, & y^{(\pi-1)} & \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}_\pi^\varkappa = \frac{\partial^\varkappa \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\pi-1)}, & y^{(\pi-1)} & \end{pmatrix}}{\partial \lambda^{(0)\varkappa}}.$$

Nehmen wir nun an, dass sich die Ausdrücke $\mathsf{A}_r, \mathsf{A}_r^1, \ldots, \mathsf{A}_r^\varrho$ auf Null reduciren, während A_{r+1} und $\mathsf{A}_r^{\varrho+1}$ von Null verschieden ausfallen, so folgt aus Formel (57) das gleichzeitige Verschwinden der Ausdrücke: $\mathsf{A}_{r-1}, \mathsf{A}_{r-1}^1, \ldots, \mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+1}$. Verschwinden des weiteren auch noch $\mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+2}, \mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+3}, \ldots, \mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+\varrho_1+1}$ bei Annahme eines von Null verschiedenen $\mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+\varrho_1+2}$, so ergiebt Formel (57) das identische Verschwinden der Ausdrücke $\mathsf{A}_{r-2}, \mathsf{A}_{r-2}^1, \ldots, \mathsf{A}_{r-2}^{\varrho+\varrho_1+2}$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt offenbar zu der denkbar allgemeinsten Ausartung und liefert *deren charakteristische Criterien in der folgenden Gestalt:*

$$(63)\quad \begin{array}{llll} & & & \mathsf{A}_{r+1} \neq 0, \\ \mathsf{A}_r = 0, & \mathsf{A}_r^1 = 0, & \cdots, \mathsf{A}_r^\varrho = 0, & \mathsf{A}_r^{\varrho+1} \neq 0, \\ \mathsf{A}_{r-1} = 0, & \mathsf{A}_{r-1}^1 = 0, & \cdots, \mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+\varrho_1+1} = 0, & \mathsf{A}_{r-1}^{\varrho+\varrho_1+2} \neq 0, \\ \mathsf{A}_{r-2} = 0, & \mathsf{A}_{r-2}^1 = 0, & \cdots, \mathsf{A}_{r-2}^{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+2} = 0, & \mathsf{A}_{r-2}^{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+3} \neq 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathsf{A} = 0, & \mathsf{A}^1 = 0, & \cdots, \mathsf{A}^{\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r} = 0, & \mathsf{A}^{\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r+1} \neq 0, \end{array}$$

womit zugleich $\lambda^{(0)}$ als eine $\varrho + \varrho_1 + \cdots + \varrho_r + r + 1$-fache Wurzel der determinirenden Gleichung (5) legitimirt ist.

Die Bedeutung unserer Ausartung wird wiederum aus Formel (54) ersichtlich, deren Anwendung für:

$$\begin{array}{ll} \tau = r, & \sigma = 0, 1, \cdots, \varrho, \\ \tau = r-1, & \sigma = \varrho+1, \varrho+2, \cdots, \varrho+\varrho_1+1, \\ \tau = r-2, & \sigma = \varrho+\varrho_1+2, \varrho+\varrho_1+3, \cdots, \varrho+\varrho_1+\varrho_2+2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \tau = 0, & \sigma = \varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_{r-1}+r, \cdots, \varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r, \end{array}$$

und $\lambda = \lambda^{(0)}$ auf Grund der charakteristischen Criterien (63) das Gleichungssystem:

$$(64)\quad \left(f, \frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^{(0)\sigma}}\right)_i = \lambda^{(0)} \frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^{(0)\sigma}} + \sigma \frac{\partial^{\sigma-1} \psi_\tau}{\partial \lambda^{(0)\sigma-1}}; \quad \psi_\tau = \Delta \begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)}, & y^{(\tau)} & \end{pmatrix}$$

zur Folge hat. Wir gelangen auf diesem Wege zu dem Satze:

Die den Criterien (63) *entsprechende allgemeinste Ausartung bedingt die Existenz einer Fortsetzung höherer Art, wie sie durch das Gleichungssystem* (64) *definirt ist. Umgekehrt setzt die Existenz jener Fortsetzung die charakteristischen Criterien* (63) *als erfüllt voraus.*

Unsere weitere Aufgabe würde nun darin bestehen, die Bildungen $\frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^{(0)\sigma}}$ zur Definition und Construction eines Formensystems:

$$\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r)}$$

zu verwenden, welches für die in Wegfall kommenden Formen:

$$\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r)}$$

des allgemeinen Falles den nothwendigen und hinreichenden Ersatz bietet. *Dass das so resultirende vollständige Formensystem:*

$$\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r)}, \varphi^{(\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r+1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$$

wiederum die entsprechenden Eigenschaften und Fähigkeiten besitzt, wie das Formensystem $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ *des allgemeinen Falles,* lehrt unmittelbar die Vergleichung mit den beiden vorhin besprochenen Ausnahmefällen. Doch ist zu einer detaillirten Darlegung dieser Verhältnisse eine besondere Untersuchung erforderlich. Beispiele bietet die Discussion der biquadratischen Form pag. 435 und 437 im fünften Paragraphen.

Der Uebergang von den Formeln der allgemeinsten Ausartung zu den beiden früher behandelten Ausnahmefällen geschieht, wie man sieht, durch die Specialisirungen $r = 0$ resp. $\varrho = \varrho_1 = \cdots, = \varrho_r = 0$. Während also den beiden früheren Ausnahmefällen nur je eine Zahl ϱ resp. r eigenthümlich war, erhalten wir im Falle der allgemeinsten Ausartung die Zahlenreihe:

$$\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_r$$

und die Ausartung des Formensystems φ ist offenbar erst dann in vollkommener und eindeutiger Weise festgelegt, sobald wir für jeden verschiedenen Wurzelwerth λ der determinirenden Gleichung eine derartige Zahlenreihe angeben. Im übrigen sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass keineswegs jede beliebig vorgeschriebene Zahlenreihe auch wirklich zu einer möglichen Ausartung Anlass geben

wird. Da aber jedem wirklich existirenden Formensysteme ψ, φ eine in bestimmter Weise ausgeartete Grundform f zugehört, so *ist jedenfalls das in Rede stehende Zahlensystem zugleich als eine Charakteristik der ausgearteten Grundform zu betrachten.*

Nach den bisherigen Ausführungen haben wir nunmehr im allgemeinen Falle, sowie für alle möglichen Vorkommnisse singulärer Art ein System von Formen φ resp. ψ, φ aufgestellt, welche bei ihrer Ueberschiebung über die gegebene Grundform ein besonders einfaches und übersichtliches Verhalten zeigen. Die ausnahmslos statthabende lineare Unabhängigkeit dieser Formen setzt uns in den Stand, eine jede beliebige Form ν^{ter} Ordnung als Summe von Formen unseres Systems darzustellen und demnach auch für diese die Folgen ihrer Ueberschiebung über die Grundform in anschaulicher Weise zu erkennen. Gleichzeitig erledigen sich offenbar durch die bisherigen Ergebnisse die Fragen nach Anzahl und Construction der Formenbüschel, der Formenbündel etc., welche sich nach ihrer Ueberschiebung reproduciren.

Um zur Veranschaulichung die geometrische Deutung unseres Problems zu benutzen, wie dieselbe oben in der Einleitung kurz skizzirt wurde, so entspricht unserem Ueberschiebungsprocesse eine Collineation im Raume von ν Dimensionen, welche im Allgemeinen, vom vierten Hauptfalle abgesehen, keine Besonderheiten bezüglich ihrer invarianten Gebilde besitzt. Sie führt $\nu + 1$ Punkte und die durch dieselben festgelegten $\frac{1}{2}(\nu + 1)\,\nu$ Geraden, $\frac{1}{6}(\nu+1)\,\nu(\nu-1)$ Ebenen etc. in sich über. Dagegen vermindern sich im Ausnahmefalle der ersten Gattung jene Zahlen resp. um ϱ, $\varrho(\nu-\varrho)$, $\frac{1}{2}\varrho(\nu-\varrho)\nu$ etc. Im Falle der zweiten Ausartung liegt eine r-fach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von invarianten Punkten vor, während die Anzahlen der discreten invarianten Punkte, Geraden, Ebenen etc. offenbar eine Reduction auf die Zahlen $\nu - r$, $\frac{1}{2}(\nu-r)(\nu-r-1)$ $\frac{1}{6}(\nu-r)(\nu-r-1)(\nu-r-2)$ etc. erfahren. Für die allgemeinste Ausartung endlich muss die befriedigende Erledigung aller entsprechenden Verhältnisse einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben, da sich die vorliegende Untersuchung darauf beschränkt, die massgebenden Gesichtspunkte und wesentlichen Forschungsmittel zur Behandlung unseres Problems dargelegt zu haben.

§ 5.

Beispiele und specielle Folgerungen.

Im vorliegenden Schlussparagraphen sollen die Ergebnisse der bisher allgemein durchgeführten Theorie für eine Reihe einfacher Beispiele Verwerthung und Bewährung finden. Wir beginnen mit der Discussion der Grundformen 2^{ter}, 4^{ter}, 6^{ter} und 8^{ter} Ordnung, da in diesen Fällen die wirkliche Berechnung der in Frage kommenden Invarianten und Covarianten, sowie ihre Darstellung durch bekannte und übersichtliche invariante Bildungen noch in einfacher Weise möglich ist. Erhalten wir somit einerseits einen allgemeineren Einblick in den analytischen Bau des zur Grundform gehörigen invarianten Formensystems, so führt andererseits die Anwendung unserer Principien zu einer rationellen Behandlungsweise der ausgearteten Grundformen.

Was zunächst die quadratische Form:

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

anbetrifft, so nimmt bei der Voraussetzung $\nu = 1, 2, 3$ die Determinante $\Delta(\lambda)$ resp. die Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 - \lambda \\ a_1 + \lambda & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_0 & -a_1 - \lambda \\ a_0 & +2\lambda & -a_2 \\ a_1 - \lambda & a_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_0 & -a_1 - \lambda \\ 0 & 2a_0 & a_1 + 3\lambda & -a_2 \\ -a_0 & a_1 - 3\lambda & 2a_2 & 0 \\ -a_1 + \lambda & -a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

und demzufolge lauten die determinirenden Gleichungen für λ bezüglich:

$$\nu = 1:\quad \lambda^2 + h = 0,$$
$$\nu = 2:\quad \lambda^3 + h\lambda = 0,$$
$$\nu = 3:\quad (\lambda^2 + h)(9\lambda^2 + h) = 0,$$

worin h die Discriminante der Grundform:

$$h = \frac{1}{2}(f, f)_2$$

bedeutet. Für $\nu = 1, 3$ tritt der zweite, für $\nu = 2$ der dritte Hauptfall ein. Zur Construction des fraglichen Formensystems φ dient nach den allgemeinen Ausführungen des ersten Paragraphen die Determi-

nante $\Delta(x, y, \lambda)$, welche sich für $\nu = 1, 2, 3$ bezüglich, wie folgt, darstellt:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 - \lambda & y_2 \\ a_1 + \lambda & a_2 & -y_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_0 & -a_1 - \lambda & y_2^2 \\ a_0 & +2\lambda & -a_2 & -2y_1 y_2 \\ a_1 - \lambda & a_2 & 0 & +y_1^2 \\ +x_2^2 & -2x_1 x_2 & +x_1^2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_0 & -a_1 - \lambda & y_2^3 \\ 0 & 2a_0 & a_1 + 3\lambda & -a_2 & -3y_1 y_2^2 \\ -a_0 & a_1 - 3\lambda & 2a_2 & 0 & +3y_1^2 y_2 \\ -a_1 + \lambda & -a_2 & 0 & 0 & -y_1^3 \\ x_2^3 & -3x_1 x_2^2 & +3x_1^2 x_2 & -x_1^3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch Auswerthung dieser invarianten Gebilde und Entwickelung nach Potenzen der identischen Covariante (xy) erhalten wir das Resultat:

$$(65)\quad \begin{aligned} \nu = 1:\ \Delta(x, y, \lambda) &= -Df - (xy)\lambda, \\ \nu = 2:\ \Delta(x, y, \lambda) &= -D^2 f^2 + 2(xy)\lambda Df \\ &\quad - \tfrac{2}{3}(xy)^2(3\lambda^2 + h), \\ \nu = 3:\ \Delta(x, y, \lambda) &= 2D^3 f^3 - 6(xy)\lambda D^2 f^2 \\ &\quad + \tfrac{9}{5}(xy)^2(5\lambda^2 + h) Df \\ &\quad - (xy)^3(9\lambda^3 + 5h\lambda), \end{aligned}$$

worin die Vorsetzung des Symboles D eine entsprechend wiederholte Polarisation nach y_1, y_2 bedeutet. Die Bestimmung der Formen φ geschieht nun mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} \nu = 1:\ & \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(y), & \lambda^{(0)^2} + h = 0, \\ \nu = 2:\ & \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(y), & \lambda^{(0)^2} + h = 0, \\ & \Delta(x, y, 0) \quad = \varphi^{(2)}(x)\,\varphi^{(2)}(y), & \\ \nu = 3:\ & \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(y), & \lambda^{(0)^2} + h = 0, \\ & \Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\,\varphi^{(3)}(y), & 9\lambda^{(2)^2} + h = 0, \end{aligned}$$

während die quadratischen Invarianten und Covarianten derselben sich bezüglich, wie folgt, ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\nu = 1:&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_1 = -2\lambda^{(0)},\\
\nu = 2:&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_2 = -2(\varphi^{(2)}, \varphi^{(2)})_2 = -4\lambda^{(0)^2},\\
&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_2 = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(2)})_2 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_2 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_2 = 0,\\
\nu = 3:&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_3 = -3(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_3 = -16\lambda^{(0)^3},\\
&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(2)})_3 = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(3)})_3 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_3 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)})_3 = 0
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
\nu = 1:&\quad \varphi^{(0)}\varphi^{(1)} = -f,\\
\nu = 2:&\quad \varphi^{(0)}\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)^2} = -f^2,\\
&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_1 = 2\lambda^{(0)}f,\\
\nu = 3:&\quad \varphi^{(0)}\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}\varphi^{(3)} = 2f^3,\\
&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_1 = 3(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_1 = -4f^2\lambda^{(0)},\\
&\quad (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_2 = -9(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_2 = +8f\lambda^{(0)^2}.
\end{aligned}$$

Beachten wir ferner die durch identische Umformung aus (65) entstehenden Relationen:

$$\begin{aligned}
\nu = 2:&\quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = -\left\{Df - \lambda^{(0)}(xy)\right\}^2,\\
\nu = 3:&\quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 2\left\{Df - \lambda^{(0)}(xy)\right\}^3,\\
&\quad \Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = 2\left\{Df - 3\lambda^{(2)}(xy)\right\}^2\left\{Df + 3\lambda^{(2)}(xy)\right\},
\end{aligned}$$

so lassen sich die Formen φ in allen drei Fällen durch die Linearfactoren l und m der Grundform in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned}
\nu = 1:&\quad \varphi^{(0)} = l, \quad \varphi^{(1)} = -m,\\
\nu = 2:&\quad \varphi^{(0)} = l^2, \quad \varphi^{(1)} = m^2, \quad \varphi^{(2)} = \sqrt{-1}\,f,\\
\nu = 3:&\quad \varphi^{(0)} = l^3, \quad \varphi^{(1)} = 2m^3, \quad \varphi^{(2)} = l^2m, \quad \varphi^{(3)} = 2lm^2.
\end{aligned}$$

An der Hand dieser Darstellungsweise ist es leicht, alle Ergebnisse und Formeln im vorliegenden Falle einer quadratischen Grundform durch directe Rechnung zu verificiren.

Die einzig mögliche Ausartung der Formensysteme φ wird offenbar durch das Verschwinden der Discriminante h bedingt, indem bei dieser Annahme alle Wurzeln der determinirenden Gleichungen gleichzeitig in den Werth Null zusammenfallen. Da die Determinante $\Delta(x, y, \lambda)$ nicht verschwinden kann, so ist jene Ausartung von der ersten Gattung und nach den allgemeinen Ausführungen des vorigen Paragraphen resp. für $\nu = 1, 2, 3$ durch die Existenz einer ein-, zwei-, dreimaligen Fortsetzung hinreichend charakterisirt. Setzen wir nun die Grundform f gleich dem Quadrate der Linearform l und bedeuten p, q, r bezüglich je eine beliebige lineare, quadratische, cubische Form, so dienen zur Vermittelung jener Fortsetzung resp. die Formen:

$\nu = 1$: $\psi^{(0)} = (l, p)_1\, l$; $\psi^{(1)} = p$;

$\nu = 2$: $\psi^{(0)} = \frac{1}{2}(l^2, q)_2\, l^2$; $\psi^{(1)} = (l, q)_1\, l$; $\psi^{(2)} = q$,

$\nu = 3$: $\psi^{(0)} = \frac{2}{9}(l^3, r)_3\, l^3$; $\psi^{(1)} = \frac{2}{3}(l^2, r)_2\, l^2$; $\psi^{(2)} = (l, r)_1\, l$; $\psi^{(3)} = r$,

und es ist in der That:

$\nu = 1$: $(f, \psi^{(0)})_1 = 0$; $(f, \psi^{(1)})_1 = \psi^{(0)}$;

$\nu = 2$: $(f, \psi^{(0)})_1 = 0$; $(f, \psi^{(1)})_1 = \psi^{(0)}$; $(f, \psi^{(2)}) = \psi^{(1)}$;

$\nu = 3$: $(f, \psi^{(0)})_1 = 0$; $(f, \psi^{(1)})_1 = \psi^{(0)}$; $(f, \psi^{(2)}) = \psi^{(1)}$; $(f, \psi^{(3)}) = \psi^{(2)}$.

Auf analoge Weise gelangen auch die entsprechenden Verhältnisse und Vorkommnisse für $\nu > 3$ zur Erledigung.

Bevor wir zur Discussion der biquadratischen Form übergehen, möge kurz der allgemeinere Fall $\nu = i$ zur Sprache gelangen, welcher desshalb ein besonderes Interesse fordert, weil er zugleich die Theorie der Potenzdarstellung und sogenannten Canonisirung der binären Formen gerader Ordnung in sich begreift. Die Zahlen k lassen sich in diesem Falle für ein allgemeines ν angeben und lauten, wie folgt:

$$k_\varrho^\sigma = \binom{\nu}{\sigma}\binom{\nu}{\varrho},$$

so dass unsere Determinante $\Delta(\lambda)$ die bereits von Cayley und Sylvester angegebene Gestalt*):

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{\nu-1} & a_\nu - \lambda \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_\nu + \frac{\lambda}{\binom{\nu}{1}} & a_{\nu+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_\nu \pm \lambda & a_{\nu+1} & \cdots & a_{2\nu-1} & a_{2\nu} \end{vmatrix}$$

annimmt. Zu jedem Wurzelwerthe λ gehört eine bestimmte Canonisirung der Grundform, welche durch die Linearfactoren der zugehörigen Form φ vermittelt wird.

Setzen wir nun für die biquadratische Form die Bezeichnungen fest:

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$

$$i = \frac{1}{2}(f, f)_4, \qquad h = \frac{1}{2}(f, f)_2,$$

$$j = \frac{1}{6}(f, h)_4, \qquad T = 2(f, h)_1,$$

*) Vgl. Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Th. Walter, § 15, 8, sowie Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Nr. 132.

so gelangen wir durch Auswerthung der Determinante (66) für $\nu = 2$ zu der determinirenden Gleichung:

$$\lambda^3 - i\lambda - 2j = 0,$$

während die bei einmaliger Ränderung erhaltene Determinante durch Entwickelung nach Potenzen der identischen Covariante (xy) die Gestalt annimmt:

$$\Delta(x, y, \lambda) = -2D^2 (f\lambda + 2h) - \frac{2}{3} (xy)^2 (3\lambda^2 - i).$$

Da die gegenwärtige Annahme $\nu = i = 2$ den ersten Hauptfall bedingt, so erhalten wir zur Construction unserer Formen φ die Formeln:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \varphi^{(0)}(x)\, \varphi^{(0)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(1)}) = \varphi^{(1)}(x)\, \varphi^{(1)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\, \varphi^{(2)}(y),$$

wo $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ die drei im Allgemeinen verschiedenen Wurzeln der oben gefundenen determinirenden Gleichung bedeuten. Die quadratischen Invarianten, die Functionalinvariante Φ und die Quadrate sowie das Product der Formen φ drücken sich durch die Formeln aus:

$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_2 = -2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)})(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)}),$$
$$(\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_2 = -2(\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)})(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}),$$
$$(\varphi^{(2)}, \varphi^{(2)})_2 = -2(\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)})(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}),$$
$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_2 = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(2)})_2 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_2 = 0,$$
$$\Phi^2 = +\frac{1}{2} (\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_2 (\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_2 (\varphi^{(2)}, \varphi^{(2)})_2$$
$$= +4 (\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)})^2 (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2 (\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)})^2,$$
$$\varphi^{(0)^2} = -2 (f\lambda^{(0)} + 2h),$$
$$\varphi^{(1)^2} = -2 (f\lambda^{(1)} + 2h),$$
$$\varphi^{(2)^2} = -2 (f\lambda^{(2)} + 2h),$$

$$\begin{vmatrix} \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(0)}(y) & \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(0)}(y') & \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(0)}(y'') \\ \varphi^{(1)}(x)\,\varphi^{(1)}(y) & \varphi^{(1)}(x)\,\varphi^{(1)}(y') & \varphi^{(1)}(x)\,\varphi^{(1)}(y'') \\ \varphi^{(2)}(x)\varphi^{(2)}(y) & \varphi^{(2)}(x)\,\varphi^{(2)}(y') & \varphi^{(2)}(x)\,\varphi^{(2)}(y'') \end{vmatrix}$$
$$= 16(yy')(y'y'')(y''y)(\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)})(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)})\, T,$$

von denen die letzteren zu folgenden Darstellungen der Grundform und ihrer Covarianten Anlass geben:

$$f = -\frac{\varphi^{(0)^2} - \varphi^{(1)^2}}{2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)})} = -\frac{\varphi^{(1)^2} - \varphi^{(2)^2}}{2(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})} = -\frac{\varphi^{(2)^2} - \varphi^{(0)^2}}{2(\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)})},$$

$$h = \frac{\lambda^{(1)}\varphi^{(0)^2} - \lambda^{(0)}\varphi^{(1)^2}}{4(\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)})} = \frac{\lambda^{(2)}\varphi^{(1)^2} - \lambda^{(1)}\varphi^{(2)^2}}{4(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})} = \frac{\lambda^{(0)}\varphi^{(2)^2} - \lambda^{(2)}\varphi^{(0)^2}}{4(\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)})},$$

$$T = \frac{1}{4}\varphi^{(0)}\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}.$$

Die möglichen Ausartungen unserer Formen φ charakterisiren sich kurz, wie folgt:

$$1. \quad \frac{\partial\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} = 0, \quad d.\ h. \quad i^3 - 27j^2 = 0.$$

Es folgt:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = -\frac{3j}{i}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{6j}{i}.$$

$$\begin{array}{ll|l} -2(f\lambda^{(0)} + 2h) & = \psi^{(0)^2} & (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_2 = -2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)}) \\ -f & = \psi^{(0)}\psi^{(1)} & (\varphi^{(2)}, \varphi^{(2)})_2 = -2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)})^2 \\ -2(f\lambda^{(2)} + 2h) & = \varphi^{(2)^2} & (\psi^{(0)}, \psi^{(0)})_2 = (\psi^{(0)}, \varphi^{(2)})_2 = (\psi^{(1)}, \varphi^{(2)})_2 = 0. \end{array}$$

$$T = \frac{1}{4}\psi^{(0)^2}\varphi^{(2)}.$$

Die Form $\psi^{(0)}$ wird mithin das Quadrat einer Linearform, welche ihrerseits als Factor einfach in $\varphi^{(2)}$, doppelt in f und h, fünffach in T auftritt.

$$2. \quad \frac{\partial\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} = 0, \quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0, \quad d.\ h. \quad 3jf - 2ih = 0,$$

und es folgt:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = -\frac{3j}{i}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{6j}{i}.$$

Der Doppelwurzel $\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)}$ gehört ein Formenbüschel zu, welches sich mittelst der Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \Delta\begin{pmatrix} x, & y \\ x^{(1)}, & y^{(1)} \end{pmatrix}\lambda^{(0)}\Big) &= \{\psi^{(1)}(x^{(1)})\,\psi^{(0)}(x) - \psi^{(0)}(x^{(1)})\,\psi^{(1)}(x)\} \\ &\quad \times \{\psi^{(1)}(y^{(1)})\,\psi^{(0)}(y) - \psi^{(0)}(y^{(1)})\,\psi^{(1)}(y)\}, \\ \frac{\partial\Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} &= (\psi^{(1)}, \psi^{(1)})_2\,\psi^{(0)}(x)\,\psi^{(0)}(y) \\ &\quad - (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_2\,\{\psi^{(0)}(x)\,\psi^{(1)}(y) + \psi^{(1)}(x)\,\psi^{(0)}(y)\} \\ &\quad + (\psi^{(0)}, \psi^{(0)})_2\,\psi^{(1)}(x)\,\psi^{(1)}(y), \end{aligned}$$

und wenn wir unter $\psi^{(0)}$ und $\psi^{(1)}$ speciell diejenigen beiden Formen des Büschels verstehen, deren Discriminante verschwindet, so folgen die leicht zu deutenden Relationen:

$$\begin{array}{r|l}
f = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_2\, \psi^{(0)}\, \psi^{(1)} & (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_2^{\,2} = 2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)}) \\
+2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)}) f = \dfrac{-4(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)})}{\lambda^{(0)}} h = \varphi^{(2)^2} & (\varphi^{(2)}, \varphi^{(2)})_2 = -2(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)})^2 \\
T = 0 & (\psi^{(0)}, \psi^{(0)})_2 = (\psi^{(1)}, \psi^{(1)})_2 = 0 \\
 & (\psi^{(0)}, \varphi^{(2)})_2 = (\psi^{(1)}, \varphi^{(2)})_2 = 0.
\end{array}$$

3. $\dfrac{\partial \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)^2}} = 0, \quad d.\ h.\quad i = 0,\ j = 0.$

Die Grundform f enthält dreifach den Linearfactor l, während für den einzigen Wurzelwerth:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$$

eine zweimalige Fortsetzung existirt. Bedeutet nämlich m den von l verschiedenen Linearfactor der Grundform und q eine beliebige quadratische Form, so ist:

$$\begin{array}{l|l}
f = m l^3 & \\
\psi^{(0)} = -\frac{1}{8} (m, l)_1^{\,2} (l^2, q)_2\, l^2 & (f, \psi^{(0)})_2 = 0 \\
\psi^{(1)} = \frac{1}{2} (l^2, q)_2\, m l + \frac{1}{2} (m, (l, q)_1)_1\, l^2 & (f, \psi^{(1)})_2 = \psi^{(0)} \\
\psi^{(2)} = q & (f, \psi^{(2)})_2 = \psi^{(1)}.
\end{array}$$

4. $\dfrac{\partial \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)^2}} = 0, \quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0, \quad d.\ h.\quad h = 0.$

Die Grundform ist die vierte Potenz einer Linearform l, während dem einzigen Wurzelwerthe:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$$

ein Büschel von Formen zugehört, unter denen eine bestimmte Form $\psi^{(1)}$ eine einmalige Fortsetzung gestattet. Bedeuten nämlich n und q je eine beliebige lineare resp. quadratische Form, so gilt:

$$\begin{array}{l|l}
f = l^4 & \\
\psi^{(0)} = l n & (f, \psi^{(0)})_2 = 0 \\
\psi^{(1)} = (l^2, q)_2\, l^2 & (f, \psi^{(1)})_2 = 0 \\
\psi^{(2)} = q & (f, \psi^{(2)})_2 = \psi^{(1)}.
\end{array}$$

In den gewonnenen Ergebnissen erkennen wir im wesentlichen die Theorie jener bekannten drei quadratischen Formen*) wieder, welche bereits in allen bisherigen Untersuchungen über die biquadratische Form und deren Factorenzerlegung die vornehmste Rolle spielen. An

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären Formen, § 45—48 oder Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Th. Walter, § 20, 2—7.

gegenwärtiger Stelle hat sich gezeigt, wie die blosse Anwendung unserer allgemeinen Principien auf den Specialfall $i = \nu = 2$ hinreicht, um die jenes Formensystem φ betreffenden Fragen zu einheitlicher und methodisch vollständiger Erledigung zu bringen.

Die biquadratische Form behandeln wir schliesslich noch vermöge der Annahmen $\nu = 3$ und $\nu = 4$. Im ersteren Falle führt die Auswerthung der Determinante:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 - \lambda \\ -a_0 & 0 & 3a_2 + 3\lambda & 2a_3 \\ -2a_1 & -3a_2 - 3\lambda & 0 & a_4 \\ -a_2 + \lambda & -2a_3 & -a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

zu der determinirenden Gleichung:

$$(3\lambda^2 - i)^2 = 0,$$

während die aus jener durch einmalige Ränderung entstehende Determinante den Werth:

$$\Delta(x, y, \lambda) = -3(3\lambda^2 - i)\left\{(xy)\, D^2 f + (xy)^3 \lambda\right\}$$

besitzt. Da nun unter den gegenwärtigen Voraussetzungen die Vorschriften des vierten Hauptfalles zur Geltung gelangen, so ist:

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(\mu)} \end{pmatrix} = \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}$$
$$\times \left\{\varphi^{(\mu)}(y)\, \varphi^{(\mu+1)}(y^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(y)\, \varphi^{(\mu)}(y^{(1)})\right\}$$

folglich:

$$\frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = -(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_3 \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu+1)}(y) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y)\right\},$$

und wir erhalten zur Construction der Formen φ die Formeln:

$$-3\left\{(xy)\, D^2 f + (xy)^3 \lambda^{(0)}\right\} = \varphi^{(0)}(x)\, \varphi^{(1)}(y) - \varphi^{(1)}(x)\, \varphi^{(0)}(y),$$
$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = +\sqrt{\frac{i}{3}},$$
$$-3\left\{(xy)\, D^2 f + (xy)^3 \lambda^{(2)}\right\} = \varphi^{(2)}(x)\, \varphi^{(3)}(y) - \varphi^{(3)}(x)\, \varphi^{(2)}(y),$$
$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = -\sqrt{\frac{i}{3}},$$

aus welchen wir noch die Relation:

$$f = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_1 = (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_1$$

entnehmen. Die quadratischen Invarianten der Formen φ nehmen folgende Werthe an:

$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_3 = -6\lambda^{(0)}, \quad (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_3 = -6\lambda^{(2)},$$
$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(2)})_3 = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(3)})_3 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_3 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)})_3 = 0.$$

Wir erkennen, wie durch die gefundenen Beziehungen sich zugleich die Frage nach der Construction der beiden cubischen Formenbüschel von vorgeschriebener Jacobischen Covariante erledigt.

Die einzig mögliche Ausartung unserer Formen φ ist offenbar durch das Verschwinden der Invariante i bedingt, in welchem Falle dem Wurzelwerthe:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$$

ein Büschel von Formen zugehört, von denen jede eine einmalige Fortsetzung gestattet. Ertheilen wir nämlich der Grundform die Gestalt der bekannten durch das Verschwinden von i charakterisirten Tetraederform:

$$f = x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$$

so ist:

$$\begin{array}{l|l}
\psi^{(0)} = \sqrt{-3}\, x_1^3 + 3x_1x_2^2 & (f, \psi^{(0)})_2 = 0 \\
\psi^{(1)} = 3x_1^2x_2 + \sqrt{-3}\, x_2^3 & (f, \psi^{(1)})_2 = 0 \\
\psi^{(2)} = 3x_1^3 & (f, \psi^{(2)})_2 = \psi^{(0)} \\
\psi^{(3)} = 3x_2^3 & (f, \psi^{(3)})_2 = \psi^{(1)}
\end{array}$$

$$(\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_1 = \sqrt{-3}\, f, \quad (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_3 = 0.$$

Setzen wir schliesslich noch $\nu = 4$, so ergiebt sich die determinirende Gleichung:

$$(3\lambda^2 - i)\,(4\lambda^3 - i\lambda + j) = 0,$$

welche als reducibel erscheint. Zur Construction der Formen φ genügt die Relation:

$$\Delta(x, x, \lambda^{(\mu)}) = \varphi^{(\mu)^2} = 4f^2\lambda^{(\mu)^2} + 2fh\lambda^{(\mu)} - if^2 + h^2,$$

deren rechte Seite gemäss der Spaltung der determinirenden Gleichung sich, wie folgt, umformen lässt:

$$\begin{array}{ll}
(f\lambda^{(\mu)} - h)^2, & 3\lambda^{(\mu)^2} - i, \\
(2f\lambda^{(\nu)} - h)\,(2f\lambda^{(\varkappa)} - h), & 4\lambda^{(\mu)^3} - i\lambda^{(\mu)} + j = 0,
\end{array}$$

wo im letzteren Falle unter $\lambda^{(\nu)}$ und $\lambda^{(\varkappa)}$ die beiden von $\lambda^{(\mu)}$ verschiedenen Wurzeln der rechter Hand angegebenen cubischen Gleichung bezeichnen. Verstehen wir mithin unter $\varphi_2^{(0)}$, $\varphi_2^{(1)}$, $\varphi_2^{(2)}$ die drei bekannten quadratischen Formen φ, welche in dem früher behandelten Falle $\nu = 2$ auftraten, so erhalten wir für die gesuchten Formen die Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll}
\varphi^{(0)} = f\lambda^{(0)} + h, & \lambda^{(0)} = +\sqrt{\dfrac{i}{3}} \\
\varphi^{(1)} = f\lambda^{(1)} + h, & \lambda^{(1)} = -\sqrt{\dfrac{i}{3}} \\
\varphi^{(2)} = \varphi_2^{(1)}\varphi_2^{(2)} & \\
\varphi^{(3)} = \varphi_2^{(0)}\varphi_2^{(2)} & \\
\varphi^{(4)} = \varphi_2^{(0)}\varphi_2^{(1)}. &
\end{array}$$

Wir gelangen zur Discussion der Form 6^{ter} Ordnung, für deren invariante Bildungen folgende Bezeichnungen gelten mögen:

$$A = \frac{1}{2}(f, f)_6 \qquad B = (i, i)_4$$

$$i = \frac{1}{2}(f, f)_4 \qquad p = (f, i)_2$$

$$h = \frac{1}{2}(f, f)_2 \qquad k = (f, h)_6.$$

Was zunächst denjenigen Fall anbetrifft, welcher nach den obigen Ausführungen die Cayley-Sylvestersche Canonisirung der Grundform vermittelt, so ergiebt sich durch Auswerthung der Determinante (66) für $\nu = 3$ die determinirende Gleichung:

$$\lambda^4 + A\lambda^2 + \frac{1}{4}(A^2 - 6B) = 0,$$

und die durch Ränderung entspringende Determinante erhält durch Entwickelung nach Potenzen der identischen Covariante (xy) die Gestalt:

$$\Delta(x, y, \lambda) = D^3 \underset{y=x}{\Omega^0} + \frac{3}{2}(xy)\, D^2 \underset{y=x}{\Omega^1} + \frac{9}{10}(xy)^2 D \underset{y=x}{\Omega^2} + \frac{1}{4}(xy)^3 \underset{y=x}{\Omega^3}$$

$$\underset{y=x}{\Omega^0} = -9f\lambda^2 - \frac{9}{2}Af + 27p$$

$$\underset{y=x}{\Omega^1} = 18\lambda i$$

$$\underset{y=x}{\Omega^2} = \frac{63}{5}k$$

$$\underset{y=x}{\Omega^3} = -36\lambda^3 - 18A\lambda.$$

Da die gegenwärtige Annahme den zweiten Hauptfall bedingt, so dienen zur Construction des Formensystems φ die Formeln:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \varphi^{(0)}(x)\, \varphi^{(1)}(y)$$

$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\, \varphi^{(3)}(y),$$

wo $\lambda^{(0)}$ und $\lambda^{(2)}$ zwei wesentlich verschiedene Wurzeln der determinirenden Gleichung bedeuten. Die quadratischen Invarianten der Formen φ besitzen die Werthe:

$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_3 = 18\lambda^{(0)}(\lambda^{(0)^2} - \lambda^{(2)^2}), \quad (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_3 = -18\lambda^{(2)}(\lambda^{(0)^2} - \lambda^{(2)^2}),$$

$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(2)})_3 = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(3)})_3 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_3 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)})_3 = 0,$$

während die Ausdrücke für die simultanen Covarianten des Formen-

systems φ gleichzeitig zu bemerkenswerthen Darstellungen der Grundform und gewisser rationaler Covarianten derselben Anlass geben, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} -9f\lambda^{(0)^2} - \tfrac{9}{2}Af + 27p &= \varphi^{(0)}\varphi^{(1)} \\ -9f\lambda^{(2)^2} - \tfrac{9}{2}Af + 27p &= \varphi^{(2)}\varphi^{(3)} \end{aligned}\right\} f = \frac{\varphi^{(0)}\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\varphi^{(3)}}{9\left(\lambda^{(2)^2} - \lambda^{(0)^2}\right)}$$

$$18i = \frac{1}{\lambda^{(0)}}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_1 = \frac{1}{\lambda^{(2)}}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_1$$

$$\frac{63}{5}k = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_2 = (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_2.$$

Was die möglichen Ausartungen anbetrifft, so kommen der Reihe nach die Vorkommnisse folgender Art in Betracht:

$$1.\ \Delta(0) = 0 \quad d.\ h. \quad A^2 - 6B = 0.$$

Dem Wurzelwerthe:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = 0$$

entspricht eine Form $\psi^{(0)}$ mit einer einmaligen Fortsetzung $\psi^{(1)}$, deren Construction mittelst der Formeln:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \psi^{(0)}(x)\,\psi^{(0)}(y)$$

$$\frac{\partial\Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} = \psi^{(0)}(x)\,\psi^{(1)}(y) - \psi^{(1)}(x)\,\psi^{(0)}(y)$$

geschieht. Es folgt daher:

$$-\frac{9}{2}Af + 27p = \psi^{(0)^2} \qquad \frac{63}{5}k = (\psi^{(0)}, \psi^{(0)})_2$$

$$6i = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_1 \qquad -9A = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_3.$$

$$2.\quad \Delta(0) = 0, \quad \Delta(x, y, 0) = 0, \quad d.\ h. \quad Af - 6p = 0,$$

und zugleich:

$$k = 0, \quad A^2 - 6B = 0.$$

Dem Wurzelwerthe:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = 0$$

entspricht ein Formenbüschel $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} &= 27(xy)\,D^2 i - \frac{1}{2}(xy)^3 \\ &= -(\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_3 \left\{\psi^{(0)}(x)\,\psi^{(1)}(y) - \psi^{(1)}(x)\,\psi^{(0)}(y)\right\}, \end{aligned}$$

während für die weiteren Formen φ die Formeln gelten:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\,\varphi^{(3)}(y)$$

$$f = \varphi^{(2)}\varphi^{(3)}$$

$$0 = (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_2.$$

Ertheilen wir somit der cubischen Form $\varphi^{(2)}$ die Gestalt:

$$\varphi^{(2)} = x_1^3 + x_2^3,$$

so wird:

$$\varphi^{(3)} = x_1^3 - x_2^3$$

$$f = x_1^6 - x_2^6 \quad \text{etc.}$$

$$3. \quad \frac{\partial \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0 \quad d.\ h. \quad B = 0.$$

Jedem der beiden Wurzelwerthe:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(2)} = + \sqrt{-\frac{A}{2}}$$

und:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = - \sqrt{-\frac{A}{2}}$$

entspricht eine Form $\psi^{(0)}$ und $\psi^{(1)}$ mit je einer Fortsetzung $\psi^{(2)}$ resp. $\psi^{(3)}$, zu deren Construction die Formeln dienen:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \psi^{(0)}(x)\, \psi^{(1)}(y)$$

$$-\frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = \psi^{(0)}(x)\, \psi^{(3)}(y) - \psi^{(2)}(x)\, \psi^{(1)}(y)$$

$$4. \quad \frac{\partial^2 \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0 \quad d.\ h. \quad i = 0,$$

und damit zugleich:

$$p = 0, \quad k = 0, \quad B = 0.$$

Den beiden Wurzelwerthen:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(2)} = + \sqrt{-\frac{A}{2}}$$

und

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = - \sqrt{-\frac{A}{2}}$$

gehört je ein Formenbüschel zu. Bezeichnen wir mit $\psi^{(0)}$, $\psi^{(2)}$ und $\psi^{(1)}$, $\psi^{(3)}$ je zwei Formen jener Büschel von der Eigenschaft:

$$(\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_3 = (\psi^{(2)}, \psi^{(3)})_3 = 0,$$

so ergiebt sich zur Construction dieser Formen ψ die Formel:

$$\frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = -18 \lambda D^3 f + 9 A (xy)^3$$
$$= (\psi^{(1)}, \psi^{(2)})_3\, \psi^{(0)}(x)\, \psi^{(3)}(y) - (\psi^{(0)}, \psi^{(3)})_3\, \psi^{(2)}(x)\, \psi^{(1)}(y).$$

Ertheilen wir der Grundform die Gestalt der bekannten durch das Verschwinden von i charakterisirten Octaederform:

$$f = x_1^5 x_2 - x_1 x_2^5$$

so wird:

$$\psi^{(0)} = \sqrt{-3}\,x_1^3 + 3x_1x_2^2, \quad \psi^{(2)} = 3x_1^2x_2 + \sqrt{-3}\,x_2^3,$$
$$\psi^{(1)} = -\sqrt{-3}\,x_1^3 + 3x_1x_2^2, \quad \psi^{(3)} = 3x_1^2x_2 - \sqrt{-3}\,x_2^3.$$

Die noch übrigen durch das gleichzeitige Verschwinden aller Wurzelwerthe λ bedingten Ausnahmefälle erledigen sich ohne Schwierigkeit nach Analogie des oben genauer ausgeführten Beispiels der biquadratischen Form.

Behandeln wir ferner die Form 6^{ter} Ordnung vermöge der Annahme $\nu = 4$, so ergiebt sich durch Berechnung der Determinante:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -a_0 & -3a_1 & -3a_2 & -a_3-\lambda \\ a_0 & 0 & -6a_2 & -8a_3+4\lambda & -3a_4 \\ 3a_1 & 6a_2 & -6\lambda & -6a_4 & -3a_5 \\ 3a_2 & 8a_3+4\lambda & 6a_4 & 0 & -a_6 \\ a_3-\lambda & 3a_4 & 3a_5 & a_6 & 0 \end{vmatrix}$$

die determinirende Gleichung:

$$8\lambda^5 + 4A\lambda^3 + 3B\lambda = 0.$$

Ferner wird:

$$\Delta(x, y, \lambda) = D^4\underset{y=x}{\Omega^0} + 2(xy)D^3\underset{y=x}{\Omega^1} + \frac{12}{7}(xy)^2D^2\underset{y=x}{\Omega^2}$$
$$+ \frac{4}{5}(xy)^3D\underset{y=x}{\Omega^3} + \frac{1}{5}(xy)^4\underset{y=x}{\Omega^4},$$

$$\underset{y=x}{\Omega^0} = -36\,(4h\lambda^2 + i^2),$$
$$\underset{y=x}{\Omega^1} = \quad 24\lambda(2f\lambda^2 + 3p),$$
$$\underset{y=x}{\Omega^2} = \quad 12\,\{2i\lambda^2 - 3(i,i)_2\},$$
$$\underset{y=x}{\Omega^3} = -\frac{4\cdot 7\cdot 9}{5}\lambda k,$$
$$\underset{y=x}{\Omega^4} = -12\,(40\lambda^4 + 12A\lambda^2 + 3B),$$

und da die gegenwärtige Annahme den dritten Hauptfall bedingt, so gelten die Formeln:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\,\varphi^{(3)}(y),$$
$$\Delta(x, y, 0) \quad = \varphi^{(4)}(x)\,\varphi^{(4)}(y),$$

woraus die Ausdrücke für die quadratischen Invarianten und Covarianten des Formensystems φ leicht herzuleiten sind. Die Discussion der Ausnahmefälle führt zu keinen neuen bemerkenswerthen Ausartungen der Grundform, indem die Discriminante der determinirenden Gleichung von derjenigen des vorigen Beispiels nicht wesentlich verschieden ausfällt.

Endlich unterwerfen wir die Form 8^{ter} Ordnung einer kurzen Behandlung. Wir verstehen dabei unter J_2, J_3, J_4, J_5 die in Salmons Lehrbuch Nr. 260 angegebenen Invarianten resp. 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten} Grades, während für die in Frage kommenden Covarianten folgende Bezeichnungen gelten mögen:

$$
\begin{aligned}
f &= a_x^8 = b_x^8 = c_x^8 = d_x^8,\\
i &= \frac{1}{2}(ab)^4 a_x^4 b_x^4,\\
l &= \frac{1}{2}(ab)^6 a_x^2 b_x^2,\\
k &= (ab)^2 (ac)^3 (bc)^3 a_x^3 b_x^3 c_x^2,\\
m &= (ab)^2 (ac)^4 (bc)^4 a_x^2 b_x^2,\\
q &= (ab)^2 (ac)^2 (ad)^2 (bc)^2 (bd)^2 (cd)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2,\\
n &= (ab)^2 (ac)^2 (ad)^2 (bc)^2 (bd)^2 (cd)^4 a_x^2 b_x^2.
\end{aligned}
$$

Was zunächst den Fall der Canonisirung unserer Grundform anbetrifft, so erhalten wir durch Berechnung der Determinante (66) für $\nu = 4$ die determinirende Gleichung:

$$\lambda^5 - J_2 \lambda^3 - 2 J_3 \lambda^2 - 16 J_4 \lambda - 96 J_5 = 0$$

und die einfach geränderte Determinante nimmt den Werth an:

$$
\begin{aligned}
\Delta(x, y, \lambda) &= D^4 \underset{y=x}{\Omega^0} + \frac{7}{12}(xy)^2 D^2 \underset{y=x}{\Omega^2} + \frac{1}{5}(xy)^4 \underset{y=x}{\Omega^4},\\
\underset{y=x}{\Omega^0} &= f\lambda^3 + 2 i \lambda^2 - 8 k \lambda + 4 q,\\
\underset{y=x}{\Omega^2} &= 2 l \lambda^2 + m \lambda - n,\\
\underset{y=x}{\Omega^4} &= 5\lambda^4 - 3 J_2 \lambda^2 - 4 J_3 \lambda - 16 J_4.
\end{aligned}
$$

Da gegenwärtig der erste Hauptfall in Betracht steht, so dient zur Construction der Formen φ das Gleichungssystem:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(\mu)}) = \varphi^{(\mu)}(x)\, \varphi^{(\mu)}(y), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, 4$$

und wir schliessen mithin:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^0(\lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)^2}\\ \Omega^2(\lambda^{(\mu)}) &= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu)})_2 \end{aligned}\right\} \mu = 0, 1, 2, 3, 4,$$

wo $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}$ die fünf im allgemeinen unter einander verschiedenen Wurzeln der determinirenden Gleichung bedeuten. Von den quadratischen Invarianten der Formen φ bleiben allein ihre vierten Ueberschiebungen über sich selbst endlich, indem dieselben dem Differenzenproducte der betreffenden Wurzelwerthe λ proportional ausfallen.

Unter den möglichen Ausartungen des Formensystems φ heben wir nur das folgende Vorkommniss hervor, welches durch die Criterien:

$$\frac{\partial \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta(\lambda^{(2)})}{\partial \lambda^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta(\lambda^{(2)})}{\partial \lambda^{(2)^2}} = 0, \quad \Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = 0, \quad \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \lambda^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

bedingt ist. Nach den allgemeinen Ausführungen des vierten Paragraphen gehört im gegenwärtigen Falle der Doppelwurzel $\lambda^{(0)}$ ein biquadratisches Formenbüschel, dagegen der dreifachen Wurzel $\lambda^{(2)}$ ein Formenbündel im bekannten Sinne zu. Bezeichnen wir nun diejenigen beiden Formen jenes Büschels, deren vierte Ueberschiebungen über sich selbst verschwinden, mit $\psi^{(0)}$ und $\psi^{(1)}$, so zeigen die Identitäten:

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = -(\psi^{(0)}, \psi^{(1)})_4 \left\{\psi^{(0)}(x)\, \psi^{(1)}(y) + \psi^{(0)}(y)\, \psi^{(1)}(x)\right\},$$

$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = 0, \quad \frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(2)})}{\partial \lambda^{(2)}} = 0,$$

dass die Grundform f und ihre Covarianten i, k, q im wesentlichen mit dem Producte jener beiden biquadratischen Formen $\psi^{(0)}$ und $\psi^{(1)}$ übereinstimmen, dagegen die Covarianten l, m, n sowie die zweite Ueberschiebung der beiden Formen $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$ übereinander identisch verschwinden. Wie die Discussion der biquadratischen Form auf pag. 437 lehrt, haben wir nur eine der beiden Formen $\psi^{(0)}$ und $\psi^{(1)}$ gleich der Hesseschen Covariante der andern einzusetzen, um ein Formensystem der verlangten Art zu erhalten. Ertheilen wir daher etwa der Form $\psi^{(0)}$ die Gestalt der bekannten durch das Verschwinden der quadratischen Invariante ausgezeichneten Tetraederform:

$$\psi^{(0)} = x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$$

so wird:

$$\psi^{(1)} = (\psi^{(0)}, \psi^{(0)})_2 = x_1^4 - 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$$

während die Grundform f dem Producte beider Formen:

$$\psi^{(0)} \psi^{(1)} = x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8$$

proportional ausfällt und damit gleichzeitig ihre Uebereinstimmung mit der bekannten Primform der Oktaedergruppe erkennen lässt.

Behandeln wir schliesslich noch die Form 8ter Ordnung vermöge der Annahme $\nu = 5$, so ergiebt sich durch Berechnung der Determinante:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4-\lambda \\ -a_0 & 0 & 10a_2 & 20a_3 & 15a_4+5\lambda & 4a_5 \\ -4a_1 & -10a_2 & 0 & 20a_4-10\lambda & 20a_5 & 6a_6 \\ -6a_2 & -20a_3 & -20a_4+10\lambda & 0 & 10a_6 & 4a_7 \\ -4a_3 & -15a_4-5\lambda & -20a_5 & -10a_6 & 0 & a_8 \\ -a_4+\lambda & -4a_5 & -6a_6 & -4a_7 & -a_8 & 0 \end{vmatrix}$$

die determinirende Gleichung:

$$(5\lambda^3 - J_2\lambda + 2J_3)^2 = 0.$$

Da ferner die gegenwärtige Annahme den vierten Hauptfall bedingt, so lehrt die Anwendung unserer allgemeinen Ausführungen, dass einer jeden von den drei Doppelwurzeln:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)},\quad \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)},\quad \lambda^{(4)} = \lambda^{(5)}$$

ein Formenbüschel zugehört, zu dessen Construction die folgenden Formeln verhelfen:

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & y & \lambda^{(\mu)} \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \end{pmatrix} = \left\{\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(x^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(x^{(1)})\right\}$$
$$\times\left\{\varphi^{(\mu)}(y)\,\varphi^{(\mu+1)}(y^{(1)}) - \varphi^{(\mu+1)}(y)\,\varphi^{(\mu)}(y^{(1)})\right\},$$

$$\varphi^{(\mu)}(x)\,\varphi^{(\mu+1)}(y) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\,\varphi^{(\mu)}(y) = (xy)\,D^4\underset{y=x}{\Omega^1} + \frac{25}{7}(xy)^3 D^2\underset{y=x}{\Omega^3} + \frac{1}{3}(xy)^5\underset{y=x}{\Omega^5}$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{y=x}{\Omega^1} &= 10(f\lambda^{(\mu)} - 2i) \\ \underset{y=x}{\Omega^3} &= -8l \\ \underset{y=x}{\Omega^5} &= 10(15\lambda^{(\mu)^2} - J_2) \end{aligned}\right\}\ \mu = 0,\ 2,\ 4.$$

Die endlich bleibenden quadratischen Invarianten und die in Betracht kommenden Covarianten des Formensystems φ nehmen bezüglich die Werthe an:

$$\begin{aligned} (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_5 &= 50(\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)})(\lambda^{(0)} - \lambda^{(4)}), \\ (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_5 &= 50(\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)})(\lambda^{(2)} - \lambda^{(4)}), \\ (\varphi^{(4)}, \varphi^{(5)})_5 &= 50(\lambda^{(4)} - \lambda^{(0)})(\lambda^{(4)} - \lambda^{(2)}), \end{aligned}$$
$$(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_3 = (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_3 = (\varphi^{(4)}, \varphi^{(5)})_3 = -8l,$$

$$\frac{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_1 - (\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_1}{\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)}} = \frac{(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_1 - (\varphi^{(4)},\varphi^{(5)})_1}{\lambda^{(0)} - \lambda^{(4)}} = \frac{(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_1 - (\varphi^{(4)},\varphi^{(5)})_1}{\lambda^{(2)} - \lambda^{(4)}}$$
$$= 10f,$$

$$\frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_1 - \lambda^{(0)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_1}{\lambda^{(0)} - \lambda^{(2)}} = \frac{\lambda^{(4)}(\varphi^{(0)},\varphi^{(1)})_1 - \lambda^{(0)}(\varphi^{(4)},\varphi^{(5)})_1}{\lambda^{(0)} - \lambda^{(4)}}$$
$$= \frac{\lambda^{(4)}(\varphi^{(2)},\varphi^{(3)})_1 - \lambda^{(2)}(\varphi^{(4)},\varphi^{(5)})_1}{\lambda^{(2)} - \lambda^{(4)}} = 20i.$$

Von den möglichen Vorkommnissen besonderer Art betrachten wir nur den Ausnahmefall:

$$\frac{\partial^2 \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0,\ \Delta\begin{pmatrix} x, & y & \lambda^{(0)} \\ x^{(1)}, & y^{(1)} & \end{pmatrix} = 0,\ d.\ h.\ 3J_3 f - 2J_2 i = 0,\ l = 0.$$

Es entspricht hier dem vierfachen Wurzelwerthe:

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \frac{3J_3}{J_2}$$

eine dreifach unendliche lineare Formenmannigfaltigkeit, während der Doppelwurzel $\lambda^{(4)} = \lambda^{(5)}$ ein Formenbüschel zugehört, dessen Combinanten sich, wie folgt, ausdrücken:

$$(\psi^{(4)}, \psi^{(5)})_5 = 30 J_2,$$
$$(\psi^{(3)}, \psi^{(5)})_3 = 0,$$
$$(\psi^{(4)}, \psi^{(5)})_1 = -90 \frac{J_3}{J_2} f = -60 i.$$

Um diesen Angaben entsprechend ein Formenbüschel ψ zu construiren, legen wir zunächst als Ausgangsform $\psi^{(4)}$ eine solche Form des Büschels zu Grunde, welche die Eigenschaft besitzt durch geeignete lineare Transformation die Jerrardsche Gestalt:

$$\psi^{(4)} = x_1^5 - 5 x_1 x_2^4 + \alpha_5 x_2^5$$

anzunehmen. Es gilt ferner der Satz:

Soll für eine Form 5^{ter} *Ordnung eine andere Form derselben Ordnung existiren, deren dritte Ueberschiebung über die vorgelegte Form identisch verschwindet, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür in dem Verschwinden ihrer Invariante* 4^{ten} *Grades.*

Da diese Invariante für unsere Form $\psi^{(4)}$ den Werth α_5^2 erhält, so vereinfacht sich zufolge unserer Bedingung der obige Ausdruck, wie folgt:

$$\psi^{(4)} = x_1^5 - 5 x_1 x_2^4,$$

während eine leichte Rechnung für die zugehörige Form den Werth:

$$\psi^{(5)} = -5 x_1^4 x_2 + x_2^5$$

liefert. Bilden wir nun die Jakobische Covariante des gefundenen Formenbüschels $\psi^{(4)}, \psi^{(5)}$, so ergiebt sich wiederum die bekannte Hexaederform 8^{ter} Ordnung und zwar in derselben canonischen Gestalt, wie oben. Gleichzeitig lehrt unsere Betrachtung, dass, von trivialen Fällen abgesehen, jene Hexaederform die einzige Form ist, welche die Eigenschaft besitzt, sich nach ihrer vierten Ueberschiebung über sich selbst zu reproduciren.*)

---

*) Brioschi behandelt in den Comptes rendus Bd. 96, pag. 1689 eine Form 8^{ter} Ordnung mit der erwähnten Eigenschaft, ohne, wie es scheint, zu bemerken, dass dieselbe nur ein anderer canonischer Ausdruck für jene Hexaederform ist. Ertheilen wir nämlich der durch das Verschwinden der quadratischen Invariante ausgezeichneten biquadratischen Form $\psi^{(0)}$ auf pag. 443 die Gestalt:

Damit beschliessen wir die Reihe der leicht zu vermehrenden Beispiele und speciellen Folgerungen unserer allgemeinen Principien.

Nach den einleitenden Betrachtungen am Anfange der gegenwärtigen Abhandlung entsprang das vorstehend untersuchte Problem einer weit umfassenderen Idee. Unser Fall $\varkappa = 1$ ergab sich aus der letzteren durch naturgemässe Specialisirung, hatte jedoch vorweg die Ausschliessung der Formen ungerader Ordnung zur Folge. Schon dieser Umstand weist auf die Nothwendigkeit der Untersuchung des weiteren Specialfalles $\varkappa = 2$ hin, welcher für die binären Formen ungerader Ordnung eine nicht weniger wichtige Rolle spielen wird, wie der oben behandelte Fall $\varkappa = 1$ für die Formen gerader Ordnung.

Ostseebad Rauschen, den 15. September 1886.

$$\psi^{(0)} = x_1^3 x_2 - x_2^4,$$

so wird:

$$\psi^{(1)} = (\psi^{(0)}, \psi^{(0)})_2 = x_1^4 + 8 x_1 x_2^3,$$

während das Product beider Formen den Werth:

$$\psi^{(0)} \psi^{(1)} = x_1^7 x_2 + 7 x_1^4 x_2^4 - 8 x_1 x_2^7$$

annimmt, welcher mit dem Brioschischen Ausdrucke wesentlich übereinstimmt.

Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine Transformation vierten Grades.

Von

Oskar Bolza in Göttingen.

Im folgenden soll die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine Transformation vierten Grades mit Hülfe der Transformationstheorie der ϑ-Functionen durchgeführt werden. Ich werde mich dabei auf eine Wiedergabe des Gedankenganges und der Resultate beschränken, indem ich für die Beweise auf meine Dissertation*) verweise, wo man auch eine ausführliche Angabe der einschlägigen Literatur findet.

§ 1.

Die algebraische Relation zwischen den Wurzeln der ganzen Function sechsten Grades.

Die Anwendbarkeit der Transformationstheorie der ϑ-Functionen auf das Reductionsproblem beruht auf dem folgenden fundamentalen Theorem von Weierstrass**) und Picard:***) Soll ein zu dem hyperelliptischen Gebilde vom Range zwei

$$Y^2 = R(X) \tag{1}$$

gehöriges Integral erster Gattung auf ein elliptisches Integral algebraisch reducirbar sein, so muss es unter den zu dem Gebilde (1) gehörigen Systemen von ϑ-Moduln mindestens eines geben, für welches: $\tau_{12} = \frac{1}{k}$, wo k eine positive ganze Zahl ist, und zwar sind alsdann die beiden zu dem Modulsystem $\tau_{11}, \frac{1}{k}, \tau_{22}$ gehörigen Normalintegrale

*) *Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische, insbesondere über die Reduction durch eine Transformation vierten Grades.* Göttingen 1886.

**) Siehe die Mittheilungen von Frau von Kowalevsky über die Untersuchungen von Weierstrass, Acta mathematica, Bd. 4, pag. 400.

***) Bulletin de la société mathématique de France, Tome XI.

erster Gattung durch rationale Transformation k^{ten} Grades auf je ein elliptisches Integral reducirbar.

Für den Fall der Reduction vierten Grades haben wir also die transcendente Bedingung:

(2) $$\tau_{12} = \frac{1}{4}.$$

Hieraus ergiebt sich auf folgendem Wege eine algebraische Relation zwischen den Wurzeln von $R(X)$, die wir mit a_0 bis a_5 bezeichnen wollen, und welche alle von einander verschieden vorausgesetzt werden.

Jedes aus vier Wurzeln von $R(X)$ zu bildende Doppelverhältniss lässt sich durch die Nullwerthe von vier geraden ϑ-Functionen mit den Moduln τ_{11}, $\frac{1}{4}$, τ_{22} darstellen. Diese Nullwerthe lassen sich aber durch zweimalige Anwendung der Transformation zweiten Grades:

$$\omega_1 = \varpi_1, \quad \omega_2 = \varpi_2, \quad \omega_1' = 2\varpi_1', \quad \omega_2' = 2\varpi_2'$$

algebraisch durch die Nullwerthe der ϑ-Functionen mit den Moduln $4\tau_{11}$, 1, $4\tau_{22}$ ausdrücken, und diese letzteren zerfallen unmittelbar in das Product aus zwei elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln $4\tau_{11}$ und $4\tau_{22}$. Man kann also jedes Doppelverhältniss algebraisch durch die Nullwerthe elliptischer ϑ-Functionen darstellen und swar treten diese letzteren nur in den Verbindungen

$$l = \vartheta(0|4\tau_{11})_3\, \vartheta(0|4\tau_{22})_3, \quad m = \vartheta(0|4\tau_{11})_2\, \vartheta(0|4\tau_{22})_0,$$
$$n = \vartheta(0|4\tau_{11})_0\, \vartheta(0|4\tau_{22})_2$$

auf und auch von diesen kommen nur die Quotienten $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$ vor.

Greift man jetzt irgend drei von einander unabhängige Doppelverhältnisse heraus, drückt sie in der angegebenen Weise durch die beiden Grössen $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ aus und eliminirt aus den so entstehenden drei Gleichungen die beiden Grössen $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ so erhält man die gesuchte Relation zwischen den Wurzeln von $R(X)$.

Wollte man für die drei Doppelverhältnisse die drei Richelot'schen Moduln $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 wählen, so würde man auf eine unsymmetrische und complicirte Rechnung geführt werden. Besser eignen sich hierzu die drei folgenden Doppelverhältnisse:

(3) $$\begin{cases} p = \dfrac{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)}{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)} = \dfrac{\vartheta_{12}^2\, \vartheta_{34}^2}{\vartheta_0^2\, \vartheta_5^2}, \\[2ex] q = \dfrac{(a_4 - a_5)(a_3 - a_0)}{(a_4 - a_0)(a_3 - a_5)} = \dfrac{\vartheta_0^2\, \vartheta_{34}^2}{\vartheta_{12}^2\, \vartheta_5^2}, \\[2ex] r = \dfrac{(a_1 - a_0)(a_2 - a_5)}{(a_1 - a_5)(a_2 - a_0)} = \dfrac{\vartheta_0^2\, \vartheta_{12}^2}{\vartheta_{34}^2\, \vartheta_5^2}. \end{cases}$$

Darin bedeuten die ϑ_a die Nullwerthe der ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11}, \frac{1}{4}, \tau_{22}$.

Die Ausführung der oben angedeuteten Rechnung ergiebt:

$$p = \left[\frac{m^2 + n^2 - l^2 - 2mn}{m^2 + n^2 - l^2 + 2mn}\right]^2,$$

$$q = \left[\frac{n^2 + l^2 - m^2 - 2nl}{n^2 + l^2 - m^2 + 2nl}\right]^2,$$

$$r = \left[\frac{l^2 + m^2 - n^2 - 2lm}{l^2 + m^2 - n^2 + 2lm}\right]^2,$$

und hieraus folgt durch Elimination der Grössen $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ das Resultat:

Soll ein zur Irrationalität $\sqrt{R(X)}$ gehöriges Integral erster Gattung durch eine Transformation vierten Grades auf ein elliptisches Integral reducirbar sein, so muss zwischen den Wurzeln von $R(X)$ die Gleichung bestehen:

$$\left|\begin{matrix} 1 & h & g \\ h & 1 & f \\ g & f & h \end{matrix}\right| = 0, \tag{4}$$

darin ist:

$$f = \frac{\sqrt{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)} + \sqrt{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)}}{\sqrt{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)} - \sqrt{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)}}$$

und g und h gehen aus f hervor durch Anwendung der Substitution:

$$\sigma = (a_1, a_3, a_5)\,(a_2, a_4, a_0)$$

resp. σ^2.

Und umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Relation (4), dass es stets ein zu dem Gebilde (1) gehöriges System von ϑ-Moduln giebt, in welchem $\tau_{12} = \frac{1}{4}$, so dass also die Relation (4) *nicht nur nothwendig sondern auch hinreichend ist.*

§ 2.

Wahl einer geeigneten Normalform für das hyperelliptische Gebilde.

Ist die Bedingung (4) erfüllt, so giebt es nach dem Satz von Weierstrass und Picard allemal zwei zu dem Gebilde (1) gehörige Integrale erster Gattung, welche durch Transformationen vierten Grades auf je ein elliptisches Integral reducirbar sind. Für die weitere Aufgabe, diese Integrale selbst anzugeben, eignet sich die übliche Richelot'sche Normalform nicht, man hat daher zunächst *eine der speciellen Natur des Reductionsproblems besonders angepasste Normalform aufzusuchen.*

Da — für beliebigen Transformationsgrad k — die beiden reducirbaren Integrale die zu dem Modulsystem $\tau_{11}, \frac{1}{k}, \tau_{22}$ gehörigen Normalintegrale erster Gattung u_1, u_2 sind, so wird man die gesuchte Normalform so zu wählen haben, dass diese beiden Normalintegrale eine möglichst einfache Form annehmen. Zu diesem Zweck verfügen wir über die drei Constanten der linearen Substition:

$$X = \frac{ax+b}{cx+d}$$

so, dass die beiden Normalintegrale u_1, u_2 übergehen in:

$$u_1 = \int \frac{dx}{y}, \qquad u_2 = \int \frac{x\,dx}{y}.$$

Die Ausführung der Rechnung ergiebt für beliebige hyperelliptische Gebilde vom Range zwei das Resultat:

Die zu dem Modulsystem $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ gehörige Richelot'sche Normalform des Gebildes (1), *nämlich:*

$$\eta^2 = \xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)$$

geht durch die lineare Transformation:

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\vartheta_5\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{12}}{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_4} \cdot \dfrac{\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)}x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}x}, \\[2ex] \eta = -\dfrac{\pi^2}{2}\,\dfrac{\vartheta_0^{\,2}\,\vartheta_2^{\,2}\,\vartheta_{34}^{\,2}\,\vartheta_{14}^{\,2}}{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_4} \cdot \dfrac{y}{(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}x)^3} \end{cases}$$

über in das Gebilde:

$$(6)\qquad y^2 = \frac{4}{\pi^4}\,\frac{\prod''_{(\alpha)} (\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}x)}{\prod'_{(\alpha)} \vartheta_\alpha},$$

und die beiden zugehörigen Normalintegrale erster Gattung gehen über in:

$$(7)\qquad u_1 = \int \frac{dx}{y}, \qquad u_2 = \int \frac{x\,dx}{y}.$$

Darin bedeuten die ϑ_α die Nullwerthe der ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, die $\vartheta_\alpha^{(\beta)}$ die Nullwerthe der partiellen Ableitungen derselben, und das Productzeichen $\prod'$ erstreckt sich über die zehn geraden, $\prod''$ über die sechs ungeraden ϑ-Functionen.

§ 3.

Darstellung der Constanten der reducirbaren Integrale als algebraische Functionen von zwei unabhängigen Parametern.

Giebt man in der Gleichung (6) der Grösse τ_{12} den Werth $\frac{1}{k}$, so stellen die beiden Integrale (7) die allgemeinsten durch Transformationen k^{ten} Grades reducirbaren Integrale dar; man hat also zunächst in

transcendenter Weise die Constanten der beiden reducirbaren Integrale als eindeutige Functionen der beiden unabhängigen Parameter τ_{11}, τ_{22} dargestellt. Um hieraus eine Darstellung derselben Constanten als *algebraische* Functionen zweier Parameter zu erhalten, hat man wieder die Nullwerthe der ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11}, \frac{1}{k}, \tau_{22}$ und die Nullwerthe ihrer Ableitungen mittels der Transformation k^{ten} Grades:

$$\omega_1 = \varpi_1, \quad \omega_2 = \varpi_2, \quad \omega_1' = k\varpi_1', \quad \omega_2' = k\varpi_2'$$

algebraisch durch die Nullwerthe der elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln $k\tau_{11}$ resp. $k\tau_{22}$ auszudrücken.

Für den einfachsten Fall $k = 2$ gestaltet sich die Rechnung folgendermassen:

Setzt man:

$$\alpha_h = \vartheta(0|2\tau_{11})_h, \qquad \beta_h = \vartheta(0|2\tau_{22})_h,$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{13}^{(1)} &= \pi i \vartheta_{14} \,.\, \alpha_3^2, & \vartheta_{13}^{(2)} &= -\pi \vartheta_{14} \beta_3^2, \\
\vartheta_{24}^{(1)} &= \pi i \vartheta_{23} \,.\, \alpha_3^2, & \vartheta_{24}^{(2)} &= \pi \vartheta_{23} \beta_3^2, \\
\vartheta_{3}^{(1)} &= \pi i \vartheta_{4} \,.\, \alpha_2^2, & \vartheta_{3}^{(2)} &= \pi \vartheta_{4} \beta_0^2, \\
\vartheta_{04}^{(1)} &= -\pi i \vartheta_{03} \,.\, \alpha_2^2, & \vartheta_{04}^{(2)} &= \pi \vartheta_{03} \beta_0^2; \\
\vartheta_{1}^{(1)} &= \pi \vartheta_{2} \,.\, \alpha_0^2, & \vartheta_{1}^{(2)} &= -\pi i \vartheta_{2} \beta_2^2, \\
\vartheta_{02}^{(1)} &= \pi \vartheta_{01} \,.\, \alpha_0^2, & \vartheta_{02}^{(2)} &= \pi i \vartheta_{01} \beta_2^2,
\end{aligned}$$

$$\vartheta_5 \vartheta_0 \vartheta_{12} \vartheta_{34} = \alpha_0^4 \beta_0^4 - \alpha_2^4 \beta_2^4.$$

Bezeichnet man daher:

$$c = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}, \quad c' = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_3^2}, \quad e = \frac{\beta_2^2}{\beta_3^2}, \quad e' = \frac{\beta_0^2}{\beta_3^2}$$

und setzt schliesslich:

$$x = \frac{\alpha_3^2}{\beta_3^2} t,$$

so erhält man die beiden zu dem Modulsystem:

$$\tau_{11}, \quad \frac{1}{2}, \quad \tau_{22}$$

gehörigen Normalintegrale erster Gattung in der Form

$$(8) \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{(c^2 - c'^2)}}{2\pi\alpha_3^2} \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(c^2+e'^2t^2)(c'^2+e^2t^2)}}, \\[2ex] u_2 = \dfrac{\sqrt{(c^2 - c'^2}}{2\pi\beta^3} \displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{(1+t^2)(c^2+e'^2t^2)(c'^2+e^2t^2)}}, \end{cases}$$

und man sieht unmittelbar, dass dieselben in der That durch Transformationen zweiten Grades reducirbar sind.

Für den Fall $k = 4$ ergiebt eine analoge Rechnung das Resultat: Setzt man zur Abkürzung:

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = -\, i\vartheta^2(0|4\tau_{11})_3, & \alpha' = i\vartheta^2(0|4\tau_{22})_3, \\ \beta = \quad \vartheta^2(0|4\tau_{11})_2, & \beta' = \vartheta^2(0|4\tau_{22})_0, \\ \gamma = \quad \vartheta^2(0|4\tau_{11})_0, & \gamma' = \vartheta^2(0|4\tau_{22})_0, \end{cases}$$

so dass zwischen diesen Grössen die Relationen bestehen:

$$(10)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0,$$

ferner

$$(11)\qquad \begin{cases} A = \beta\beta' + \gamma\gamma' - \alpha\alpha', \\ B = \gamma\gamma' + \alpha\alpha' - \beta\beta', \\ C = \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma', \end{cases}$$

und schliesslich

$$(12)\qquad \begin{cases} U = (\beta^2 B - \gamma^2 C) - 2iA\alpha\alpha' x - (\beta'^2 B - \gamma'^2 C)x^2, \\ V = (\gamma^2 C - \alpha^2 A) - 2iB\beta\beta' x - (\gamma'^2 C - \alpha'^2 A)x^2, \\ W = (\alpha^2 A - \beta^2 B) - 2iC\gamma\gamma' x - (\alpha'^2 A - \beta'^2 B)x^2, \end{cases}$$

alsdann lauten die beiden zu dem Modulsystem

$$\tau_{11},\ \frac{1}{4},\ \tau_{22}$$

gehörigen Normalintegrale erster Gattung unter Zugrundelegung unserer Normalform (6)

$$(13)\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{ABC(BC+CA+AB)}}{2\pi} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{UVW}}, \\ u_2 = \dfrac{\sqrt{ABC(BC+CA+AB)}}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{UVW}}. \end{cases}$$

Die Functionen U, V, W haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, nur ihr Zeichen zu wechseln, wenn man in ihnen gleichzeitig α mit α', β mit β', γ mit γ' vertauscht, x durch $-\frac{1}{x}$ ersetzt und schliesslich mit x^2 multiplicirt. Durch diese Vertauschung geht daher das Integral u_1 in u_2 über und umgekehrt.

Auch hier kann man die Constanten des Integrals durch zwei unabhängige Parameter ausdrücken, wenn man

$$x = -\frac{\alpha}{\alpha'}\, t$$

setzt, wobei jedoch die Formeln ihre Symmetrie verlieren.

§ 4.

Die reducirende Transformation.

Es bleiben jetzt noch *die rationalen Functionen vierten Grades zu* bestimmen, durch welche die beiden Integrale u_1, u_2 auf elliptische reducirt werden.

Um zunächst die Reduction des ersten Integrals u_1 zu finden, gehen wir aus von der Identität:

$$\frac{\vartheta(kv_1|k\tau_{11})_1}{\vartheta(kv_1|k\tau_{11})_0}=\frac{\vartheta(kv_1,kv_2;\,k\tau_{11},1,k\tau_{22})_1}{\vartheta(kv_1,kv_2;\,k\tau_{11},1,k\tau_{22})_{12}}. \tag{14}$$

Die ϑ-Functionen auf der rechten Seite lassen sich als homogene ganze Functionen k^{ten} Grades der ϑ-Functionen mit den Argumenten v_1, v_2 und den Moduln τ_{11}, $\frac{1}{k}$, τ_{22} ausdrücken. Setzt man nun für das Gebilde (6) die Gleichungen des Umkehrproblems an:

$$\begin{aligned} dv_1&=\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2},\\ dv_2&=\frac{x_1\,dx_1}{y_1}+\frac{x_2\,dx_2}{y_2}, \end{aligned} \tag{15}$$

so erhält man nach geeigneter Festsetzung der Anfangsbedingungen in bekannter Weise die Quotienten je zweier Functionen

$$\vartheta\left(v_1,\,v_2;\,\tau_{11},\,\frac{1}{k},\,\tau_{22}\right)_\lambda$$

als algebraische Functionen von x_1, x_2; somit ist die rechte Seite der Gleichung (14) eine algebraische Function von x_1 und x_2.

Setzt man jetzt andererseits:

$$s=\left[\frac{\vartheta(0|k\tau_{11})_3\;\vartheta(kv_1|k\tau_{11})_1}{\vartheta(0|k\tau_{11})_2\;\vartheta(kv_1|k\tau_{11})_0}\right]^2, \tag{16}$$

so folgt:

$$dv_1=\frac{1}{2k\pi\vartheta^2(0|k\tau_{11})_3}\;\frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-c^2s)}}, \tag{17}$$

wo

$$c=\frac{\vartheta^2(0|k\tau_{11})_2}{\vartheta^2(0|k\tau_{11})_3}, \tag{18}$$

also durch Vergleichung mit (15):

$$\frac{1}{2k\pi\vartheta^2(0|k\tau_{11})_3}\;\frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-c^2s)}}=\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2},$$

und es ist s *eine algebraische Function von* x_1 *und* x_2.

Hiermit ist zunächst gezeigt, wie man die *Summe* zweier hyperelliptischer Integrale auf ein elliptisches reduciren kann. Um hieraus die Reduction eines *einzigen* Integrals zu bekommen, braucht man nur

in dem zweiten Integral die obere Grenze gleich der untern zu setzen; dabei geht s in eine algebraische Function von x_1 allein über, welche nichts anderes ist als die gesuchte algebraische Function, welche die Reduction vermittelt.

Die Durchführung der Rechnung für $k = 4$ ergiebt das Resultat:

$$s = -\frac{1}{c^2}\,\frac{V}{U}\,\frac{(S-U)^2}{(S+V)^2}, \tag{19}$$

worin:

$$S = (\alpha^3\alpha' + \beta^3\beta' + \gamma^3\gamma') + i(\gamma^2\beta'^2 - \gamma'^2\beta^2)x + (\alpha\alpha'^3 + \beta\beta'^3 + \gamma\gamma'^3)x^2,$$

während U, V, W die durch (12) definirten Functionen sind. Die Function s ist scheinbar vom sechsten Grade; es stellt sich aber heraus, dass die beiden Functionen $S - U$ und $S + V$ eine gemeinsame Wurzel haben.

Man erhält so das folgende Schlussresultat:

Die Differentialgleichung

$$-\frac{1}{16}\,\frac{ds^2}{s(1-s)(\alpha^2+\beta^2 s)} = ABC(BC+AC+AB)\cdot\frac{dx^2}{UVW} \tag{20}$$

wird befriedigt durch die rationale Function vierten Grades:

$$s = K\,\frac{[(\gamma'^2C-\alpha'^2A)x^2+2i\beta\beta'Bx-(\gamma^2C-\alpha^2A)]\,[(\gamma'^2C-\alpha'^2A)x-i\beta\beta'B]^2}{[(\beta'^2B-\gamma'^2C)x^2+2i\alpha\alpha'Ax-(\beta^2B-\gamma^2C)]\,[(\beta'^2B-\gamma'^2C)x-i\alpha\alpha'A]^2}. \tag{21}$$

Darin sind α, β, γ, α', β', γ' willkürliche Parameter, welche nur den beiden Bedingungen (10) genügen müssen; A, B, C sind die durch (11) definirten Functionen derselben, und die Constante K hat den Werth:

$$K = \frac{\alpha^4\alpha'^2A^2(\gamma^2C-\alpha^2A-3\beta^2B)^2}{\beta^4\beta'^2B^2(\gamma^2C-\beta^2B-3\alpha^2A)^2}. \tag{22}$$

Es bleibt nur noch übrig *auch für das zweite Integral* u_2 die reducirende rationale Function vierten Grades zu bestimmen. Diese Aufgabe löst sich aber nach der auf pag. 452 hervorgehobenen Eigenschaft der Functionen U, V, W einfach *dadurch, dass man in den Gleichungen* (20), (21), (22) *gleichzeitig* α *mit* α', β *mit* β', γ *mit* γ' *vertauscht und* x *durch* $-\frac{1}{x}$ *ersetzt.*

§ 5.

Algebraische Lösung der Aufgabe.

Man kann die in den beiden letzten Paragraphen behandelte Aufgabe auch auf rein algebraischem Wege lösen, mit Hilfe der von Jacobi für die Transformationstheorie der elliptischen Integrale entwickelten Principien. Dabei wird man auf eine andere Wahl der unabhängigen Parameter geführt, bei welcher die Ausdrücke für die Constanten der reducirbaren Integrale und die reducirenden Functionen

einfacher, dagegen die Ausdrücke für die Moduln der elliptischen Integrale und besonders die Formeln, welche den Uebergang von dem ersten Integral zum zweiten vermitteln, complicirter werden. Als Ergänzung zu dem bisherigen mag daher das Resultat hier noch Platz finden:

Es seien λ, μ, ν drei unabhängige Parameter, λ', μ', ν' folgende Functionen derselben:

$$(23)\quad \begin{cases} \lambda' = -\frac{1}{3}\,\frac{2\lambda^2\nu - \lambda\mu^2 - \mu\nu}{-\nu^2 + 3\lambda\mu\nu - 2\mu^3}, \\ \mu' = \frac{1}{9}\,\frac{\lambda^2\mu + \lambda\nu - 2\mu^2}{-\nu^2 + 3\lambda\mu\nu - 2\mu^3}, \\ \nu' = -\frac{1}{27}\,\frac{2\lambda^3 - 3\lambda\mu + \nu}{-\nu^2 + 3\lambda\mu\nu + 2\mu^3}, \end{cases}$$

und

$$(24)\quad \begin{aligned} R(x;\, \lambda, \mu, \nu) = \nu' x^6 - 6\lambda\nu' x^5 + 3(4\mu\nu' + \lambda\mu')x^4 \\ + 2(\lambda\lambda' + 5\nu\nu')x^3 + 3(4\mu'\nu + \lambda'\mu)x^2 - 6\lambda'\nu x + \nu, \end{aligned}$$

so lässt sich jedes Integral erster Ordnung und erster Gattung, welches durch eine Transformation vierten Grades auf ein elliptisches reducirbar ist, durch eine lineare Transformation auf die Form bringen

$$\text{Const.} \int \frac{dx}{\sqrt{R(x;\, \lambda, \mu, \nu)}},$$

und zwar ist:

$$(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{R(x;\, \lambda, \mu, \nu)}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{R_1(z;\, \lambda, \mu, \nu)}}, \\ \text{wo:} \\ R_1(z;\, \lambda, \mu, \nu) = (\lambda z - 2\nu)\,[\nu' z^3 - 3(9\lambda^2\nu' - 6\mu\nu' - \lambda\mu')z^2 \\ \qquad + 12(9\lambda\nu\nu' + 3\mu'\nu + \lambda'\mu)z + 12\nu\,(3\mu\mu' - \lambda\lambda')] \\ \text{und} \\ \qquad z = \dfrac{\lambda x^4 + 4\lambda\nu x + 3\mu\nu}{\lambda x^2 + 2\lambda^2 x + \left(\frac{3\lambda\mu - \nu}{2}\right)}. \end{cases}$$

Die Anzahl der willkürlichen Parameter lässt sich auf zwei reduciren, wenn man setzt:

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = a, \quad \frac{\nu}{\lambda^3} = b, \quad x = \lambda t.$$

Hieraus erhält man dann das zweite Integral auf folgende Weise:

Aus den Gleichungen (23) folgt:

$$(26)\quad \begin{cases} 3\lambda\lambda' - 9\mu\mu' - 27\nu\nu' + 1 = 0, \\ \lambda + 6\mu\lambda' + 9\mu'\nu = 0, \\ \lambda' + 6\mu'\lambda + 9\mu\nu' = 0. \end{cases}$$

Es ist daher erlaubt, in (25) gleichzeitig λ mit λ', μ mit μ', ν mit ν' zu vertauschen; ersetzt man überdies x durch $\frac{1}{x}$, so geht (25) über in:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x;\ \lambda, \mu, \nu)}} = -\frac{\sqrt{\lambda'}}{2} \int \frac{dz'}{\sqrt{R_1(z';\lambda', \mu', \nu')}},$$

wobei:

$$z' = \frac{\lambda' + 4\lambda'\nu' x^3 + 3\mu'\nu' x^4}{\lambda' x^2 + 2\lambda'^2 x^3 + \left(\frac{3\lambda'\mu' - \nu'}{2}\right) x^4}.$$

Göttingen, October 1886.

Berichtigung.

In dem Aufsatze von G. Pick (Zur Theorie der elliptischen Functionen) soll Formel II (p. 313) folgendermassen lauten:

$$\wp' u = \frac{6a_k a_x a_y \cdot a_k a_x^2 \cdot a_k a_y^2 - 3a_k^2 a_x \cdot a_k a_y^2 \cdot a_x^2 a_y - 3a_k^2 a_y \cdot a_k a_x^2 \cdot a_x a_y^2 + a_k^3 \cdot a_x^2 a_y \cdot a_x a_y^2}{3(kxy)^3}.$$

Das Clebsch'sche Sechseck.

Von

H. Schroeter in Breslau.

A. Clebsch hat in der Abhandlung: „Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die Theorie des ebenen Fünfecks“ (Math. Ann. Bd. IV, S. 284) gelegentlich der Untersuchung einer speciellen Fläche dritten Grades (§ 17, S. 336) auf ein merkwürdiges ebenes Sechseck aufmerksam gemacht, welches auf zehn Arten ein Brianchonsches Sechsseit liefert. Aus dem a. a. O. gegebenen analytischen Nachweise für die reelle Existenz dieser interessanten Figur ist zwar eine Construction derselben abzuleiten, aber nicht weiter ausgeführt. Herr F. Klein ist in seinen „Untersuchungen über das Ikosaeder“ (Math. Ann. Bd. XII, S. 531) sowie in dem Werke: „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ (Leipzig 1884 S. 218, Fussnote) auf dieses Clebsch'sche Sechseck zurückgekommen, und hat in der räumlichen Figur des Ikosaeders eine Quelle erkannt, aus welcher die Eigenschaften dieses merkwürdigen ebenen Sechsecks abgeleitet werden können. Auf dieselbe Quelle ist auch Herr Hess in seinem Buche: „Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung“ (Leipzig 1883) gekommen (S. 422 ff.). Es dürfte trotzdem nicht ohne Interesse sein, in dem Operationsfelde der Ebene allein und auf synthetisch-geometrischem Wege die Construction des Clebsch'schen Sechsecks und seine zahlreichen Eigenschaften herzuleiten. Dies gelingt mit Hülfe der Betrachtung von zwei in mehrfacher Weise gleichzeitig perspectiv liegenden Dreiecken, und dieser Zusammenhang soll im Folgenden dargelegt werden.*)

---

*) Während der Redaction des nachfolgenden Aufsatzes kam mir durch die freundliche Vermittelung von Herrn F. Klein die im Druck befindliche Abhandlung von Herrn E. Hess: „Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder“ (Math. Annalen Bd. XXVIII) zu Gesicht, welche denselben Gegenstand behandelt und insbesondere in § 6: „Ueber das zehnfach

1. In dem Aufsatze des Verfassers: „Ueber perspectiv liegende Dreiecke" (Math. Ann. Bd. II, S. 555) ist der Satz bewiesen:

Wenn zwei Dreiecke 123 und 456 auf zwei Arten gleichzeitig perspectiv liegen, von denen die eine aus der andern durch cyklische Permutation der Ecken des einen Dreiecks hervorgeht, so liegen sie noch auf eine dritte Art perspectiv, die der dritten cyklischen Permutation derselben Classe entspricht, d. h. aus den beiden perspectiven Lagen

$$\frac{1\ 2\ 3}{4\ 5\ 6} \qquad \frac{1\ 2\ 3}{5\ 6\ 4}$$

wo |14| |25| |36| sich in einem Punkte schneiden und
|15| |26| |34| „ „ „ „ „

folgt die dritte perspective Lage:

$$\frac{1\ 2\ 3}{6\ 4\ 5}$$

wo |16| |24| |35| sich in einem Punkte schneiden.

Man kann nun, wie a. a. O. gezeigt ist, für dieselben beiden Dreiecke noch eine vierte perspective Lage fordern:

$$\frac{1\ 2\ 3}{4\ 6\ 5}.$$

dann sind bei willkürlicher Annahme der Punkte 1 2 3 4 die Punkte 5 und 6 nicht mehr frei, sondern auf gewisse Kegelschnitte angewiesen; verlangt man noch eine fünfte perspective Lage derselben beiden Dreiecke, woraus dann die sechste als Folge hervorgeht, so werden zwar 5 und 6 bestimmt, aber imaginär.

Die möglich-höchste Anzahl perspectiver Lagen von zwei reellen Dreiecken ist also vier, unter denen eine die Folge zweier anderen ist.

Verlangen wir die drei perspectiven Lagen:

$$\underset{\mathrm{I}}{\frac{1\ 2\ 3}{4\ 5\ 6}} \qquad \underset{\mathrm{II}}{\frac{1\ 2\ 3}{6\ 5\ 4}} \qquad \underset{\mathrm{III}}{\frac{1\ 2\ 3}{5\ 4\ 6}}$$

Brianchon'sche Sechseck" (von mir Clebsch'sches Sechseck benannt) die schon von Clebsch und F. Klein ausgesprochenen Eigenschaften der Figur auf analytisch-geometrischem Wege herleitet. Da ich den wesentlich verschiedenen synthetisch-geometrischen Weg eingeschlagen habe und mich auf die Figur des Clebsch'schen Sechsecks allein beschränke, dieselbe aber möglichst vollständig untersuche, während Herr Hess „darauf verzichtet, weitere Lagenbeziehungen für diese interessante Figur nachzuweisen", so glaube ich trotz der Uebereinstimmung der Resultate auf die Veröffentlichung meiner gleichzeitigen Untersuchung nicht verzichten zu müssen. H. S.

aus denen die vierte

$$\frac{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 5\end{matrix}}{\mathrm{IV}}$$

folgt, und bezeichnen durch I II III IV die Perspectivitätscentra, dann bleibt bei willkürlicher Annahme von 1 2 3 4 für die beiden übrigen Punkte 5 und 6 noch ein gewisser Spielraum, über den wir so verfügen können, dass zwar nicht dieselben beiden Dreiecke eine weitere perspective Lage haben, wohl aber aus denselben 6 Punkten 1 2 3 4 5 6 zwei neue Dreiecke in perspectiver Lage sich bilden lassen.

Wählen wir auf $|1\,4|$ den Punkt I willkürlich, so sind die Punkte 5 und 6 eindeutig bestimmt; denn da I auf $|2\,5|$ liegt und II ebenfalls, II aber auch auf $|3\,4|$ liegt, so ist

$$(2\,\mathrm{I},\ 3\,4) = \mathrm{II}$$

und da I auf $|3\,6|$ liegt und III ebenfalls, III aber auch auf $|2\,4|$ liegt, so ist

$$(3\,\mathrm{I},\ 2\,4) = \mathrm{III}$$

und den übrigen Bedingungen gemäss wird also

$$\left.\begin{matrix}(1\,\mathrm{III},\ 2\,\mathrm{II}) = 5\\ (1\,\mathrm{II},\ 3\,\mathrm{III}) = 6\end{matrix}\right\};$$

wir haben also aus den willkürlich gewählten vier Punkten 1 2 3 4 und bei willkürlicher Annahme von I auf $|1\,4|$ solche sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 construirt, für welche die oben verlangte dreifach-perspective Lage stattfindet, woraus die vierte perspective Lage IV folgt.

Wir vereinfachen noch die Construction, indem wir bemerken, dass von dem vollständigen Viereck 2 3 II III zwei Diagonalpunkte

$$(2\,\mathrm{II},\ 3\,\mathrm{III}) = \mathrm{I}, \qquad (2\,\mathrm{III},\ 3\,\mathrm{II}) = 4$$

sind; bezeichnen wir den dritten Diagonalpunkt

$$(2\,3,\ \mathrm{II}\,\mathrm{III}) = \mathfrak{o}$$

so wird der zu $\mathfrak{o}$ zugeordnete vierte harmonische Punkt zu $2\,3\,\mathfrak{o}$ auf der Verbindungslinie der beiden ersten Diagonalpunkte, d. h. auf $|\mathrm{I}\,4| = |1\,4|$ liegen müssen; ist also

$$(1\,4,\ 2\,3) = \mathfrak{o}',$$

so sind $2\,3\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}$ vier harmonische Punkte. Da wir aber die vier Punkte 1 2 3 4 als willkürlich gegeben angenommen haben, so ist auch der von ihnen allein abhängige Punkt $\mathfrak{o}'$ und mithin auch $\mathfrak{o}$ als ein gegebener anzusehen und leicht zu construiren. Ein beliebiger durch $\mathfrak{o}$ gezogener Strahl treffe

$$|3\,4| \text{ in } \mathrm{II},$$
$$|2\,4| \text{ in } \mathrm{III},$$

dann ist

$$(1\,\mathrm{III},\ 2\,\mathrm{II}) = 5, \qquad (1\,\mathrm{II},\ 3\,\mathrm{III}) = 6.$$

In der Willkürlichkeit des um $\mathfrak{o}$ zu drehenden Strahles liegt der Spielraum, welcher für die Punkte 5 und 6 bleibt.

Bemerken wir noch, dass die beiden Dreiecke

$$\frac{\begin{matrix}\mathrm{I} & 2 & 3\\ 1 & \mathrm{III} & \mathrm{II}\end{matrix}}{4}$$

perspectiv liegen in Bezug auf das Centrum 4, so folgt aus dem Desargues'schen Satze, dass die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten:

$$(\mathrm{I}\,2,\ 1\,\mathrm{III}) = 5;\quad (\mathrm{I}\,3,\ 1\,\mathrm{II}) = 6;\quad (2\,3,\ \mathrm{II}\,\mathrm{III}) = \mathfrak{o}$$

also die drei Punkte:

$$5\ 6\ \mathfrak{o}$$

auf einer Geraden liegen müssen. Bei der Veränderung des willkürlichen Punktes I auf der festen Geraden $|14|$ werden sich daher die Punkte 5 und 6 beide verändern, aber so, dass die Verbindungslinie $|56|$ durch den festen Punkt $\mathfrak{o}$ läuft.

2. Die aus den vier willkürlich angenommenen Punkten 1 2 3 4 auf die beschriebene Weise construirten Punkte 5 und 6, welche so liegen, dass die vier Perspectivitäten:

$$\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 4\ 5\ 6\end{matrix}}{\mathrm{I}}\qquad \frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 6\ 5\ 4\end{matrix}}{\mathrm{II}}\qquad \frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 5\ 4\ 6\end{matrix}}{\mathrm{III}}\qquad \frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 4\ 6\ 5\end{matrix}}{\mathrm{IV}}$$

erfüllt werden, besitzen noch eine Willkürlichkeit, über die wir so verfügen wollen, dass die neue Perspectivität

$$\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 4\\ 5\ 3\ 6\end{matrix}}{\mathrm{V}}$$

erfüllt wird. Bezeichnen wir das neue Perspectivitätscentrum $\mathrm{V} = \mathfrak{x}$, also den Schnittpunkt

$$(2\,3,\ 1\,\mathrm{III}) = \mathfrak{x},$$

dann tritt für denselben nur noch die einzige Bedingung hinzu, dass

$$4\ 6\ \mathfrak{x}$$

auf einer Geraden liegen sollen, und hieraus ergiebt sich diejenige Bedingung, welche zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{x}$ führt.

Bemerken wir nämlich, dass der Punkt

$$(2\,3,\ 1\,4) = \mathfrak{o}'$$

bezeichnet wurde und projiciren die vier Punkte 3 2 $\mathfrak{o}'$ $\mathfrak{x}$ von 4 aus

auf $|36|$, so erhalten wir die vier Punkte 3 III I 6, also die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(3\,2\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{x}) = (3\,\mathrm{III}\,\mathrm{I}\,6).$$

Da ferner $3\,2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'$ vier harmonische Punkte sind, also $(3\,2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}') = -1$ ist, so folgt durch Multiplication:

$$-(3\,2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}) = (3\,\mathrm{III}\,\mathrm{I}\,6);$$

projiciren wir aber die Punkte 3 III I 6 von 5 aus auf $|23|$, so erhalten wir $3\,\mathfrak{x}\,2\,\mathfrak{o}$, also die Bedingung zwischen den Doppelverhältnissen:

$$(3\,2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}) + (2\,\mathfrak{o}\,3\,\mathfrak{x}) = 0$$

welche nur die festen Punkte $2\,3\,\mathfrak{o}$ und den gesuchten Punkt $\mathfrak{x}$ enthält und zur Bestimmung desselben dient. Ist der Punkt $\mathfrak{x}$ durch diese Bedingung ermittelt, worauf wir sogleich zurückkommen, dann ergeben sich die beiden Punkte 5 und 6 durch die Construction:

$$\begin{aligned}
(1\,\mathfrak{x},\ 2\,4) &= \mathrm{III},\\
(4\,\mathfrak{x},\ 3\,\mathrm{III}) &= 6,\\
(1\,6,\ 3\,4) &= \mathrm{II},\\
(1\,\mathfrak{x},\ 2\,\mathrm{II}) &= 5
\end{aligned}$$

und das Sechseck 1 2 3 4 5 6, von dem die vier ersten Ecken willkürlich angenommen sind, ist hergestellt.

Es bleibt jetzt noch übrig, aus der Bedingung

$$(3\,2\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}) + (2\,\mathfrak{o}\,3\,\mathfrak{x}) = 0$$

den Punkt $\mathfrak{x}$ zu bestimmen; dies kann auf algebraischem Wege geschehen, indem wir den Werth des Doppelverhältnisses

$$(2\,3\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}) = x$$

setzen und die Gleichung erhalten:

$$\frac{1}{x} + 1 - x = 0$$

oder

$$x^2 - x - 1 = 0$$

welche die beiden reellen Wurzeln $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ hat, oder durch Construction, die auf folgende Weise bewerkstelligt werden kann; der Deutlichkeit wegen wählen wir aber zur Construction eine abgeänderte Bezeichnung und behandeln die vorliegende Frage als eine besondere *Aufgabe:*

Es sind auf einem geradlinigen Träger g drei Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ gegeben; es soll ein vierter Punkt $\mathfrak{x}$ auf g so bestimmt werden, dass die Bedingung zwischen den Doppelverhältnissen erfüllt wird:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}) + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}) = 0.$$

Bestimmen wir zunächst zu den drei Punkten $\mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}$ den zu $\mathfrak{a}$ zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{a}_1$, so dass

$$(\mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_1) = -1$$

ist, dann wird, weil

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{x})\ (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}),$$

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}) = -(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x})$$

ist, die vorige Bedingung:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}).$$

Projiciren wir sodann aus irgend einem Punkte $\mathfrak{O}$ der Ebene die Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1$ der Geraden g auf eine neue Gerade g' nach $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{a}_1'$ in der Art, dass $\mathfrak{a}'$ in die Unendlichkeit geht, d. h. $|\mathfrak{O}\mathfrak{a}|$ parallel g' wird, dann wird $\mathfrak{a}_1'$ die Mitte zwischen $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ wegen der harmonischen Beziehung, und die Bedingung zwischen den Doppelverhältnissen vereinfacht sich dergestalt, dass

$$(\infty\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'\ \mathfrak{x}') = (\mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'\ \mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{x}')$$

d. h.

$$\frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'} = \frac{\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_1'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{a}_1'} \cdot \frac{\mathfrak{c}'\mathfrak{x}'}{\mathfrak{b}'\mathfrak{x}'} = \frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{c}'}{\mathfrak{b}'\mathfrak{x}'}$$

oder

$$(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{x}')^2 = \mathfrak{c}'\,\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}'$$

wird, d. h. die Strecke $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$ wird in dem Punkte $\mathfrak{x}'$ gemäss der sogenannten sectio divina getheilt, eine Construction, die in bekannter elementar-geometrischer Weise ausgeführt wird und zu zwei immer reellen Punkten führt*). Ihre Projectionen von $\mathfrak{O}$ auf die Gerade g liefern die gesuchten beiden Punkte $\mathfrak{x}$ als Lösungen der Aufgabe.

---

*) Errichtet man in $\mathfrak{c}'$ auf $|\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'|$ ein Perpendikel und macht es gleich der Hälfte von $|\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'|$ also

$$\mathfrak{c}'\,\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}',$$

beschreibt um $\mathfrak{m}$ einen Kreis mit dem Radius $\mathfrak{m}\,\mathfrak{c}'$ und zieht die Gerade $\mathfrak{b}'\mathfrak{m}$, welche den Kreis in $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ schneidet, trägt alsdann auf dem Träger g' die Strecke $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{x}' = \mathfrak{b}'\,\mathfrak{y}'$ in der Richtung von $|\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'|$ auf, die Strecke $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{x}'' = \mathfrak{b}'\,\mathfrak{y}''$ in der

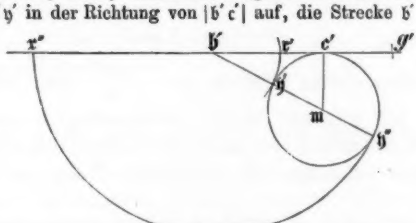


Fig. 1.

entgegengesetzten Richtung (von $|\mathfrak{c}'\,\mathfrak{b}'|$) ab, so sind $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ die gesuchten Punkte (Fig. 1). Der eine von ihnen liegt zwischen $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$, der andere ausserhalb dieser Strecke, und sie sind durch die Beziehung

3. Wir haben in dem Vorhergehenden ein Sechseck **1 2 3 4 5 6** hergestellt, dessen sechs Ecken den fünf Perspectivitäten Genüge leisten:

$$\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{4\,5\,6}\\ \mathrm{I}\end{array}\quad\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{6\,5\,4}\\ \mathrm{II}\end{array}\quad\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{5\,4\,6}\\ \mathrm{III}\end{array}\quad\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{4\,6\,5}\\ \mathrm{IV}\end{array}\quad\begin{array}{c}1\,2\,4\\ \underline{5\,3\,6}\\ \mathrm{V}\end{array}\;;$$

aus diesen lassen sich vermöge des anfänglichen Satzes (in 1.) weitere Perspectivitäten folgern, die wir vollständig zusammenstellen wollen.

Es lässt sich jede Perspectivität zweier Dreiecke vierfach darstellen, indem man ohne das Perspectivitätscentrum zu ändern immer zwei entsprechende Ecken der beiden Dreiecke mit einander vertauscht.

Wir haben auf diese Weise:

$$\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{4\,5\,6}\\ \mathrm{I}\end{array} & \begin{array}{c}1\,2\,6\\ \underline{4\,5\,3}\\ \mathrm{I}\end{array} & \begin{array}{c}1\,5\,3\\ \underline{4\,2\,6}\\ \mathrm{I}\end{array} & \begin{array}{c}4\,2\,3\\ \underline{1\,5\,6}\\ \mathrm{I}\end{array}\\
\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{6\,5\,4}\\ \mathrm{II}\end{array} & \begin{array}{c}1\,2\,4\\ \underline{6\,5\,3}\\ \mathrm{II}\end{array} & \begin{array}{c}1\,5\,3\\ \underline{6\,2\,4}\\ \mathrm{II}\end{array} & \begin{array}{c}6\,2\,3\\ \underline{1\,5\,4}\\ \mathrm{II}\end{array}\\
\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{5\,4\,6}\\ \mathrm{III}\end{array} & \begin{array}{c}1\,2\,6\\ \underline{5\,4\,3}\\ \mathrm{III}\end{array} & \begin{array}{c}1\,4\,3\\ \underline{5\,2\,6}\\ \mathrm{III}\end{array} & \begin{array}{c}5\,2\,3\\ \underline{1\,4\,6}\\ \mathrm{III}\end{array}\\
\begin{array}{c}1\,2\,3\\ \underline{4\,6\,5}\\ \mathrm{IV}\end{array} & \begin{array}{c}1\,2\,5\\ \underline{4\,6\,3}\\ \mathrm{IV}\end{array} & \begin{array}{c}1\,6\,3\\ \underline{4\,2\,5}\\ \mathrm{IV}\end{array} & \begin{array}{c}4\,2\,3\\ \underline{1\,6\,5}\\ \mathrm{IV}\end{array}\\
\begin{array}{c}1\,2\,4\\ \underline{5\,3\,6}\\ \mathrm{V}\end{array} & \begin{array}{c}1\,2\,6\\ \underline{5\,3\,4}\\ \mathrm{V}\end{array} & \begin{array}{c}1\,3\,4\\ \underline{5\,2\,6}\\ \mathrm{V}\end{array} & \begin{array}{c}5\,2\,4\\ \underline{1\,3\,6}\\ \mathrm{V}\end{array}\;.
\end{array}$$

Aus zwei solchen Perspectivitäten, bei denen die Reihenfolge der Ecken des einen Dreiecks eine cyklisch fortschreitende Permutation zeigt, ergiebt sich allemal eine dritte Perspectivität, also aus

$$\begin{array}{c}1\,2\,4\\ \underline{6\,5\,3}\\ \mathrm{II}\end{array}\quad\begin{array}{c}1\,2\,4\\ \underline{5\,3\,6}\\ \mathrm{V}\end{array}\quad \text{folgt:}\quad\begin{array}{c}1\,2\,4\\ \underline{3\,6\,5}\\ \mathrm{VI}\end{array}$$

$$\mathfrak{b}'\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{b}'\mathfrak{x}'' + \mathfrak{c}'\mathfrak{x}'\;\mathfrak{c}'\mathfrak{x}'' = 0$$

mit einander verbunden. Gewöhnlich wird nur der eine Punkt $\mathfrak{x}'$ als den goldenen Schnitt liefernd aufgefasst, während beide $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ die gleiche Berechtigung haben (siehe Baltzer's Elemente der Mathematik § 11, 6).

aus

$$\begin{array}{cccc} 1\;2\;6 & 1\;2\;6 & & 1\;2\;6 \\ \underline{4\;5\;3} & \underline{5\;3\;4} & \text{folgt:} & \underline{3\;4\;5} \\ \mathrm{I} & \mathrm{V} & & \mathrm{VII} \end{array}$$

aus

$$\begin{array}{cccc} 1\;3\;6 & 1\;3\;6 & & 1\;3\;6 \\ \underline{4\;5\;2} & \underline{5\;2\;4} & \text{folgt:} & \underline{2\;4\;5} \\ \mathrm{IV} & \mathrm{V} & & \mathrm{VIII} \end{array}$$

aus

$$\begin{array}{cccc} 1\;4\;5 & 1\;4\;5 & & 1\;4\;5 \\ \underline{6\;3\;2} & \underline{3\;2\;6} & \text{folgt:} & \underline{2\;6\;3} \\ \mathrm{II} & \mathrm{VII} & & \mathrm{IX} \end{array}$$

und aus

$$\begin{array}{cccc} 1\;4\;3 & 1\;4\;3 & & 1\;4\;3 \\ \underline{5\;2\;6} & \underline{2\;6\;5} & \text{folgt:} & \underline{6\;5\;2} \\ \mathrm{III} & \mathrm{IX} & & \mathrm{X}\;. \end{array}$$

Wenn wir diese Operation weiter fortsetzen, so treten keine neuen Perspectivitäten mehr auf, sondern es kehren die bereits gefundenen immer wieder. Den Grund hiervon erkennen wir sofort, wenn wir die erhaltenen zehn Perspectivitäten jetzt zu einer Tabelle (A) zusammenstellen, indem wir auch jede der neu gefundenen Perspectivitäten VI VII VIII IX X auf vierfache Art darstellen.

Dies ergiebt die folgende Tabelle:

(A)

I	II	III	IV	V
1 2 3 4 5 6	1 2 3 6 5 4	1 2 3 5 4 6	1 2 3 4 6 5	1 2 4 5 3 6
1 2 6 4 5 3	1 2 4 6 5 3	1 2 6 5 4 3	1 2 5 4 6 3	1 2 6 5 3 4
1 5 3 4 2 6	1 5 3 6 2 4	1 4 3 5 2 6	1 6 3 4 2 5	1 3 4 5 2 6
1 5 6 4 2 3	1 5 4 6 2 3	1 4 6 5 2 3	1 6 5 4 2 3	1 3 6 5 2 4

VI	VII	VIII	IX	X
1 2 4 3 6 5	1 2 6 3 4 5	1 3 6 2 4 5	1 4 5 2 6 3	1 3 4 6 2 5
1 2 5 3 6 4	1 2 5 3 4 6	1 3 5 2 4 6	1 4 3 2 6 5	1 3 5 6 2 4
1 6 4 3 2 5	1 4 6 3 2 5	1 4 6 2 3 5	1 6 5 2 4 3	1 2 4 6 3 5
1 6 5 3 2 4	1 4 5 3 2 6	1 4 5 2 3 6	1 6 3 2 4 5	1 2 5 6 3 4

Der Anblick dieser Tabelle zeigt uns sofort, dass die Zahl der Perspectivitäten hierdurch erschöpft ist, denn aus den sechs Punkten 1 2 3 4 5 6 lassen sich überhaupt nur $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ verschiedene Dreiecke bilden, die zu 10 Paaren complementärer Dreiecke zusammentreten; wenn wir nämlich irgend drei von den sechs Punkten zu Ecken eines Dreiecks machen, so sind die drei übrigen Punkte die Ecken des complementären Dreiecks. Wir haben nun in unserer Tabelle 40 Paare complementärer Dreiecke, von denen aber jedes viermal auftritt, folglich haben wir sämmtliche verschiedene Paare complementärer Dreiecke. Gäbe es nun noch eine weitere Perspectivität zweier complementärer Dreiecke, so müssten zwei solche auf mehr als vier Arten gleichzeitig perspectiv liegen, was bei zwei reellen Dreiecken nicht möglich ist (s. o. 1).

4. Wir können die Paare perspectiver Dreiecke und ihre Perspectivitätscentra nach der Tabelle (A) auch so ordnen:

(B)

Perspective Dreiecke:	Perspectivitätscentra:			
1 2 3 4 5 6	I	II	III	IV
1 2 4 6 3 5	II	V	VI	X
1 2 5 3 6 4	IV	VI	VII	X
1 2 6 5 4 3	I	III	V	VII
1 3 4 5 2 6	III	V	IX	X
1 3 5 6 4 2	I	II	VIII	X
1 3 6 2 5 4	IV	V	VIII	IX
1 4 5 2 3 6	II	VII	VIII	IX
1 4 6 3 2 5	III	VI	VII	VIII
1 5 6 4 3 2	I	IV	VI	IX.

Nennen wir ein solches Sechseck 1 2 3 4 5 6, von dem vier Ecken willkürlich angenommen werden dürfen und die beiden letzten auf die oben (2.) angegebene Art construirt werden, ein Clebsch'sches Sechseck, so lässt sich die Haupteigenschaft desselben folgendermassen aussprechen:

Wenn man aus den sechs Ecken eines Clebsch'schen Sechsecks irgendwie zwei Dreiecke mit verschiedenen Ecken (ein Paar complementärer Dreiecke) bildet, was auf zehn Arten geschehen kann, so liegen dieselben allemal auf vierfache Weise perspectiv d. h. sie befinden sich in der möglichst grössten Anzahl von gleichzeitig-perspectiver Lage zweier reellen Dreiecke. Es treten dabei im Ganzen nur zehn verschiedene Perspectivitätscentra auf, indem für vier verschiedene Dreieckspaare immer ein und dasselbe Perspectivitätscentrum sich ergiebt.

Die zehn Perspectivitätscentra liegen ferner so, dass sie paarweise auf den 15 Verbindungslinien der Punkte 1 2 3 4 5 6 sich befinden, nämlich:

$$
(\mathrm{C})\quad \begin{cases}
|1\,2| \equiv |\mathrm{VIII}\ \ \mathrm{IX}| \\
|1\,3| \equiv |\mathrm{VI}\ \ \mathrm{VII}| \\
|1\,4| \equiv |\mathrm{I}\ \ \mathrm{IV}| \\
|1\,5| \equiv |\mathrm{III}\ \ \mathrm{V}| \\
|1\,6| \equiv |\mathrm{II}\ \ \mathrm{X}| \\
|2\,3| \equiv |\mathrm{V}\ \ \mathrm{X}| \\
|2\,4| \equiv |\mathrm{III}\ \ \mathrm{VII}| \\
|2\,5| \equiv |\mathrm{I}\ \ \mathrm{II}| \\
|2\,6| \equiv |\mathrm{IV}\ \ \mathrm{VI}| \\
|3\,4| \equiv |\mathrm{II}\ \ \mathrm{VIII}| \\
|3\,5| \equiv |\mathrm{IV}\ \ \mathrm{IX}| \\
|3\,6| \equiv |\mathrm{I}\ \ \mathrm{III}| \\
|4\,5| \equiv |\mathrm{VI}\ \ \mathrm{X}| \\
|4\,6| \equiv |\mathrm{V}\ \ \mathrm{IX}| \\
|5\,6| \equiv |\mathrm{VII}\ \ \mathrm{VIII}|.
\end{cases}
$$

Da jede dieser 15 Verbindungslinien zwei der Perspectivitätscentra enthält und allemal drei Verbindungslinien dasselbe Perspectivitätscentrum enthalten, so giebt es nur $\frac{2\,.\,15}{3} = 10$ Perspectivitätscentra.

Wir erkennen aus dieser Tabelle (C) sofort folgende Eigenschaft:

Jede der 15 Seiten des vollständigen Clebsch'schen Sechsecks (d. h. jede Verbindungslinie zweier der Punkte 1 2 3 4 5 6) *enthält zwei Diagonalpunkte des von den vier übrigen Ecken gebildeten vollständigen Vierecks, und diese Diagonalpunkte fallen zu je dreien zusammen; sie sind die*

zehn Perspectivitätscentra. Es bleibt von jedem solchen Viereck noch ein dritter Diagonalpunkt übrig; diese bilden eine neue Gruppe von 15 *Punkten. Z.* B.

Nehmen wir die Seite |1 2| so hat das vollständige Viereck 3 4 5 6 die drei Diagonalpunkte:

$$(3\,4,\ 5\,6) = \mathrm{VIII}, \qquad (3\,5,\ 4\,6) = \mathrm{IX}, \qquad (3\,6,\ 4\,5),$$

die Diagonalpunkte VIII IX liegen auf |1 2|, der dritte Diagonalpunkt bleibt übrig und soll der zur Seite |12| *zugehörige* heissen. Wir erhalten auf diese Weise die zu den 15 Seiten des Clebsch'schen Sechsecks zugehörigen Punkte:

(D)	zur	Seite	|1 2|	gehört	der	Punkt	(3 6, 4 5)
	„	„	|1 3|	„	„	„	(2 5, 4 6)
	„	„	|1 4|	„	„	„	(2 3, 5 6)
	„	„	|1 5|	„	„	„	(2 6, 3 4)
	„	„	|1 6|	„	„	„	(2 4, 3 5)
	„	„	|2 3|	„	„	„	(1 4, 5 6)
	„	„	|2 4|	„	„	„	(1 6, 3 5)
	„	„	|2 5|	„	„	„	(1 3, 4 6)
	„	„	|2 6|	„	„	„	(1 5, 3 4)
	„	„	|3 4|	„	„	„	(1 5, 2 6)
	„	„	|3 5|	„	„	„	(1 6, 2 4)
	„	„	|3 6|	„	„	„	(1 2, 4 5)
	„	„	|4 5|	„	„	„	(1 2, 3 6)
	„	„	|4 6|	„	„	„	(1 3, 2 5)
	„	„	|5 6|	„	„	„	(1 4, 2 3),

welche die neue Gruppe der 15 Punkte bilden.

Das Clebsch'sche Sechseck hat also nicht wie im Allgemeinen 45 Diagonalpunkte (d. h. Schnittpunkte je zweier der 15 Seiten ausser den 6 Eckpunkten) sondern nur 25 verschiedene Diagonalpunkte, indem zehnmal je drei zusammenfallen, welche die Gruppe (A) der 10 Perspectivitätscentra bilden, und 15 Diagonalpunkte übrig bleiben, welche die zweite Gruppe (D) der den Seiten zugehörigen Punkte bilden.

Da sich zwei perspectiv liegende Dreiecke immer als ein einfaches Brianchon'sches Sechsseit auffassen lassen und zwar auf vierfache Weise, so kann das Clebsch'sche Sechseck auch als eine Figur von 6 Punkten der Ebene in der eigenthümlichen Lage aufgefasst werden, dass von den 60 einfachen Secksecken, welche im Allgemeinen aus 6 Punkten sich bilden lassen, 40 Brianchon'sche Sechsseite sind, die übrigen 20 nicht.

Es folgen z. B. aus der Perspectivität der beiden Dreiecke:

$$\frac{1\ 2\ 3}{4\ 5\ 6}$$

die vier Brianchon'schen Sechsseite:

1 2 3 4 5 6
1 2 6 4 5 3
1 5 3 4 2 6
1 5 6 4 2 3

deren drei Paar Gegenecken 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 sind.

Hiernach sind die 40 Brianchon'schen Sechsseite folgende:

1 2 3 4 5 5	1 2 4 3 6 5
1 2 6 4 5 3	1 2 5 3 6 4
1 5 3 4 2 6	1 6 4 3 2 5
1 5 6 4 2 3	1 6 5 3 2 4
1 2 3 6 5 4	1 2 6 3 4 5
1 2 4 6 5 3	1 2 5 3 4 6
1 5 3 6 2 4	1 4 6 3 2 5
1 5 4 6 2 3	1 4 5 3 2 6
1 2 3 5 4 6	1 3 6 2 4 5
1 2 6 5 4 3	1 3 5 2 4 6
1 4 3 5 2 6	1 4 6 2 3 5
1 4 6 5 2 3	1 4 5 2 3 6
1 2 3 4 6 5	1 4 5 2 6 3
1 2 5 4 6 3	1 4 3 2 6 5
1 6 3 4 2 5	1 6 5 2 4 3
1 6 5 4 2 3	1 6 3 2 4 5
1 2 4 5 3 6	1 3 4 6 2 5
1 2 6 5 3 4	1 3 5 6 2 4
1 3 4 5 2 6	1 2 4 6 3 5
1 3 6 5 2 4	1 2 5 6 3 4.

Betrachten wir auf der Seite |1 2| des Clebsch'schen Sechsecks die beiden Diagonalpunkte (Perspectivitätscentra) der Gruppe (A)

$$\mathrm{VIII} = (3\,4,\ 5\,6), \qquad \mathrm{IX} = (3\,5,\ 4\,6)$$

und die beiden auf |1 2| liegenden Punkte der Gruppe (D):

$$(1\,2,\ 4\,5) \quad \text{und} \quad (1\,2,\ 3\,6),$$

so erkennen wir aus dem vollständigen Viereck

3 4 5 6

von welchem VIII und IX zwei Diagonalpunkte sind, die durch das dritte Seitenpaar |4 5| und |3 6| harmonisch getrennt werden, folgende Eigenschaft:

Das Clebsch'sche Sechseck hat 25 *Diagonalpunkte* (*s. o.* 4.), *welche in zwei Gruppen von* 10 (A) *und* 15 (*D*) *zerfallen; auf jeder der* 15 *Seiten des Sechsecks liegen zwei Diagonalpunkte der ersten Gruppe* (A) *und zwei Diagonalpunkte der zweiten Gruppe* (D); *das eine Paar wird durch das andere harmonisch getrennt.*

5. Wir wollen nunmehr zuerst die weiteren Lagenbeziehungen der 10 Punkte (A) (Perspectivitätscentra) unter sich und sodann die Lage der 15 Punkte (D) zu einander aufsuchen, endlich den Zusammenhang der Punkte beider Gruppen näher ins Auge fassen.

Nehmen wir nämlich ein Paar complementärer Dreiecke heraus z. B.

$$\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 4\ 5\ 6\end{matrix}}{},$$

so erhalten wir aus der vierfach perspectiven Lage derselben die vier Perspectivitätscentra:

$$\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 4\ 5\ 6\end{matrix}}{\mathrm{I}}\qquad\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 6\ 5\ 4\end{matrix}}{\mathrm{II}}\qquad\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 5\ 4\ 6\end{matrix}}{\mathrm{III}}\qquad\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 4\ 6\ 5\end{matrix}}{\mathrm{IV}}$$

und die übrigen sechs Perspectivitätscentra müssen paarweise sowohl auf den Seiten des ersten Dreiecks 1 2 3, als auch auf den Seiten des zweiten Dreiecks 4 5 6 liegen, was auch in der That die Tabelle (C) zeigt. Da aber nach dem Desargues'schen Satze bei zwei perspectiven Dreiecken:

$$\frac{\begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 4\ 5\ 6\end{matrix}}{}$$

die drei Durchschnittspunkte entsprechender Seiten:

(1 2, 4 5) (1 3, 4 6) (2 3, 5 6)

auf einer geraden Linie liegen und diese Punkte identisch sind mit

(VIII IX, X VI) (IX V, VI VII) (V X, VII VIII),

so bilden die sechs Punkte:

VIII IX V X VI VII

ein Pascal'sches Sechseck und liegen auf einem Kegelschnitt. Wir erhalten daher den Satz:

Bilden wir aus den sechs Ecken des Clebsch'schen Sechsecks irgend zwei complementäre Dreiecke, so liegen dieselben auf vierfache Weise

perspectiv (B) *und haben also vier Perspectivitätscentra; die jedesmal übrig bleibenden sechs Perspectivitätscentra liegen allemal auf einem Kegelschnitt.*

Wir erhalten hiernach 10 Kegelschnitte, auf deren jedem sechs der Perspectivitätscentra liegen, nämlich:

(E)	V	VI	VII	VIII	IX	X	auf einem Kegelschnitt
	I	III	IV	VII	VIII	IX	„ „ „
	I	II	III	V	VIII	IX	„ „ „
	II	IV	VI	VIII	IX	X	„ „ „
	I	II	IV	VI	VII	VIII	„ „ „
	III	IV	V	VI	VII	IX	„ „ „
	I	II	III	VI	VII	X	„ „ „
	I	III	IV	V	VI	X	„ „ „
	I	II	IV	V	IX	X	„ „ „
	II	III	V	VII	VIII	X	„ „ „

Durch jedes der 10 Perspectivitätscentra gehen sechs dieser Kegelschnitte.

Wir können den Satz auch so aussprechen:

Bilden wir aus irgend drei Ecken des Clebsch'schen Sechsecks ein Dreieck, so enthält jede Seite desselben zwei von den zehn Perspectivitätscentren; solche sechs Perspectivitätscentren liegen allemal auf einem Kegelschnitt, und wir erhalten dadurch 10 *Kegelschnitte, indem dieselben für zwei complementäre Dreiecke identisch sind.*

6. Die Tabelle (C) gruppirt die zehn Perspectivitätscentra zu 15 Paaren, so dass jedes der ersteren in drei Paaren gleichzeitig auftritt; nehmen wir ein beliebiges Paar heraus, so bleiben noch 8 Perspectivitätscentra übrig, die in einem weiteren Zusammenhange stehen.

Nehmen wir z. B. das Paar I II heraus, so bleiben die 8 Punkte übrig:

III IV V VI VII VIII IX X;

von diesen liegen einmal sechs auf einem Kegelschnitt der Tabelle (E) und lassen die beiden übrig:

III und IV

und zum andern Mal sechs auf einem Kegelschnitt der Tabelle (E) und lassen die beiden übrig:

VIII und X;

nehmen wir diese vier Punkte aus den obigen acht heraus, so bleiben vier Punkte übrig, welche beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich sind und zwar solche, die in zwei Paaren der Tabelle (C) auftreten:

VI und VII

V und IX,

wodurch sich die acht anfänglichen Punkte auf bestimmte Weise zu vier Paaren gruppiren.

Da nun

$$|\mathrm{VI}\ \mathrm{VII}| = |1\,3|, \qquad |\mathrm{V}\ \mathrm{IX}| = |4\,6|$$

ist, so folgt aus der Perspectivität der beiden Dreiecke:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ \underline{4} & \underline{6} & \underline{2} \end{array}$$

nach dem Desargues'schen Satze, dass die drei Punkte:

$$(1\,3,\ 4\,6) \qquad (1\,5,\ 2\,4) \qquad (3\,5,\ 2\,6)$$

oder

$$(\mathrm{VI}\ \mathrm{VII},\ \mathrm{V}\ \mathrm{IX}) \qquad \mathrm{III} \qquad \mathrm{IV}$$

in einer Geraden liegen, d. h.

$$|\mathrm{VI}\ \mathrm{VII}| \qquad |\mathrm{V}\ \mathrm{IX}| \qquad |\mathrm{III}\ \mathrm{IV}|$$

sich in einem Punkte schneiden; andererseits folgt aus der Perspectivität der beiden Dreiecke:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ \underline{6} & \underline{4} & \underline{5} \end{array}$$

nach dem Désargues'schen Satze, dass die drei Punkte:

$$(1\,3,\ 4\,6) \qquad (1\,2,\ 5\,6) \qquad (2\,3,\ 4\,5)$$

oder

$$(\mathrm{VI}\ \mathrm{VII},\ \mathrm{V}\ \mathrm{IX}) \qquad \mathrm{VIII} \qquad \mathrm{X}$$

in einer Geraden liegen, d. h.

$$|\mathrm{VI}\ \mathrm{VII}| \qquad |\mathrm{V}\ \mathrm{IX}| \qquad |\mathrm{VIII}\ \mathrm{X}|$$

sich in einem Punkte schneiden, woraus folgt, dass alle vier Verbindungslinien:

$$|\mathrm{VI}\ \mathrm{VII}| \qquad |\mathrm{V}\ \mathrm{IX}| \qquad |\mathrm{III}\ \mathrm{IV}| \qquad |\mathrm{VIII}\ \mathrm{X}|$$

durch einen und denselben Punkt laufen, nämlich den Punkt:

$$(1\,3,\ 4\,6)$$

welcher zu den Diagonalpunkten der zweiten Gruppe (D) gehört.

Die vier durch diesen Punkt laufenden Strahlen zerfallen in zwei Paare, von denen eines ein Seitenpaar des Clebsch'schen Sechsecks ist, das andere aber nicht; betrachten wir nun das vollständige Viereck:

$$3\ 4\ 6\ \mathrm{VII}$$

so ist von ihm ein Diagonalpunkt:

$$(4\,6,\ 3\,\mathrm{VII}) = (1\,3,\ 4\,6)$$

der zweite:

$$(3\,6,\ 4\,\mathrm{VII}) = (2\,4,\ 3\,6) = \mathrm{III}$$

und der dritte:

$$(3\,4,\ 6\,\mathrm{VII}) = (3\,4,\ 5\,6) = \mathrm{VIII};$$

durch den ersten Diagonalpunkt geht ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks und trennt harmonisch diejenigen beiden Strahlen, welche nach den beiden andern Diagonalpunkten hingehen; sie bilden aber das zweite Strahlenpaar der obigen vier Strahlen, folglich erkennen wir, dass dieselben harmonisch liegen und schliessen demnach folgenden Satz:

Das Clebsch'sche Sechseck hat 25 *Diagonalpunkte, welche in zwei Gruppen von* 10 *Punkten* (A) *und von* 15 *Punkten* (D) *zerfallen. Von den* 45 *Verbindungslinien der* 10 *Punkte der ersten Gruppe* (*Perspectivitätscentra*) *gehen allemal vier durch einen Punkt der zweiten Gruppe und bilden zwei Strahlenpaare, von denen eines ein Seitenpaar des Clebsch'schen Sechsecks ist und durch das andere Paar harmonisch getrennt wird.*

Die auf diese Weise erhaltenen 15 Strahlenquadrupel mit ihren 15 Centren sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{array}{l}
(|\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{III}\,|\ |\,\mathrm{VI}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{VII}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{V}\,|) = (3\,6,\ 4\,5)\\
(|\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{II}\,|\ |\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{VIII}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{X}\,|) = (2\,5,\ 4\,6)\\
(|\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{VII}\ \ \mathrm{VIII}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{III}\,|\ |\,\mathrm{VI}\ \ \mathrm{IX}\,|) = (2\,3,\ 5\,6)\\
(|\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{VI}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{VIII}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{VII}\,|\ |\,\mathrm{IX}\ \ \mathrm{X}\,|) = (2\,6,\ 3\,4)\\
(|\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{VII}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{VIII}\,|\ |\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{VI}\,|) = (2\,4,\ 3\,5)\\
(|\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{IV}\,|\ |\,\mathrm{VII}\ \ \mathrm{VIII}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{VI}\,|\ |\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{IX}\,|) = (1\,4,\ 5\,6)\\
(|\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{V}\,|\ |\,\mathrm{VI}\ \ \mathrm{VIII}\,|) = (1\,6,\ 3\,5)\\
(|\,\mathrm{VI}\ \ \mathrm{VII}\,|\ |\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{IV}\,|\ |\,\mathrm{VIII}\ \ \mathrm{X}\,|) = (1\,3,\ 4\,6)\\
(|\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{V}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{VIII}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{VII}\ \ \mathrm{X}\,|) = (1\,5,\ 3\,4)\\
(|\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{V}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{VI}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{VII}\ \ \mathrm{IX}\,|) = (1\,5,\ 2\,6)\\
(|\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{VII}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{VI}\,|\ |\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{VIII}\,|) = (1\,6,\ 2\,4)\\
(|\,\mathrm{VIII}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{VI}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{IV}\,|\ |\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{VII}\,|) = (1\,2,\ 4\,5)\\
(|\,\mathrm{VIII}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{III}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{V}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{VII}\,|) = (1\,2,\ 3\,6)\\
(|\,\mathrm{VI}\ \ \mathrm{VII}\,|\ |\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{II}\,|\ |\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{IV}\ \ \mathrm{VIII}\,|) = (1\,3,\ 2\,5)\\
(|\,\mathrm{I}\ \ \mathrm{IV}\,|\ |\,\mathrm{V}\ \ \mathrm{X}\,|\ |\,\mathrm{II}\ \ \mathrm{IX}\,|\ |\,\mathrm{III}\ \ \mathrm{VI}\,|) = (1\,4,\ 2\,3).
\end{array}\right.$$

In dieser Tabelle treten sämmtliche $\frac{10\,.\,9}{1\,.\,2} = 45$ Verbindungslinien der 10 Punkte: I II III . . . X auf und zwar die 15 Verbindungslinien, welche gleichzeitig Seiten des Clebsch'schen Sechsecks sind (C) doppelt, alle übrigen einfach. Es liegen also beim Clebsch'schen Sechseck 30 mal zwei Diagonalpunkte der Gruppe (A) mit einem Diagonalpunkte der Gruppe (D) auf je einer Geraden, welche nicht Seite des Sechsecks ist, und es gehen von diesen dreissig Geraden je zwei durch jeden Punkt der Gruppe (D).

7. Wir erkennen weitere Lagenbeziehungen zwischen den 10 Perspectivitätscentren (A), wenn wir nur solche 6 derselben in's Auge fassen, die auf einem Kegelschnitt liegen (Tab. E); nehmen wir z. B. die 6 Punkte

V VI VII VIII IX X

so sehen wir, dass dieselben nur in drei Reihen der Tabelle (F) zusammen auftreten, also dreimal drei Punktepaare liefern, deren Verbindungslinien durch je einen Punkt laufen, nämlich

|V X|	|VI IX|	|VIII VII|	laufen durch den Punkt	(2 3, 5 6)
|V IX|	|VI VII|	|VIII X|	„ „ „ „	(1 3, 4 6)
|V VII|	|VI X|	|VIII IX|	„ „ „ „	(1 2, 4 5);

wir erhalten also zwei Dreiecke, die gleichzeitig auf dreifache Weise perspectiv liegen:

$$\begin{array}{c} \mathrm{V\ VI\ VIII} \\ \underline{\mathrm{X\ IX\ VII}} \\ (2\,3,\ 5\,6) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{V\ VI\ VIII} \\ \underline{\mathrm{IX\ VII\ X}} \\ (1\,3,\ 4\,6) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{V\ VI\ VIII} \\ \underline{\mathrm{VII\ X\ IX}} \\ (1\,2,\ 4\,5) \end{array}$$

und erkennen zugleich aus der Perspectivität der beiden Dreiecke:

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ \underline{4\ 5\ 6} \\ \mathrm{I} \end{array}$$

nach dem Desargues'schen Satze, dass die drei Perspectivitätscentra dieser 3 Dreieckspaare d. h. die drei Punkte

(2 3, 5 6) (1 3, 4 6) (1 2, 4 5)

auf einer Geraden liegen.

Diese drei Dreieckspaare gehen aus einander hervor, indem die Ecken des einen Dreiecks festgehalten werden und die des andern cyklisch fortschreiten, wie es ja sein muss (1).

Die Bildung eines solchen Dreieckspaares geschieht am einfachsten dadurch, dass wir aus den 6 Punkten des Kegelschnitts

V VI VII VIII IX X

diejenigen sechs Verbindungslinien je zweier derselben herausnehmen, welche gleichzeitig Seiten des Clebsch'schen Sechsecks sind und deren nur sechs vorkommen, nämlich (C.):

|VIII IX| |VI VII| |V X| |VI X| |V IX| |VII VIII|.

Diese setzen sich nur in einer einzigen bestimmten Weise zu einem Pascal'schen Sechseck zusammen:

VIII IX V X VI VII;

nehmen wir in diesem Pascal'schen Sechseck einmal die erste, dritte und fünfte Ecke, dann die zweite, vierte und sechste Ecke, so er-

halten wir die beiden Dreiecke, welche dreifach-perspective Lage haben. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn man beim Clebsch'schen Sechseck die 10 *Diagonalpunkte der ersten Gruppe* (A) (*Perspectivitätscentra*) *in's Auge fasst und aus denselben solche sechs herausnimmt, die auf einem Kegelschnitt liegen, was auf zehn Arten geschehen kann* (E), *so lassen sich aus solchen sechs Punkten als Ecken zwei Dreiecke bilden, die gleichzeitig dreifach-perspective Lage haben. Dies ist nur auf eine bestimmte Art möglich; unter den Verbindungslinien solcher sechs Punkte giebt es nämlich nur sechs, die gleichzeitig Seiten des Clebsch'schen Sechsecks sind* (C), *und diese setzen sich auf eine bestimmte Weise zu einem einfachen* (*Pascal'schen*) *Sechseck zusammen; nimmt man in demselben einmal die erste, dritte und fünfte Ecke, dann die zweite, vierte und sechste Ecke, so erhält man die beiden Dreiecke, welche dreifach-perspective Lage haben; ihre drei Perspectivitätscentra sind drei von den Diagonalpunkten der zweiten Gruppe* (D) *des Clebsch'schen Sechsecks und liegen in gerader Linie.*

Auf die dadurch erhaltenen 10 geraden Linien kommen wir bei Betrachtung der zweiten Gruppe von Diagonalpunkten (D) des Clebsch'schen Sechsecks zurück.

Die vollständige Figur der 10 Pascal'schen Sechsecke mit ihren dreifach-perspectiv liegenden Dreieckspaaren liefert folgende Tabelle:

(G)	Pascal'sches Sechseck:	V IX VIII VII VI X		
	Perspective Dreiecke:	V VIII VI	V VIII VI	V VIII VI
		X VII IX	VII IX X	IX X VII
		(2 3, 5 6)	(1 2, 4 5)	(1 3, 4 6)
	Pascal'sches Sechseck:	I III VII VIII IX IV		
	Perspective Dreiecke:	I VII IX	I VII IX	I VII IX
		IV VIII III	VIII III IV	III IV VIII
		(1 4, 5 6)	(2 4, 2 5)	(1 2, 3 6)
	Pascal'sches Sechseck:	I II VIII IX V III		
	Perspective Dreiecke:	I VIII V	I VIII V	I VIII V
		III IX II	IX II III	II III IX
		(1 2, 3 6)	(1 5, 3 4)	(2 5, 46)
	Pascal'sches Sechseck:	II VIII IX IV VI X		
	Perspective Dreiecke:	II IX VI	II IX VI	II IX VI
		X IV VIII	IV VIII X	VIII X IV
		(1 6, 3 5)	(1 2, 4 5)	(2 6, 3 4)

(G)	Pascal'sches Sechseck:	I II VIII VII VI IV		
	Perspective Dreiecke:	I VIII VI	I VIII VI	I VIII VI
		IV VII II	VII II IV	II IV VII
		(1 4, 5 6)	(2 6, 3 4)	(1 3, 2 5)
	Pascal'sches Sechseck:	III V IX IV VI VII		
	Perspective Dreiecke:	III IX VI	III IX VI	III IX VI
		VII IV V	IV V VII	V VII IV
		(2 4, 3 5)	(1 3, 4 6)	(1 5, 2 6)
	Pascal'sches Sechseck:	I II X VI VII III		
	Perspective Dreiecke:	I X VII	I X VII	I X VII
		III VI II	VI II III	II III VI
		(3 6, 4 5)	(1 6, 2 4)	(1 3, 2 5)
	Pascal'sches Sechseck:	I III V X VI IV		
	Perspective Dreiecke:	I V VI	I V VI	I V VI
		IV X III	X III IV	III IV X
		(1 4, 2 3)	(1 5, 2 6)	(3 6, 4 5)
	Pascal'sches Sechseck:	I II X V IX IV		
	Perspective Dreiecke:	I X IX	I X IX	I X IX
		IV V II	V II IV	II IV V
		(1 4, 2 3)	(16, 35)	(4 6, 2 5)
	Pascal'sches Sechseck:	II X V III VII VIII		
	Perspective Dreiecke:	II V VII	II V VII	II V VII
		VIII III X	III X VIII	X VIII III
		(1 5, 3 4)	(2 3, 5 6)	(1 6, 2 4)

Die zehn Geraden, in deren jeder die drei Perspectivitätscentra des dreifach perspectiv liegenden Dreieckspaares sich befinden, sind nichts anderes, als die Pascal'schen Linien des jedesmaligen Sechsecks, in denen die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten liegen. Da jedes dieser $3.10 = 30$ Perspectivitätscentra doppelt auftritt, so reducirt sich die Anzahl derselben auf 15 (Tab. D).

8. Die Diagonalpunkte der zweiten Gruppe (D) des Clebsch'schen Sechsecks ordnen sich, wie wir aus der Tabelle (G) ersehen, zu je dreien auf 10 neuen geraden Linien, die wir dadurch erhalten, dass wir bei jedem der 10 perspectiven Dreieckspaare, wie sie in Tab. (B)

zusammengestellt sind, die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten aufsuchen, welche nach dem Desargues'schen Satze zu je dreien auf einer Geraden liegen. Wir erhalten also die 10 Geraden:

$$(\mathrm{H})\left\{\begin{array}{l}
|(12, 45)\quad (13, 46)\quad (23, 56)| = g_{\mathrm{I}} \\
|(13, 46)\quad (15, 26)\quad (24, 35)| = g_{\mathrm{II}} \\
|(12, 45)\quad (16, 35)\quad (26, 34)| = g_{\mathrm{III}} \\
|(15, 34)\quad (16, 24)\quad (23, 56)| = g_{\mathrm{IV}} \\
|(13, 25)\quad (14, 56)\quad (34, 26)| = g_{\mathrm{V}} \\
|(12, 36)\quad (15, 34)\quad (25, 46)| = g_{\mathrm{VI}} \\
|(14, 23)\quad (16, 35)\quad (25, 46)| = g_{\mathrm{VII}} \\
|(14, 23)\quad (15, 26)\quad (36, 45)| = g_{\mathrm{VIII}} \\
|(13, 25)\quad (16, 24)\quad (36, 45)| = g_{\mathrm{IX}} \\
|(12, 36)\quad (14, 56)\quad (24, 35)| = g_{\mathrm{X}}
\end{array}\right.$$

d. h.

Die 15 *Diagonalpunkte der zweiten Gruppe* (D) *des Clebsch'schen Sechsecks liegen zu je dreien auf* 10 *Geraden* (H), *von denen immer zwei durch jeden der* 15 *Diagonalpunkte gehen.*

Eine weitere Eigenschaft der 15 Diagonalpunkte der zweiten Gruppe (D) des Clebsch'schen Sechsecks ergiebt sich, wenn wir dieselben zu je dreien als die Ecken von fünf Dreiecken ordnen:

$$(\mathrm{J})\left\{\begin{array}{lll}
(12, 45) & (45, 36) & (36, 12) \\
(13, 46) & (46, 25) & (25, 13) \\
(14, 56) & (56, 23) & (23, 14) \\
(15, 26) & (26, 34) & (34, 15) \\
(16, 24) & (24, 35) & (35, 16)
\end{array}\right.$$

wodurch sie gerade erschöpft sind: Betrachten wir nun eines der Brianchon'schen einfachen Sechsecke z. B.

$$1\;2\;5\;4\;6\;3$$

für welches die drei Paar Gegenecken verbunden drei durch denselben Punkt IV laufende Strahlen $|14|$ $|26|$ $|53|$ liefern, so lassen sich die Seiten dieses Brianchon'schen Sechsecks:

$$|12|\quad |25|\quad |54|\quad |46|\quad |63|\quad |31|$$

zu zwei Dreiseiten ordnen:

$$|12|\quad |45|\quad |36|$$

und

$$|13|\quad |46|\quad |25|;$$

wenn aber die Seiten zweier Dreiseite einen Kegelschnitt berühren, so

liegen bekanntlich auch die sechs Ecken derselben auf einem andern Kegelschnitt, folglich liegen die sechs Punkte:

(1 2, 4 5) (4 5, 3 6) (3 6, 1 2)
(1 3, 4 6) (4 6, 2 5) (2 5, 1 3)

auf einem Kegelschnitt d. h. zwei von den 5 Dreiecken (J) haben ihre sechs Ecken auf einem Kegelschnitt, und dies gilt für irgend zwei der 5 Dreiecke (J). Wir erhalten also folgenden Satz:

Ordnet man die 15 *Diagonalpunkte der zweiten Gruppe* (D) *des Clebsch'schen Sechsecks so zu fünf Dreiecken, dass die Seiten jedes Dreiecks zugleich Seiten des Clebsch'schen Sechsecks sind* (Tab. J), *dann liegen die* 6 *Ecken irgend zweier dieser* 5 *Dreiecke allemal auf einem Kegelschnitt. Die* 15 *Diagonalpunkte liegen also zu je sechsen auf* 10 *Kegelschnitten.*

9. Zwischen den 15 Diagonalpunkten der zweiten Gruppe (D) des Clebsch'schen Sechsecks ergeben sich weitere Lagenbeziehungen, wenn wir die in (A) zusammengestellten Perspectivitäten ein wenig umgestalten. Die Perspectivität

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ \underline{4\ 6\ 5} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

lässt sich nämlich, da $|1\,4| \equiv |\mathrm{I}\ \mathrm{IV}|$ ist, (C) auch so schreiben:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}\ 2\ 3 \\ \underline{4\ 6\ 5} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

und zeigt, dass die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten der beiden perspectiven Dreiecke in gerader Linie liegen; diese sind aber, da $|\mathrm{I}\,2| \equiv |2\,5|$ $|\mathrm{I}\,3| \equiv |3\,6|$ ist, die Punkte:

(2 3, 5 6) (2 5, 4 6) (4 5, 3 6)

welche der Gruppe (J) oder (D) angehören.

Ebenso ergiebt die Perspectivität:

$$\begin{array}{c} \mathrm{VI}\ 2\ 5 \\ \underline{3\ \ 4\ \ 6} \\ \mathrm{VII} \end{array}$$

die drei Punkte:

(2 5, 4 6) (4 5, 3 6) (2 6, 3 4)

in gerader Linie, und die Perspectivität:

$$\begin{array}{c} \mathrm{II}\ 3\ 5 \\ \underline{6\ 2\ 4} \\ \mathrm{X} \end{array}$$

die drei Punkte:

$$(2\,6,\ 3\,4)\quad (2\,5,\ 4\,6)\quad (2\,4,\ 3\,5)$$

in gerader Linie. Wir sehen hieraus, dass alle fünf Punkte:

$$(2\,3,\ 5\,6)\quad (2\,4,\ 3\,5)\quad (2\,5,\ 4\,6)\quad (2\,6,\ 3\,4)\quad (3\,6,\ 4\,5),$$

welche sämmtlich der Gruppe (D) angehören, auf einer und derselben Geraden liegen müssen. Diese fünf Punkte sind nun in der Gruppe (D) diejenigen, in deren Bildung der Punkt 1 nicht eingeht, und wir können in gleicher Weise nachweisen, dass allemal solche fünf Punkte der Gruppe (D), in deren Bildung eine der ursprünglichen sechs Ecken des Clebsch'schen Sechsecks nicht eingeht, auf einer und derselben Geraden liegen müssen; dadurch erhalten wir sechs neue Gerade:

$$(\mathrm{K}) \left\{ \begin{array}{l} |(2\,3,\ 5\,6)\quad (2\,4,\ 3\,5)\quad (2\,5,\ 4\,6)\quad (2\,6,\ 3\,4)\quad (3\,6,\ 4\,5)| = g_1 \\ |(1\,3,\ 4\,6)\quad (1\,4,\ 5\,6)\quad (1\,5,\ 3\,4)\quad (1\,6,\ 3\,5)\quad (3\,6,\ 4\,5)| = g_2 \\ |(1\,2,\ 4\,5)\quad (1\,4,\ 5\,6)\quad (1\,5,\ 2\,6)\quad (1\,6,\ 2\,4)\quad (2\,5,\ 4\,6)| = g_3 \\ |(1\,2,\ 3\,6)\quad (1\,3,\ 2\,5)\quad (1\,5,\ 2\,6)\quad (1\,6,\ 3\,5)\quad (2\,3,\ 5\,6)| = g_4 \\ |(1\,2,\ 3\,6)\quad (1\,3,\ 4\,6)\quad (1\,4,\ 2\,3)\quad (1\,6,\ 2\,4)\quad (2\,6,\ 3\,4)| = g_5 \\ |(1\,2,\ 4\,5)\quad (1\,3,\ 2\,5)\quad (1\,4,\ 2\,3)\quad (1\,5,\ 3\,4)\quad (2\,4,\ 3\,5)| = g_6 \end{array} \right.$$

und wir können den Satz aussprechen:

Die 15 *Diagonalpunkte der zweiten Gruppe* (D) *des Clebsch'schen Sechsecks ordnen sich zu je fünf auf sechs geraden Linien, so dass sie als die* 15 *Durchschnittspunkte dieser sechs Geraden erscheinen* (K).

10. Die Vergleichung der Tabellen (D) und (K) zeigt, dass jeder Durchschnittspunkt $(g_i g_k)$ gerade derjenige ist, welchen wir in (D) als den der Geraden $|i\,k|$ zugehörigen Punkt bezeichnet haben, wo ik irgend welche der Zahlen 1 2 . . . 6 bedeutet, und diese Zugehörigkeit von Punkten und Strahlen legt uns die Vermuthung nahe, dass das Entsprechen ein polares sei und der Figur ein Polarsystem zu Grunde liege, was sich in der That durch folgende Betrachtung bestätigt:

Wenn die Ecken zweier Dreiecke auf einem Kegelschnitt liegen, so kann man bekanntlich diese beiden Dreiecke als zwei selbstconjugirte Dreiecke eines Polarsystems auffassen, welches alsdann durch diese Bestimmungsstücke gerade vollständig und eindeutig bestimmt wird (Jacob Steiner's Vorles., Th. II Theorie d. Kegelschn. Seite 432).

Nehmen wir daher die beiden Dreiecke:

$$(1\,2,\ 4\,5)\quad (4\,5,\ 3\,6)\quad (3\,6,\ 1\,2)$$

und

$$(1\,3,\ 4\,6)\quad (4\,6,\ 2\,5)\quad (2\,5,\ 1\,3)$$

von denen oben (8) nachgewiesen ist, dass ihre sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, als zwei selbstconjugirte Dreiecke eines Polarsystems an, welches dadurch gerade bestimmt wird, so folgt nach dem

Hesse'schen Satze (Th. d. Kegelsch. S. 419) aus zwei Paaren conjugirter Strahlen allemal ein drittes Paar, also aus

$$|1\,2| \text{ und } |4\,5|$$
$$|2\,5| \text{ und } |4\,6|$$

das dritte Paar

$$|2\,4| \text{ und } |5, (1\,2,\ 4\,6)|;$$

da aber

$$|1\,2| \quad |4\,6| \text{ und } |3\,5|$$

sich in einem Punkte schneiden (A), so ist die letzte Gerade $|3\,5|$, also das dritte Paar conjugirter Strahlen:

$$|2\,4| \text{ und } |3\,5|.$$

In solcher Weise finden wir

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\text{aus den Paaren}\\ \text{conjugirter Strahlen:}\end{array} & \text{das dritte Paar:} \\
\left\{\begin{array}{lcl} |1\,2| & \text{und} & |4\,5| \\ |2\,5| & „ & |3\,6| \end{array}\right. & |2\,4| \text{ und } |3\,5| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |1\,2| & \text{und} & |4\,5| \\ |1\,3| & „ & |2\,5| \end{array}\right. & |1\,5| \text{ und } |2\,6| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |4\,5| & \text{und} & |3\,6| \\ |4\,6| & „ & |1\,3| \end{array}\right. & |3\,4| \text{ und } |2\,6| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |4\,5| & \text{und} & |3\,6| \\ |4\,6| & „ & |2\,5| \end{array}\right. & |5\,6| \text{ und } |1\,4| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |3\,6| & \text{und} & |1\,2| \\ |4\,6| & „ & |1\,3| \end{array}\right. & |1\,6| \text{ und } |3\,5| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |3\,6| & \text{und} & |1\,2| \\ |1\,3| & „ & |2\,5| \end{array}\right. & |2\,3| \text{ und } |1\,4| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |1\,2| & \text{und} & |3\,6| \\ |1\,5| & „ & |2\,6| \end{array}\right. & |1\,6| \text{ und } |2\,4| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |1\,3| & \text{und} & |4\,6| \\ |2\,3| & „ & |4\,1| \end{array}\right. & |3\,4| \text{ und } |1\,5| \\
\left\{\begin{array}{lcl} |1\,3| & \text{und} & |2\,5| \\ |5\,3| & „ & |2\,4| \end{array}\right. & |2\,3| \text{ und } |5\,6|
\end{array}$$

und aus diesen dritten Paaren conjugirter Strahlen setzen sich drei neue selbstconjugirte Dreiecke des Polarsystems zusammen, nämlich:

$$(1\,4,\ 2\,3) \quad (2\,3,\ 5\,6) \quad (5\,6,\ 1\,4)$$
$$(1\,5,\ 2\,6) \quad (2\,6,\ 3\,4) \quad (3\,4,\ 1\,5)$$
$$(1\,6,\ 2\,4) \quad (2\,4,\ 3\,5) \quad (3\,5,\ 1\,6).$$

Wir erhalten also aus den beiden ersten selbstconjugirten Dreiecken, welche das Polarsystem bestimmen, drei neue selbstconjugirte Dreiecke. Ebenso müssen sich also, wenn wir aus diesen 5 Dreiecken (J) irgend zwei andere zur Bestimmung des Polarsystems herausnehmen, die drei übrigen als Folge der ersteren ergeben, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die Ecken dieser fünf Dreiecke sind die sämmtlichen Diagonalpunkte der zweiten Gruppe (D) des Clebsch'schen Sechsecks, ihre Seiten die Polaren der Gegenecken in einem und demselben Polarsystem. Diese Seiten sind nichts anderes, als die 15 Seiten des Clebsch'schen Sechsecks, und es ergeben sich hieraus als die Polaren der sechs Ecken 1 2 3 4 5 6 des Clebsch'schen Sechsecks die sechs Geraden $g_1\, g_2\, g_3\, g_4\, g_5\, g_6$ der Tabelle (K); ebenso ergeben sich als die Polaren der zehn Punkte I II III ... X die zehn Geraden $g_{\mathrm{I}}\, g_{\mathrm{II}}\, g_{\mathrm{III}} \dots g_{\mathrm{X}}$ der Tabelle (H).

Wir können also den Satz aussprechen:

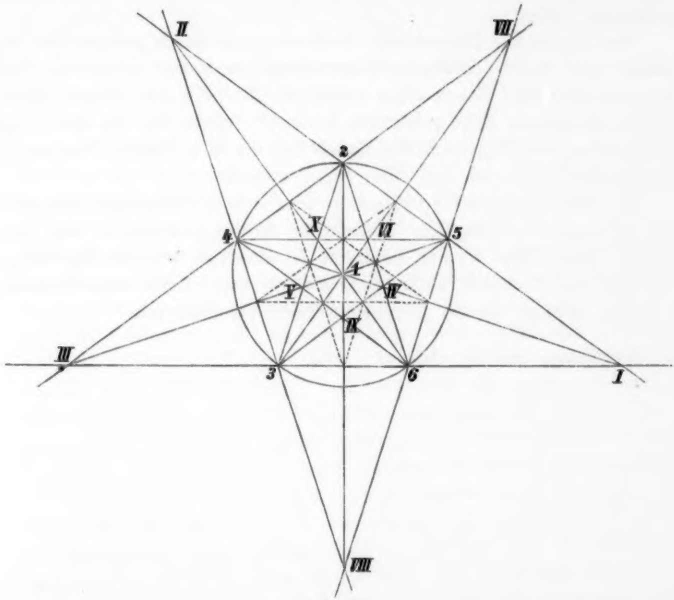
Jede der 15 *Seiten des vollständigen Clebsch'schen Sechsecks* (*d. h. jede Verbindungslinie zweier der sechs Punkte* 1 2 3 4 5 6) *enthält zwei Diagonalpunkte des von den vier übrigen Punkten gebildeten vollständigen Vierecks; es bleibt ein dritter Diagonalpunkt des Vierecks übrig; dieser ist allemal der Pol der betreffenden Seite in einem und demselben Polarsystem.* (Die Pole der 15 Seiten des Clebsch'schen Sechsecks liefert die Tabelle (D). *Die* 15 *Seiten des Clebsch'schen Sechsecks lassen sich zu je dreien als die Seiten von fünf selbstconjugirten Dreiecken dieses Polarsystems zusammenstellen:*

|1 2|	|4 5|	|3 6|
|1 3|	|2 5|	|4 6|
|1 4|	|2 3|	|5 6|
|1 5|	|2 6|	|3 4|
|1 6|	|2 4|	|3 5|.

Bemerkenswerth ist der enge Zusammenhang, in welchem die Figur des Clebsch'schen Sechsecks und die ihr polar gegenüberstehende bei derselben Configuration auftreten.

Aus der in der Einleitung angeführten Bemerkung der Herren F. Klein und E. Hess, wonach die sechs Axen des regulären Ikosaeders (Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Ecken desselben) sechs Strahlen sind, welche die Perspective eines Clebsch'schen Sechsecks bilden, ergiebt sich ein specieller Fall dieser Figur, bei dem alle Eigenschaften derselben in evidenter Weise zu Tage treten. Nimmt man die fünf Ecken eines regulären Fünfecks und den Mittelpunkt desselben, so bilden diese sechs Punkte ein Clebsch'sches Sechseck von specieller Art, welches die in dem Obigen allgemein bewiesenen

Eigenschaften besitzt. Um in Uebereinstimmung zu bleiben mit den oben ausgesprochenen Resultaten, bezeichnen wir den Mittelpunkt des regulären Fünfecks mit 1 und die fünf Ecken desselben in der (Fig. 2) angegebenen Weise durch 2 3 4 5 6. Die 25 Diagonalpunkte dieses Sechsecks zerfallen in zwei Gruppen von je 10 (A) und 15 Punkten (D). Die 15 Punkte der zweiten Gruppe (D) sind die Mitten der 10 Seiten des vollständigen regulären Fünfecks und die 5 unendlich-entfernten Punkte der Fünfecksseiten; die 10 Punkte der ersten Gruppe (A) I II III ... X sind die sämmtlichen Durchschnittspunkte je zweier Seiten des vollständigen regulären Fünfecks (ausser den Ecken) und



(Fig. 2.)

lassen sich zu zwei regulären Fünfecken ordnen, die beide denselben Mittelpunkt 1, wie das ursprüngliche Fünfeck haben und von denen das eine innerhalb, das andere ausserhalb des ursprünglichen liegt. Das eine hat zu Ecken die Doppelpunkte des als Sternfünfeck aufgefassten ursprünglichen Fünfecks; für das andere, als Sternfünfeck aufgefasst, bilden die Doppelpunkte das ursprüngliche Fünfeck.

Die 15 Punkte der zweiten Gruppe (D) liegen zu je 5 auf 6 Geraden ($g_1\, g_2\, \ldots\, g_6$), von denen eine die unendlich-entfernte Gerade ist $g_1 = g_\infty$; die übrigen fünf bilden ein reguläres Sternfünfeck, dessen

Ecken und Doppelpunkte die zehn Mitten der Seiten des ursprünglichen Fünfecks sind (in der Fig. die punktirten Linien).

Das mit dem Clebsch'schen Sechseck in Verbindung stehende Polarsystem ist elliptischer Natur und hat als Kernkegelschnitt einen imaginären Kreis, dessen Mittelpunkt der Punkt 1 ist und für den das Quadrat der Radius

$$= -\frac{1}{4}$$

ist, wenn der Radius des dem regulären Fünfeck umschriebenen Kreises $= 1$ gesetzt wird. Die Polaren der fünf Ecken des ursprünglichen regulären Fünfecks sind die Seiten des Sternfünfecks $g_2\, g_3\, g_4\, g_5\, g_6$ (punktirte Linien).

Das allgemeine Clebsch'sche Sechseck geht durch perspective Projection oder durch collineare Umformung aus dieser speciellen Figur eines aus den fünf Ecken eines regulären Fünfecks und seinem Mittelpunkte als sechster Ecke gebildeten Sechsecks hervor und die im Obigen direct bewiesenen Eigenschaften lassen sich durch collineare Umformung unmittelbar aus dieser speciellen Figur ablesen.

Da durch perspective Projection oder durch collineare Umformung ein elliptisches Polarsystem niemals in ein hyperbolisches oder umgekehrt übergeführt werden kann, so ist auch das bei dem allgemeinen Clebsch'schen Sechseck auftretende Polarsystem immer ein *elliptisches*, d. h. ein solches, dessen Kernkegelschnitt imaginär ist.

Breslau, den 13. October 1886.

Bemerkungen zu Liouville's Classificirung der Transcendenten.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Liouville geht in seiner ausgezeichneten Arbeit „sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines des certaines équations en fonction finie explicite des coefficients" im 2ten und 3ten Bande seines Journals von der Ueberlegung aus, dass die Theorie der algebraischen Gleichungen in ihrer Entwicklung sich mit der Frage beschäftigt habe, ob alle algebraischen Gleichungen oder nur gewisse näher anzugebende Classen die Eigenschaft haben, dass sich ihre Lösungen als *explicite* algebraische Functionen ihrer Coefficienten ausdrücken lassen, indem er als explicite algebraische Functionen alle solche definirt, welche durch die sechs arithmetischen Operationen aus den Coefficienten zusammengesetzt sind, und dann nach Abel die verschiedenen Ordnungen der algebraischen Functionen feststellt. Analog dazu führt nun Liouville ausser den algebraischen Functionen noch die niederen Transcendenten e^x und $\log x$ in die Betrachtung ein, spricht auch auf Grund von wiederholt ausgeführten algebraischen, exponentiellen und logarithmischen Operationen entsprechend der Abel'schen Eintheilung von expliciten transcendenten Functionen verschiedener Ordnung und glaubt die entsprechende Ausdehnung der Abel'schen Untersuchungen über die Auflösbarkeit der Gleichungen darin zu finden, dass er nach den algebraisch aus transcendenten Functionszeichen zusammengesetzten transcendenten Gleichungen fragt, welche durch jene niederen expliciten Transcendenten auflösbar sind oder bei denen die Unmöglichkeit einer solchen Auflösung sich feststellen lässt. Nachdem es aber durch Einführung des Begriffes der Irreductibilität der algebraischen Differentialgleichungen möglich geworden, diejenigen Sätze, auf welche Liouville die eben angedeuteten Untersuchungen sowie diejenigen über die algebraische Ausdrückbarkeit Abel'scher Integrale oder deren Beziehungen zu den

Logarithmen und Exponentialfunctionen stützt, auf Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungen auszudehnen, ist es nicht schwer zu erkennen, dass Liouville die Frage der Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen, wenn sie entsprechend auf transcendente Functionen übertragen werden soll, nicht zweckmässig formulirt hat, und ich will im Folgenden nur ganz kurz die hierher gehörigen Probleme in völliger Allgemeinheit bezeichnen, ohne desshalb die sich ergebenden Sätze mit einer Eintheilung der Transcendenten überhaupt, wie sie Liouville vorschwebte, aber durch die Entwicklung der Functionentheorie unhaltbar geworden ist, in Zusammenhang bringen zu wollen.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ gegebene Elemente und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch die Gleichungen definirt

$$(1) \qquad x_1^{n_1} = A_1, \quad x_2^{n_2} = A_2, \quad x_3^{n_3} = A_3, \cdots,$$

in denen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Primzahlen und $A_1, A_2, A_3, \ldots$ rationale Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ bedeuten, so wird nach Abel $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, wenn f eine rationale Function von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ darstellt, eine algebraische Function erster Ordnung sein, deren Grad durch die Anzahl der rational von einander unabhängigen Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bestimmt wird. Sei jetzt eine weitere Reihe binomischer Gleichungen

$$(2) \qquad y_1^{\nu_1} = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots), \quad y_2^{\nu_2} = f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$
$$y_3^{\nu_3} = f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots), \ldots$$

gegeben, in denen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ Primzahlen und $f_1, f_2, f_3, \ldots$ algebraische Functionen erster Ordnung bedeuten, so wird

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

wenn F wiederum rational ist, eine algebraische Function zweiter Ordnung sein, und ebenso aus den binomischen Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} z_1^{p_1} &= F_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots), \\ z_2^{p_2} &= F_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots), \\ z_3^{p_3} &= F_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots), \ldots \end{aligned}$$

eine algebraische Function dritter Ordnung

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots, z_1, z_2, z_3, \ldots)$$

entstehen u. s. w., und es würde sich somit die Frage nach der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen oder in der Liouville'schen Ausdrucksweise nach der expliciten algebraischen Darstellung der Lösungen derselben darauf reduciren, die Lösungen einer algebraischen Gleichung rational durch die Lösungen binomischer Gleichungen von der Form (1), (2), (3), ... auszudrücken.

Ziehen wir nun eine der elementaren Transcendenten z. B. den

Logarithmus in unsere Betrachtung, so werden wir, wenn $u, v, w, \ldots$ algebraische Functionen von x bedeuten, eine Function

$$f(x, \log u, \log v, \log w, \ldots),$$

in welcher f eine algebraische Function darstellt, eine logarithmische Function erster Ordnung nennen, oder was dasselbe ist, wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{u'}{u}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{v'}{v}, \quad \frac{dx_3}{dx} = \frac{w'}{w}, \ldots \tag{4}$$

definirt sind, so wird $f(x, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine solche Transcendente erster Ordnung sein, deren Grad durch die Anzahl der algebraisch von einander unabhängigen Logarithmen bestimmt ist. Seien jetzt

$$f_1(x, \log u, \log v, \log w, \ldots), \quad f_2(x, \log u, \log v, \log w, \ldots),$$
$$f_3(x, \log u, \log v, \log w, \ldots), \ldots$$

gegeben, so wird, wenn F eine algebraische Function bedeutet,

$$F(x, \log u, \log v, \log w, \ldots, \log f_1, \log f_2, \log f_3, \ldots)$$

eine logarithmische Function zweiter Ordnung sein, oder auch, wenn $y_1, y_2, y_3, \ldots$ durch die logarithmischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{f_1'}{f_1}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{f_2'}{f_2}, \ldots \tag{5}$$

oder die algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung definirt sind, welche man durch successive Differentiation der Gleichungen (5) und Elimination der Transcendenten $\log u, \log v, \ldots$ erhält, die Function

$$F(x, x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots)$$

eine logarithmische Function zweiter Ordnung. Ebenso entsteht aus den Functionen

$$F_1(x, \log u, \log v, \ldots, \log f_1, \log f_2, \ldots),$$
$$F_2(x, \log u, \log v, \ldots, \log f_1, \log f_2, \ldots), \ldots$$

die logarithmische Function dritter Ordnung

$$\Phi(x, \log u, \log v, \ldots, \log f_1, \log f_2, \ldots, \log F_1, \log F_2, \ldots)$$

oder in ähnlicher Weise wie oben

$$\Phi(x, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots),$$

u. s. w.

Bleiben wir zunächst bei den logarithmischen Transcendenten stehen, welche also Lösungen der angegebenen algebraischen Differentialgleichungen sind, so würde hier, den Abel'schen Untersuchungen über algebraische Gleichungen entsprechend, die Frage aufzuwerfen sein, welche algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung logarithmische Integrale irgend welcher Ordnung besitzen können.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der allgemeinen algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6}$$

und stellen die Frage, ob dieselbe die einfachste Form von logarithmischen Transcendenten erster Ordnung, also eine solche Function ersten Grades $y = \varphi(x, \log u)$ zum Integral haben kann, wenn u eine algebraische Function bedeutet. Es ergiebt sich aus (6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial \log u}\frac{u'}{u} = f(x, \varphi(x, \log u)), \tag{7}$$

und da diese Gleichung, weil $\log u$ nicht algebraisch ausdrückbar ist, in dieser Grösse identisch sein muss, also auch bestehen muss, wenn $\log u + c$ für $\log u$ gesetzt wird, worin c eine willkürliche Constante ist, so erhält man aus (7)

$$\frac{d\varphi(x, \log u + c)}{dx} = f(x, \varphi(x, \log u + c)),$$

d. h. es ist auch $y = \varphi(x, \log u + c)$ ein Integral der Differentialgleichung (6) und zwar das allgemeine; man erhält alle Differentialgleichungen erster Ordnung dieser Art durch Elimination von $\log u$ aus den beiden Gleichungen

$$y = \varphi(x, \log u) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial \log u}\frac{u'}{u}.$$

Soll das Integral linear in Bezug auf die logarithmische Function sein, also die Form haben

$$y = U + A \log u,$$

worin A eine Constante bedeutet, so wird die Differentialgleichung (7) in

$$\frac{dU}{dx} + A\frac{u'}{u} = f(x, U + A\log u)$$

übergehen, und somit die f-Function vom zweiten Argumente frei sein müssen, so dass die Untersuchung auf die Frage zurückkommt, wann $\int f(x)\,dx$ sich in der Form $U + A\log u$ integriren lässt.

Nehmen wir nun aber für das Integral der Differentialgleichung (6) die allgemeinste Form einer logarithmischen Function erster Ordnung und beliebigen Grades

$$y = \varphi(x, \log u, \log v, \log w, \ldots)$$

an, in welcher die Transcendenten $\log u$, $\log v$, $\log w$, ... als algebraisch von einander unabhängig vorausgesetzt werden, so folgt aus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial \log u}\frac{u'}{u} + \frac{\partial\varphi}{\partial \log v}\frac{v'}{v} + \cdots = f(x, \varphi(x, \log u, \log v, \ldots))$$

wiederum genau wie oben vermöge der Identität dieser Gleichung in den Logarithmen, dass auch

$$y = \varphi(x,\ \log u + c_1,\ \log v + c_2,\ \log w + c_3,\ \cdots)$$

ein Integral von (6) sein muss, und da dasselbe offenbar nur *eine* willkürliche Constante haben darf, so wird die Form des logarithmischen Integrales irgend welcher Ordnung für eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung nothwendig

$$y = \varphi(x,\ A_1 \log u + A_2 \log v + A_3 \log w + \cdots)$$

sein, wenn $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Constanten bedeuten, und umgekehrt ist klar, dass solche Differentialgleichungen auch wirklich existiren.

Ist die vorgelegte Differentialgleichung jedoch von der zweiten Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right), \tag{8}$$

so ist die Möglichkeit von logarithmischen Integralen erster Ordnung und ersten oder zweiten Grades von der Form

$$y = \varphi(x,\ \log u), \qquad y = \varphi(x,\ \log u,\ \log v)$$

unmittelbar zu erkennen, jedoch muss das Integral, wenn mehr als zwei Logarithmen in dasselbe eintreten, die Form

$$y = \varphi(x,\ A_1 \log u + A_2 \log v + A_3 \log w + \cdots,\\ B_1 \log u + B_2 \log v + B_3 \log w + \cdots)$$

haben, und ähnlich für algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

Soll nun das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung (6) eine logarithmische Function zweiter Ordnung und zwar zunächst noch ersten Grades von der Form

$$y = F(x, \log u, \log v, \log w, \ldots, \log f_1(x, \log u, \log v, \log w, \ldots)) \tag{9}$$

sein, so folgt durch Einsetzen in (6)

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \log u}\frac{u'}{u} + \frac{\partial F}{\partial \log v}\frac{v'}{v} + \cdots \\ + \frac{\partial F}{\partial \log f_1}\,\frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial \log u}\frac{u'}{u} + \frac{\partial f_1}{\partial \log v}\frac{v'}{v} + \cdots\right)}{f_1} = f(x, F), \tag{10}$$

und es muss diese Gleichung wiederum, da $\log f_1$ nicht algebraisch von x, $\log u$, $\log v$, ... abhängen darf, bestehen bleiben, wenn $\log f_1$, $\log u$, $\log v$, ... durch beliebige Grössen ersetzt werden; substituirt man nun statt dieser Grössen

$$\log f_1 + \varkappa,\quad \log u + c_1,\quad \log v + c_2,\ \cdots,$$

worin $\varkappa, c_1, c_2, \ldots$ willkürliche Constanten bedeuten, so folgt wieder, dass auch

$$y = F(x,\ \log u + c_1,\ \log v + c_2,\ \ldots,\\ \log f_1(x,\ \log u + c_1,\ \log v + c_2,\ \cdots) + \varkappa)$$

ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung ist, was wegen der zu grossen Anzahl willkürlicher Constanten nicht möglich ist, indem selbst im einfachsten Falle die Form

$$y = F(x, \log u + c_1, \log f_1(x, \log u + c_1) + \varkappa)$$

noch zwei willkürliche Constanten enthält — es kann somit eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung nie ein logarithmisches Integral zweiter Ordnung besitzen, da die eben gemachten Schlüsse um so mehr für die allgemeinste Form der logarithmischen Functionen zweiter Ordnung gelten. Soll nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (8) eine logarithmische Function zweiter Ordnung zum Integral haben, so ist wieder sofort zu sehen, dass dies ohne Beschränkung möglich ist für eine solche ersten Grades in der einfachsten Form

$$y = F(x, \log u, \log f_1(x, \log u)),$$

während, wenn zwei einfache Logarithmen eintreten sollen, das Integral also die Form haben soll

$$y = F(x, \log u, \log v, \log f_1(x, \log u, \log v)),$$

wegen der drei eintretenden Constanten nothwendig die Logarithmen additiv mit constanten Coefficienten verbunden vorkommen müssen, also das Integral die Gestalt haben wird

$$y = F(x, a_1 \log u + a_2 \log v, \quad b_1 \log u + b_2 \log v + b_3 \log f_1(x, a_1 \log u + a_2 \log v)),$$

und dieselbe Form, wenn mehr als zwei einfache Logarithmen eintreten. Soll das Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung jedoch mehr als eine Function $\log f_1$ enthalten, also mindestens vom zweiten Grade sein, so ist wiederum sogleich zu sehen, dass, weil jede logo-logarithmische Function $\log f_1(x, \log u, \ldots)$, $\log f_2(x, \log u, \ldots), \ldots$ mindestens zwei willkürliche Constanten einführt, das Integral nothwendig die Form haben muss

$$y = F(x, a_1 \log u + a_2 \log v + \cdots, \quad b_1 \log u + b_2 \log v + \cdots \\ c_1 \log f_1(x, a_1 \log u + a_2 \log v + \cdots) + c_2 \log f_2(x, a_1 \log u + a_2 \log v + \cdots) \\ + \cdots).$$

Fährt man in diesen Schlüssen fort, so sieht man allgemein leicht ein, dass eine algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung nie als Integral eine logarithmische Function von einer höheren Ordnung als der m^{ten} besitzen kann, während die logarithmischen Integrale niederer Ordnung in ihrem Grade dadurch bestimmt sind, dass die nach dem Vorigen zu den selbständigen Logarithmenverbindungen hinzutretenden willkürlichen Constanten die Zahl m nicht übersteigen.

Genau ebenso kann die Exponentialfunction verschiedener Ordnung und verschiedenen Grades vermöge der sie definirenden Differentialgleichungen in die Untersuchung eingeführt, und die Möglichkeit der Integration algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung durch diese Transcendenten erörtert werden.

Vermöge früher von mir aufgestellter Sätze über die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen algebraischer Differentialgleichungen ist es nun leicht diese Methoden zu verallgemeinern. Sei

$$\omega\left(x,\ x_1,\ \frac{dx_1}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^m x_1}{dx^m}\right) = 0 \tag{11}$$

eine algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irredutibel ist und deren eines Integral x_1 nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet, und werde diese Transcendente durch $x_1 = L(x)$ bezeichnet, so werden, wenn $u, v, \ldots$ algebraische Functionen von x bedeuten, die Grössen

$$x_1 = L(u),\quad x_2 = L(v),\ \cdots \tag{12}$$

durch die Differentialgleichungen definirt sein,

$$\omega\left(u,\ x_1,\ \frac{dx_1}{du},\ \cdots,\ \frac{d^m x_1}{du^m}\right) = 0, \tag{13}$$

$$\omega\left(v,\ x_2,\ \frac{dx_2}{dv},\ \cdots,\ \frac{d^m x_2}{dv^m}\right),\ \cdots$$

oder nach Reduction der nach u genommenen Differentialquotienten auf die nach x genommenen durch die algebraischen Differentialgleichungen

$$\Omega\left(x,\ u,\ u',\ \cdots,\ u^{(m)},\ x_1,\ \frac{dx_1}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^m x_1}{dx^m}\right) = 0, \tag{14}$$

$$\Omega\left(x,\ v,\ v',\ \cdots,\ v^{(m)},\ x_2,\ \frac{dx_2}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^m x_2}{dx^m}\right) = 0,\ \cdots$$

und wenn man nunmehr die algebraische Function der eingeschlossenen Grössen bildet

$$f\left(x,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ \frac{dx_1}{dx},\ \frac{dx_2}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{m-1}x_1}{dx^{m-1}},\ \frac{d^{m-1}x_2}{dx^{m-1}},\ \cdots\right), \tag{a}$$

so wird diese analog der früher gegebenen Definition als Transcendente erster Ordnung definirt werden können, deren Grad durch die Anzahl der eintretenden Functionen $x_1, x_2, \ldots$ bestimmt wird.

Bildet man nunmehr der Function (a) analog die Functionen

$$f_1,\ f_2,\ \cdots$$

und den Differentialgleichungen (13) entsprechend

(15) $$\omega\left(f_1,\, y_1,\, \frac{dy_1}{df_1},\, \cdots,\, \frac{d^m y_1}{df_1^m}\right) = 0,$$

$$\omega\left(f_2,\, y_2,\, \frac{dy_2}{df_2},\, \cdots,\, \frac{d^m y_2}{df_2^m}\right) = 0,\, \cdots$$

oder nach (14)

(16) $$\Omega\left(x,\, f_1,\, f_1',\, \cdots,\, f_1^{(m)},\, y_1,\, \frac{dy_1}{dx},\, \cdots,\, \frac{d^m y_1}{dx^m}\right) = 0,$$

$$\Omega\left(x,\, f_2,\, f_2',\, \cdots,\, f_2^{(m)},\, y_2,\, \frac{dy_2}{dx},\, \cdots,\, \frac{d^m y_2}{dx^m}\right) = 0,\, \cdots$$

so wird wieder, wenn F eine algebraische Function bedeutet,

(b) $$F\left(x, x_1, x_2, \cdots, \frac{d^{m-1}x_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}x_2}{dx^{m-1}}, \cdots, y_1, y_2, \cdots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}, \cdots\right)$$

eine Transcendente zweiter Ordnung sein, deren Grad von der Anzahl der Grössen $y_1, y_2, \ldots$ abhängt; mit Hülfe einer Reihe ähnlicher Functionen

$$F_1,\, F_2,\, \ldots$$

und der entsprechenden Differentialgleichungen

(17) $$\omega\left(F_1,\, z_1,\, \frac{dz_1}{dF_1},\, \cdots,\, \frac{d^m z_1}{dF_1^m}\right) = 0,$$

$$\omega\left(F_2,\, z_2,\, \frac{dz_2}{dF_2},\, \cdots,\, \frac{d^m z_2}{dF_2^m}\right) = 0,\, \cdots$$

oder der (16) analogen, wird man die Transcendente dritter Ordnung

(c) $$\Phi\left(x, x_1, x_2, \cdots, \frac{d^{m-1}x_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}x_2}{dx^{m-1}}, \cdots, y_1, y_2, \cdots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}, \cdots,\right.$$
$$\left. z_1, z_2, \cdots, \frac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}z_2}{dx^{m-1}}, \cdots\right)$$

definiren, u. s. w.

Sei nun

(18) $$\Psi\left(x,\, t,\, \frac{dt}{dx},\, \frac{d^2 t}{dx^2},\, \cdots,\, \frac{d^\mu t}{dx^\mu}\right) = 0$$

eine algebraische Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung und zu untersuchen, ob diese die betrachtete Transcendente in irgend einer Ordnung und irgend einem Grade zum Integrale haben kann, so wird, wenn t_1 die oben definirte Transcendente sein soll und z. B. von der dritten Ordnung, dieses Integral von der Form (c), also

(19) $$t_1 = \Phi\left(x, x_1, x_2, \cdots, \frac{d^{m-1}x_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}x_2}{dx^{m-1}}, \cdots, y_1, y_2, \cdots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}, \cdots,\right.$$
$$\left. z_1, z_2, \cdots, \frac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}},\, \frac{d^{m-1}z_2}{dx^{m-2}}, \cdots\right)$$

sein müssen. Nun können wir die Schlüsse, welche wir oben für die logarithmischen Transcendenten verschiedener Ordnung unmittelbar aus der Eigenschaft des Logarithmus hergeleitet haben, hier vermöge des Satzes durchführen, dass, wenn zwischen Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung stattfindet, diese erhalten bleibt, wenn man statt aller Integrale mit Ausnahme eines beliebige particuläre Integrale ihrer resp. Differentialgleichungen setzt, und nur für das eine ein passendes Integral seiner entsprechenden Differentialgleichung substituirt — vorausgesetzt, dass die Differentialgleichungen, welche jene willkürlich zu ersetzenden Integrale definiren, in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sind und zwischen den in die Relation eintretenden Integralen und deren Ableitungen bis zu einer Ordnung hin, die um eine Einheit kleiner ist als die Ordnung der Differentialgleichung, keine algebraische Relation besteht. Da nun die letzten Voraussetzungen in Folge der Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichungen, welche die Transcendenten der verschiedenen Ordnungen definirten, erfüllt sind, so wird sich aus (19), wenn $x_1', x_2', \ldots$, $y_1', y_2', \ldots, z_1', z_2', \ldots$ beliebige particuläre Integrale der Differentialgleichungen (14), (16) ... bedeuten, während t_1' ein bestimmtes zugehöriges Integral der Differentialgleichung (18) vorstellt,

$$(20)\quad t_1' = \Phi\Big(x, x_1', x_2', \ldots, \frac{d^{m-1}x_1'}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1}x_2'}{dx^{m-1}}, \ldots, y_1', y_2', \ldots, \frac{d^{m-1}y_1'}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1}y_2'}{dx^{m-1}}, \ldots,$$
$$z_1', z_2', \ldots, \frac{d^{m-1}z_1'}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1}z_2'}{dx^{m-1}}, \ldots\Big)$$

ergeben, und es wird sich in jedem gegebenen Falle darum handeln, aus den unendlich vielen Formen, welche die Gleichung (20) vermöge der Substitution der willkürlichen particulären Integrale der die Transcendenten verschiedener Ordnung definirenden Differentialgleichungen und der Integrale $t_1, t_1', \ldots$ der zu untersuchenden Differentialgleichung (18) annimmt, einerseits die Möglichkeit, andererseits die Form der Beziehung (19) festzustellen, wie dies leicht für die logarithmischen- und Exponential-Functionen verschiedener Ordnung möglich war. Aehnlich wie für diese elementaren Transcendenten kann man vielfach aus der Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung auf die Unmöglichkeit schliessen, dass dieselbe zum Integrale eine Transcendente von gegebener Art und von bestimmter Ordnung besitze.

Es mag endlich noch mit Rücksicht auf unsere Ausgangsbetrachtungen bemerkt werden, dass der oben ausgesprochene Satz von der Unveränderlichkeit der Gleichung (19) die Verallgemeinerung der von Abel gemachten Bemerkung ist, dass, wenn eine algebraische Gleichung algebraisch in der Form

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

auflösbar ist, dann auch dieser Ausdruck eine Lösung der Gleichung bleibt, wenn $p^{\frac{1}{n}}$ durch irgend eine andere Lösung der binomischen Gleichung

$$z^n - p = 0$$

ersetzt wird, worin y eine Function μ^{ter}, p eine solche $\mu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Die von Abel daraus gezogene Folgerung, dass jeder Theil der Auflösung einer algebraisch auflösbaren Gleichung sich als rationale Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lasse, würde jedoch, wenn, wie zufolge der obigen Betrachtungen nothwendig ist, an die Stelle von $p^{\frac{1}{n}}, p^{\frac{2}{n}}, \cdots, p^{\frac{n-1}{n}}$ die in (19) vorkommende Transcendente 3^{ter} Ordnung z_1 und deren Ableitungen $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}$, an Stelle der Lösungen y der vorgelegten algebraischen Gleichung die particulären Integrale t der algebraischen Differentialgleichung (18) gesetzt und die rationale Beziehung durch eine algebraische ersetzt würde, nur in bestimmten Fällen linearer Differentialgleichungen ein Analogon finden.

Heidelberg, den 15. October 1886.

Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten zur Aufstellung von Relationen für Thetafunctionen einer Variabeln.

Von

F. Caspary in Berlin.

In einigen Abhandlungen,*) welche im Journal für Mathematik veröffentlicht sind, habe ich allgemeine Relationen für Thetafunctionen von zwei und mehr Variabeln aus einfachen algebraischen Identitäten hergeleitet. Den Uebergang vermittelten die Gleichungen, welche bei der Transformation zweiter Ordnung auftreten.

Der nämliche Gedanke lässt sich mit Erfolg bei den Thetafunctionen einer Variabeln verwenden und führt mit überraschender Leichtigkeit unmittelbar zu den beiden Fundamentaltheoremen, nämlich dem Weierstrass'schen und Jacobi'schen und für eine specielle Annahme auch zu der Cayley'schen Formel. Im Weiteren ergiebt sich aus ihm eine neue allgemeine Relation zwischen Producten von *sechs* Thetafunctionen. Die dabei auftretenden Verknüpfungen der sechs ursprünglichen Variabeln zu neuen zeigen mit denjenigen der vier Variabeln bei den Weierstrass'schen und Jacobi'schen Theoremen eine vollkommene Analogie, sowohl hinsichtlich der algebraischen Gleichungen, denen sie unterworfen sind, als der geometrischen Probleme, zu denen sie führen. Ich will auf diese mehr der Geometrie angehörigen Untersuchungen hier nicht näher eingehen, sondern nur die auf die Theorie der elliptischen Thetafunctionen bezüglichen Darlegungen geben.

Bedeuten

$$a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i \quad (i=1,2)$$

beliebige Grössen und wird:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab)$$

gesetzt, so besteht die Identität

$$(1) \qquad (ab)(cd) + (ac)(db) + (ad)(bc) = 0,$$

---

*) Bd. 94, S. 74. Bd. 96, S. 182 und S. 324. Bd. 97, S. 165.

welche sich ergiebt, wenn man die aus

(2) $(ad)(bc) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)(c_1 d_1 + c_2 d_2) - (a_1 c_1 + a_2 c_2)(b_1 d_1 + b_2 d_2)$

durch Buchstabenvertauschung hervorgehenden Gleichungen addirt. Benutzt man nun die Jacobi'sche Bezeichnungsweise der elliptischen Thetafunctionen und setzt:

$$a_1 = \vartheta_3(2a, q^2), \qquad b_1 = \vartheta_3(2b, q^2),$$
$$a_2 = \vartheta_2(2a, q^2), \qquad b_2 = \vartheta_2(2b, q^2),$$

so wird

$$(\alpha) \qquad \vartheta_1(a+b)\,\vartheta_1(a-b) = (ab),$$

wobei q der zugehörige Parameter ist, den ich der Einfachheit halber fortlasse. Substituirt man diesen Werth von (ab) und die analogen in (1), so erhält man, abgesehen von der Bezeichnungsweise unmittelbar das Weierstrass'sche Theorem:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \quad \vartheta_1(a+b)\,\vartheta_1(a-b)\,\vartheta_1(c+d)\,\vartheta_1(c-d) \\ + \vartheta_1(a+c)\,\vartheta_1(a-c)\,\vartheta_1(d+b)\,\vartheta_1(d-b) \\ + \vartheta_1(a+d)\,\vartheta_1(a-d)\,\vartheta_1(b+c)\,\vartheta_1(b-c) = 0. \end{cases}$$

Vgl. Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1882. S. 505. Schwarz, Formeln und Lehrsätze u. s. w. Art. 38. Enneper, Göttinger Nachrichten 1883. S. 177. Vertauscht man dagegen in (2) b_1 mit c_2 und b_2 mit c_1, so bleibt (bc) und damit auch die linke Seite von (2) ungeändert und man erhält daher:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(a_1 b_1 + a_2 b_2)(c_1 d_1 + c_2 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)(c_1 d_2 + c_2 d_1) \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2)(b_1 d_1 + b_2 d_2) + (a_1 c_2 + a_2 c_1)(b_1 d_2 + b_2 d_1). \end{aligned}$$

Da aber

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} \vartheta_3(a+b)\,\vartheta_3(a-b) &= a_1 b_1 + a_2 b_2, \\ \vartheta_2(a+b)\,\vartheta_2(a-b) &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{aligned}$$

u. s. w. ist, so verwandelt sich diese Identität in:

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(a+b)\,\vartheta_3(a-b)\,\vartheta_3(c+d)\,\vartheta_3(c-d) \\ &+ \vartheta_2(a+b)\,\vartheta_2(a-b)\,\vartheta_2(c+d)\,\vartheta_2(c-d) \\ &= \vartheta_3(a+c)\,\vartheta_3(a-c)\,\vartheta_3(b+d)\,\vartheta_3(b-d) \\ &+ \vartheta_2(a+c)\,\vartheta_2(a-c)\,\vartheta_2(b+d)\,\vartheta_2(b-d). \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Formel

$$a+b = w, \quad a-b = x, \quad c+d = y, \quad c-d = z$$

und daher:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2(a+c) &= 2w' = w + x + y + z, \\ 2(a-c) &= 2x' = w + x - y - z, \\ 2(b+d) &= 2y' = w - x + y - z, \\ 2(b-d) &= 2z' = w - x - y + z, \end{aligned}$$

so stellt sie wörtlich und genau das Jacobi'sche Fundamentaltheorem dar. (Vgl. Ges. Werke Bd. I, S. 507) Verändert man in (2) die Buchstaben und Indices in passender Weise, so erhält man direct, ohne Periodenvermehrung, die sämmtlichen von Jacobi a. a. O. gegebenen Relationen. Ich will von ihnen, als Beispiel, nur eine einzige ableiten, welche, unter einer speciellen Annahme für die Variabeln, auf die Cayley'sche Gleichung führt.

Vertauscht man in (2) b_1 mit b_2 und d_1 mit d_2, subtrahirt die entstehende Identität von (2) und vertauscht c_i mit d_i, so erhält man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}(a_1c_2-a_2c_1)(b_1d_2-b_2d_1)&+(a_1c_1-a_2c_2)(b_1d_1-b_2d_2)\\ =(a_1b_1+a_2b_2)(c_1d_1+c_2d_2)&-(a_1b_2+a_2b_1)(c_1d_2+c_2d_1)\end{aligned}$$

und entsprechend:

$$\begin{aligned}(a_1c_2-a_2c_1)(b_1d_2-b_2d_1)&-(a_1c_1-a_2c_2)(b_1d_1-b_2d_2)\\ =(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)&-(a_1b_1-a_2b_2)(c_1d_1-c_2d_2).\end{aligned}$$

Aus der Addition dieser Gleichungen folgt eine neue Identität, welche unter Benutzung von (4), (α), (β) und:

$$(\gamma)\qquad \vartheta(a+b)\,\vartheta(a-b)=a_1b_1-a_2b_2 \text{ u. s. w.}$$

sich in:

$$\begin{aligned}(\mathrm{II})\qquad 2\vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z') &= \vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)\\ &-\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z)-\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z)\\ &+\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)\end{aligned}$$

verwandelt. Setzt man hierin $w'=0$, also

$$w+x+y+z=0$$

und geht zu den elliptischen Functionen über, so erhält man die Cayley'sche Formel (Darboux Bull. tom. I, p. 215), für welche Hermite und Schröter Beweise gegeben haben. (Acta math. I, S. 368 und V, S. 207).

Die Thetarelationen (I) und (II) besitzen eine merkwürdige Eigenschaft, welche die Zugehörigkeit derselben zu einer besondern Classe charakterisirt. Die Eigenthümlichkeit dieser Classe von Relationen, auf welche ich an einer andern Stelle näher eingehen werde, besteht darin, dass zwischen gewissen Thetaverbindungen dieselben Gleichungen bestehen, wie zwischen den Variabeln*). Bei (I) zeigt dies der blosse

*) Etwas Analoges gilt auch für Thetafunctionen von zwei Variabeln (Journ. f. Math. Bd. 94, S. 85) und für gewisse Verbindungen von trigonometrischen Functionen. (Vgl. Gauss Werke Bd. III, S. 256, Möbius Werke, Bd. I, S. 571 und zahlreiche interessante Abhandlungen von J. W. L. Glaisher, von denen ich besonders anführe: Ass. franc. 1880, Messenger 1880. Proc. of Cambridge Phil. Soc. vol. III, p. 320. Quat. Journ. 1882, p. 36).

Anblick und bei (II) und den daraus hervorgehenden Identitäten erkennt man es, wenn man die vier Thetaproducte rechts mit den Variabeln w, x, y, z der Reihe nach durch W, X, Y, Z und die analogen von w', x', y', z' abhängigen durch W', X', Y', Z' bezeichnet. Dann sind die zweimal vier Grössen $W \ldots Z$ und $W' \ldots Z'$ durch Gleichungen verbunden, welche aus denen in (4) durch Ersetzung der kleinen Buchstaben durch die entsprechenden grossen hervorgehen.

Multiplicirt man (3) mit $(e_1 f_1 + e_2 f_2)$, wobei e_i, f_i $(i=1, 2)$ vier neue beliebige Grössen bedeuten, vertauscht dann in (3) d_1 und d_2, multiplicirt die hervorgehende Gleichung mit $(e_1 f_2 + e_2 f_1)$ und addirt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & (a_1 b_1 + a_2 b_2)(c_1 d_1 + c_2 d_2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
& + (a_1 b_2 + a_2 b_1)(c_1 d_2 + c_2 d_1)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
& + (a_1 b_1 + a_2 b_2)(c_1 d_2 + c_2 d_1)(e_1 f_2 + e_2 f_1) \\
& + (a_1 b_2 + a_2 b_1)(c_1 d_1 + c_2 d_2)(e_1 f_2 + e_2 f_1) \\
& = (a_1 c_1 + a_2 c_2)(b_1 d_1 + b_2 d_2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
& + (a_1 c_2 + a_2 c_1)(b_1 d_2 + b_2 d_1)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
& + (a_1 c_1 + a_2 c_2)(b_1 d_2 + b_2 d_1)(e_1 f_2 + e_2 f_1) \\
& + (a_1 c_2 + a_2 c_1)(b_1 d_1 + b_2 d_2)(e_1 f_2 + e_2 f_1).
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite dieser Identität bleibt ungeändert, wenn man

$$a \text{ mit } e, \quad b \text{ mit } d, \quad c \text{ mit } f$$

vertauscht. Daher ergiebt sich mittels (α) und (β), wenn man noch:

$$e+f=p, \; a+b=q, \; c+d=r, \; c-d=s, \; a-b=t, \; e-f=u$$

setzt und die durch obige Vertauschung hervorgehenden Grössen durch Striche bezeichnet, also:

$$a+c=p', \; e+d=q', \; f+b=r', \; f-b=s', \; e-d=t', \; a-c=u',$$

der folgende Satz:

Es ist

$$
\begin{aligned}
\text{(III)} \qquad & \vartheta_3(p)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_3(q)\,\vartheta_3(t)\,\vartheta_3(r)\,\vartheta_3(s) \\
& + \vartheta_3(p)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_2(q)\,\vartheta_2(t)\,\vartheta_2(r)\,\vartheta_2(s) \\
& + \vartheta_2(p)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_3(q)\,\vartheta_3(t)\,\vartheta_2(r)\,\vartheta_2(s) \\
& + \vartheta_2(p)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_2(q)\,\vartheta_2(t)\,\vartheta_3(r)\,\vartheta_3(s) \\
& = \vartheta_3(p')\,\vartheta_3(u')\,\vartheta_3(q')\,\vartheta_3(t')\,\vartheta_3(r')\,\vartheta_3(s') \\
& + \vartheta_3(p')\,\vartheta_3(u')\,\vartheta_2(q')\,\vartheta_2(t')\,\vartheta_2(r')\,\vartheta_2(s') \\
& + \vartheta_2(p')\,\vartheta_2(u')\,\vartheta_3(q')\,\vartheta_3(t')\,\vartheta_2(r')\,\vartheta_2(s') \\
& + \vartheta_2(p')\,\vartheta_2(u')\,\vartheta_2(q')\,\vartheta_2(t')\,\vartheta_3(r')\,\vartheta_3(s'),
\end{aligned}
$$

wenn die zweimal sechs Variabeln in folgender Weise verknüpft sind:

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2p' &= q + r + s + t, \\ 2q' &= p + r - s + u, \\ 2r' &= p + q - t - u, \\ 2s' &= p - q + t - u, \\ 2t' &= p - r + s + u, \\ 2u' &= q - r - s + t. \end{aligned}$$

Der Vertauschung von f_1 und f_2 in (5) entspricht eine Vertauschung von ϑ_3 und ϑ_2 in (III). Daher bleibt diese Gleichung bestehen, wenn man ϑ_3 mit ϑ_2 vertauscht. Indem man die auf diese Weise resultirende Gleichung mit (III) zusammenfasst, erhält man den folgenden einfachen Satz:

Bedeutet ε die positive oder negative Einheit, so bleibt das Product

$$(\mathrm{IV})\qquad \{\vartheta_3(p)\vartheta_3(u)+\varepsilon\vartheta_2(p)\vartheta_2(u)\}\,\{\vartheta_3(q)\vartheta_3(t)+\varepsilon\vartheta_2(q)\vartheta_2(t)\}\\ \{\vartheta_3(r)\,\vartheta_3(s)+\varepsilon\vartheta_2(r)\vartheta_2(s)\}$$

ungeändert, wenn man die Variabeln p, q, r, s, t, u durch die in (6) *definirten Variabeln p', q', r', s', t', u' ersetzt.*

Ich will für die Identitäten, aus welchen das Jacobi'sche Theorem und der eben ausgesprochene Satz hervorgehen, noch einen zweiten Beweis geben. Derselbe ist ausser durch seine Einfachheit auch dadurch bemerkenswerth, dass er die mannigfachen Gruppirungen der Variabeln, von denen in (4) und (6) nur je eine dargelegt ist, unmittelbar zeigt.

Bedeutet ε, wie bisher, die positive oder negative Einheit, so ist:

$$(7)\qquad (a_1+\varepsilon a_2)(b_1+\varepsilon b_2)=(a_1b_1+a_2b_2)+\varepsilon(a_1b_2+a_2b_1).$$

Multiplicirt man diese Identität mit der analogen für c_i, d_i, so wird die linke Seite nicht geändert, wenn man b_i mit c_i vertauscht. Die eine der beiden Identitäten, welche durch die Gleichsetzung der rechten Seiten hervorgehen, stimmt mit (3) genau überein und führt zu der in (4) gegebenen Gruppirung der Variabeln. Damit ist das Jacobi'sche Fundamentaltheorem aufs Neue bewiesen. Setzt man ferner in (7) für a_i, b_i bez. c_i, d_i und e_i, f_i $(i=1,2)$ und multiplicirt, so ändert sich die linke Seite nicht, wenn man

$$a \text{ mit } e,\quad b \text{ mit } d,\quad c \text{ mit } f$$

vertauscht. Die Gleichsetzung der rechten Seiten liefert unmittelbar die (IV) zu Grunde liegende Identität und führt auf die Variabelngruppirung in (6). Nimmt man andere Vertauschungen der zweimal vier Elemente $a_i \dots d_i$ oder der zweimal sechs Elemente $a_i \dots f_i$ vor, so lassen die auf diese Weise hervorgehenden Variabelngruppirungen zwar merkwürdige geometrische Interpretationen zu; für die Theorie der Thetafunctionen ergeben sie aber nur diejenigen Resultate, welche

man bei Aenderung der Vorzeichen der Variabeln und bei Vermehrung der Perioden erhalten würde. Das Nämliche gilt, wenn man, statt nur die Einheit ε einzuführen, als Hülfsgrössen andere Einheiten wählte.

Ebenso wie das Jacobi'sche Fundamentaltheorem bei passender Aenderung der Variabeln die gemeinsame Quelle für alle Relationen ist, in welche vier Variabeln eintreten, fliessen aus (III) und (IV) die sämmtlichen für sechs Variabeln gültigen Formeln, namentlich diejenigen, welche von Jacobi*), Gudermann**) und Glaisher***) für die speciellen aus drei Grössen und deren Differenzen bestehenden sechs Variabeln aufgestellt worden sind. Man erhält indess diese interessanten Formelsysteme noch einfacher und unmittelbarer, wenn man die zwischen den Grössen

$$b_1 c_1 + \varepsilon b_2 c_2, \quad b_1 c_2 + \varepsilon' b_2 c_1 \qquad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1)$$

und den analogen bestehenden Identitäten in Thetarelationen umsetzt. So ergeben sich aus der identischen Gleichung:

$$\mathsf{AB\Gamma} + \mathsf{A}BC + \mathsf{B}CA + \mathsf{\Gamma}AB = 0$$

für:

$$\mathsf{A} = b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad \mathsf{B} = c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad \mathsf{\Gamma} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$A = b_1 c_1 + \varepsilon b_2 c_2, \quad B = c_1 a_1 + \varepsilon c_2 a_2, \quad C = a_1 b_1 + \varepsilon a_2 b_2 \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

die beiden Gudermann'schen Formeln, von deren einer die Jacobi'sche, die auch Richelot bewiesen, sich nur unwesentlich unterscheidet. Setzt man

$$A = i(b_1 c_2 + b_2 c_1), \quad i(c_1 a_2 + c_2 a_1), \quad i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (i^2 = -1)$$

so erhält man die erste Glaisher'sche Formel und in ähnlicher Weise die andern.

Göttingen, im October 1886.

---

*) Jacobi, Ges. Werke Bd. I, S. 336.

**) Gudermann, Journ. f. Math. Bd. 28.

***) Glaisher, Ass. franc. 1880. Séance de 17 août. Report of the Brit. Ass. 1880. Messenger of Math. 1880. S. 92, 104, 130. Proc. of the Cambr. Phil. Soc. vol. IV, p. 186. Quat. Journ. 1882, p. 28.

Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Die Theorie der Gleichungen fünften Grades, die ich in meinen *„Vorlesungen über das Ikosaeder etc."* (Teubner 1884) zu zusammenhängender Darstellung gebracht habe, gestattet nicht nur, wie ich ebenda an verschiedenen Stellen andeutete, eine Uebertragung auf Gleichungen vierten Grades*), sondern ebensowohl eine Ausdehnung auf Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Es ist der Zweck der nachstehenden Zeilen, diese Ausdehnung in ihren Grundzügen festzulegen. Dieselbe subsumirt sich ihrem Zielpunkte nach unter die allgemeinen Ideen, welche ich in Bd. XV dieser Annalen für die Auflösung beliebiger algebraischer Gleichungen aufgestellt habe**). Sie unterscheidet sich aber von ihnen durch die concrete Form des zu

---

*) Vergl. die Noten zu p. 188, 256—257, sowie p. 260. — Die Theorie der Gleichungen dritten Grades, welche ich in meinen „Vorlesungen" ebenfalls mehrfach berühre, kommt bei den nun im Texte zu entwickelnden Verhältnissen als zu einfach nicht in Vergleich.

**) *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* (siehe insbesondere p. 253—257 daselbst), sowie die Bemerkung über Gleichungen sechsten Grades auf p. 126 meiner „Vorlesungen". — Ich habe in meinen Seminarien auch verschiedentlich versucht, die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades mit der Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte Zwei und insbesondere der Theorie der aus ihr erwachsenden sog. Borchardt'schen Moduln in Verbindung zu bringen. Man vergl. wegen dieser Entwickelungen, — die jetzt im Texte unberührt bleiben, auf die ich aber bald zurückzukommen hoffe, — Reichardt in den sächsischen Berichten von 1885 (*Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades*) sowie im vorliegenden Annalenbande (*Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p=2$*), ferner Cole im 8ten Bande des American Journal (*A Contribution to the Theory of the General Equation of the Sixth Degree*). Letztere Arbeit enthält übrigens eine Reihe von Einzelheiten, mit denen ich nicht einverstanden sein kann, was ich bei aller Anerkennung ihrer sonstigen Vorzüge hervorzuheben nicht unterlassen darf.

benutzenden geometrisch-algebraischen Processes, der individuelle, nur bei $n = 6$ und $n = 7$ vorliegende Momente benutzt.

Die in Aussicht genommene Entwickelung spaltet sich dem Wesen der Sache entsprechend in drei Theile: die Problemstellung, die Construction gewisser endlicher Gruppen quaternärer linearer Substitutionen, die Reduction der Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die diesen Gruppen zugehörigen Gleichungssysteme. Ich nehme dabei überall auf die für die Gleichungen vierten und fünften Grades geltenden Ueberlegungen Bezug; auch halte ich, wie in meinen „Vorlesungen", daran fest, die in Betracht kommenden algebraischen Processe durch geometrische Constructionen einzuleiten. In der That ist zunächst meine Absicht, meinen eigenen Gedankengang genau so darzulegen, wie er mich zu den in Betracht kommenden Resultaten geführt hat; es mag späteren Darstellungen vorbehalten bleiben, diese Resultate, die ihrer Natur nach rein algebraisch sind, auf rein algebraischem Wege zu entwickeln.

Hierzu noch eine kleine Bemerkung. Das Attribut „allgemein", welches ich in der Ueberschrift den zu untersuchenden Gleichungen sechsten und siebenten Grades beilege, soll sich darauf beziehen, dass die genannten Gleichungen keinen besonderen Affect zu besitzen brauchen, ihre Gruppe also so umfassend vorausgesetzt wird, wie möglich. Es wird, wie ich hoffe, kein Missverständniss erzeugen, wenn ich des Weiteren im Texte das Wort „allgemein" gelegentlich in anderer Bedeutung gebrauche, indem ich nämlich Gleichungen allgemein nenne, deren Wurzeln freiveränderliche Grössen sind.

I. Die Problemstellung.

§ 1.

Rückblick auf die Gleichungen vierten und fünften Grades.

Der Ausgangspunkt für die in meinen „Vorlesungen" gegebene Untersuchung der Gleichungen vierten und fünften Grades ruht in einer geometrischen Discussion desjenigen Gebildes, welches durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad \sum_0^{n-1} x_\varkappa = 0, \qquad \sum_0^{n-1} x_\varkappa^2 = 0$$

dargestellt wird, wo n, jenachdem, gleich 4 oder gleich 5 zu nehmen sein wird. Um eine möglichst bequeme Ausdrucksweise zu haben, deuten wir, der ersten dieser beiden Gleichungen entsprechend, die Grössen x als Vierseits-Coordinaten in der Ebene, bez. als Fünfflach-Coordinaten im Raume. Wir haben dann, vermöge der zweiten Gleichung, das eine Mal einen ausgezeichneten Kegelschnitt, das andere

Mal eine Fläche zweiten Grades (die „Hauptfläche") vor uns, die es jetzt näher zu betrachten gilt.

Ich werde dies hier zunächst für die Gleichungen fünften Grades ausführen. Bei ihnen richtet sich die Aufmerksamkeit darauf, dass die Fläche (1) zwei Schaaren geradliniger Erzeugender trägt. Wir bemerken, dass die einzelne dieser Schaaren eine rationale Mannigfaltigkeit ist, und dass wir also die ihr angehörigen Erzeugenden durch die Werthe eines Parameters z eindeutig bezeichnen können; dieses z ersetzen wir mit Rücksicht auf die späteren Verallgemeinerungen durch den Quotienten zweier Verhältnissgrössen:

(2) $$z = z_1 : z_2.$$

Wir betrachten jetzt diejenigen Raumcollineationen, die den Vertauschungen der $x_0 \ldots x_{n-1}$ entsprechen, und erkennen, dass die Hauptfläche selbst bei allen diesen 120 Collineationen in sich übergeht, die einzelne Erzeugendenschaar aber nur bei den 60 Collineationen, die geraden Vertauschungen der x correspondiren. Die Grösse $z_1 : z_2$ erfährt also bei den 60 geraden Vertauschungen der x 60, nothwendig eindeutige Transformationen. Jetzt sind eindeutige Transformationen einer einzelnen Grösse aus functionentheoretischen Gründen linear. Wir finden also — und bei diesem Resultate mögen wir einen Augenblick inne halten —, *dass die als Parameter der Erzeugenden einer Schaar eingeführte Grösse $z_1 : z_2$ bei den* 60 *geraden Vertauschungen der x_ν eine Gruppe von* 60 *linearen Transformationen erleidet.* Dies ist der eigentliche Kernpunkt der Theorie. Dass die in Rede stehende Gruppe mit der von anderer Seite bekannten Gruppe der *Ikosaedersubstitutionen* identisch ist, erscheint als zufällig und unwesentlich. In der That: wäre die Gruppe linearer Transformationen, welche z erfährt, nicht schon anderweit bekannt, so würde man alle ihre Eigenschaften der aus (1), (2) fliessenden Definition der Gruppe entnehmen können.

Wir führen vorab für die Gleichungen vierten Grades die Ueberlegung bis zu demselben Punkte. Bei ihnen gestalten sich die Verhältnisse noch wesentlich einfacher. Statt der zwei Schaaren geradliniger Erzeugender, die bei den Gleichungen fünften Grades in Betracht kamen, haben wir bei ihnen die eine Schaar der dem Kegelschnitte (1) angehörigen Punkte ins Auge zu fassen. Auch sie ist rational, so dass wieder das einzelne der Schaar angehörige Individuum durch einen Parameter

(2*) $$z = z_1 : z_2$$

eindeutig bezeichnet werden kann. Wieder betrachten wir die Collineationen, die den Vertauschungen der $x_0 \ldots x_{n-1}$ entsprechen. Unsere Punkteschaar geht, wie ersichtlich, bei jeder dieser 24 Collineationen in sich über, so dass eine Unterscheidung gerader und ungerader Collinea-

tionen (bez. Vertauschungen) unnöthig wird. Wir schliessen, *dass die durch* (2*) *bezeichnete Grösse* $z_1 : z_2$ *bei den* 24 *Vertauschungen der* $x_\varkappa$ *eine Gruppe von* 24 *linearen Transformationen erleidet.* Diese Gruppe erweist sich dann hinterher als identisch mit der von anderer Seite bekannten Gruppe der *Oktaedersubstitutionen.* —

An die hiermit bezeichneten Resultate knüpft sich jetzt, für $n = 5$ und $n = 4$ übereinstimmend, die eigentliche Problemstellung. Wir denken uns $x_0 \ldots x_{n-1}$ als unabhängige Veränderliche gegeben und *verlangen, zwei Grössen* z_1, z_2 *so als Functionen der* x *zu bestimmen, dass der Quotient* $z_1 : z_2$ *bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der* x (nämlich den geraden Vertauschungen für $n = 5$ und den sämmtlichen Vertauschungen für $n = 4$) *die Ikosaedersubstitutionen bez. die Oktaedersubstitutionen erleidet.* Haben wir dies Problem erledigt, so kann die Gleichung n^{ten} Grades, von der die x abhängen, durch die Ikosaedergleichung oder Oktaedergleichung, der $z_1 : z_2$ genügt, ersetzt werden, womit das Ziel, um welches es sich bei diesen Untersuchungen zunächst handelt, erreicht ist. Die Oktaedergleichung enthält dabei neben rationalen Functionen der Coefficienten der vorgelegten Gleichung vierten Grades nur diejenigen Irrationalitäten, die wir bei der Construction des betreffenden $z_1 : z_2$ als „accessorische" Irrationalitäten benutzt haben mögen, die Ikosaedergleichung ausserdem die Quadratwurzel aus der Discriminante der vorgelegten Gleichung fünften Grades.

Dies mit wenigen Worten der Gedankengang, den wir nun auf Gleichungen sechsten und siebenten Grades zu übertragen suchen müssen.

§ 2.

Allgemeiner Ansatz für die Gleichungen sechsten und siebenten Grades.

Dem Gesagten genau entsprechend beginnen wir auch bei $n = 6$ und $n = 7$ mit einer geometrischen Untersuchung des Gleichungssystems:

$$(3) \qquad \sum_0^{n-1} x_\varkappa = 0, \quad \sum_0^{n-1} x_\varkappa^2 = 0.$$

Zweckmässigerweise werden wir wieder die erste dieser Gleichungen als eine zwischen den n Variabelen x bestehende Identität auffassen und dementsprechend die $x_0 \ldots x_{n-1}$ nicht nur als homogene, sondern auch als überzählige Punktcoordinaten (eines Raumes von $(n-2)$ Dimensionen) deuten. Der Inbegriff der Gleichungen (3) stellt dann eine in diesem Raume gelegene quadratische Mannigfaltigkeit von $n - 3$ Dimensionen

$$M_{n-3}^{(2)}$$

dar, deren geometrische Eigenschaften zu untersuchen sind.

Es handelt sich insbesondere um die in der $M_{n-3}^{(2)}$ enthaltenen *linearen Räume von möglichst grosser Dimensionenzahl.* Ich will einen solchen Raum, sofern er ν Dimensionen hat, mit R_ν bezeichnen. Für $n = 4, 5$ hatten wir auf der $M_{n-3}^{(2)}$ ∞^1 R_0 (d. h. Punkte), beziehungsweise zwei Schaaren von ∞^1 R_1 (d. h. gerade Linien). Für $n = 6, 7$ ergiebt die allgemeine Theorie der quadratischen Mannigfaltigkeiten, auf welche ich hier nicht näher eingehe, auf die ich übrigens zum Schlusse der gegenwärtigen Arbeit noch einmal zurückkomme*), den folgenden Satz, der die Grundlage unserer weiteren Entwickelungen zu bilden hat:

Die $M_3^{(2)}$ enthält ∞^3 R_1, die $M_4^{(2)}$ zwei Schaaren von ∞^3 R_2.

Bei $n = 4$ und $n = 5$ konnten wir uns nun des Weiteren, was die Einführung des Parameters $z_1 : z_2$ und sein Verhalten bei den Vertauschungen der x angeht, auf functionentheoretische Gründe stützen. In Anbetracht der vielen Möglichkeiten, welche die Functionen mehrerer Variabler darbieten, in Anbetracht ferner der Unkenntniss, in welcher wir uns betreffs dieser Möglichkeiten befinden, erscheint eine gleiche Schlussweise bei $n > 5$ unstatthaft. Trotzdem gelten für $n = 6$ und $n = 7$ Beziehungen, welche genau den für $n = 4$ und $n = 5$ aufgestellten Sätzen entsprechen. Wir entnehmen dies den Entwickelungen einer scheinbar fremdartigen, von anderer Seite bekannten Disciplin, nämlich der *Liniengeometrie.* Ich will die Einzelheiten, die hier in Betracht kommen, erst im folgenden Paragraphen besprechen und mich hier mit der Angabe des Resultates begnügen. Die Sache ist die, dass man bei $n = 6$ die dreifach unendlich vielen R_1 und bei $n = 7$ die dreifach unendlich vielen R_2 der einen (beliebig auszuwählenden Schaar) genau so durch vier Verhältnissgrössen

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 \tag{4}$$

festlegen kann, wie dies bei $n = 4, 5$ hinsichtlich der bei ihnen in Betracht kommenden einfach unendlich vielen Räume durch die zwei Verhältnissgrössen $z_1 : z_2$ geschah. *Einmal ist die Beziehung zwischen den linearen Räumen und den Werthsystemen der $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ durchaus eindeutig, andererseits erfahren die z bei den Vertauschungen der x, oder doch, für $n = 7$, bei den geraden Vertauschungen der x, lineare Transformationen.* Offenbar sind die Gruppen linearer Transformationen der z, welche auf diese Weise entstehen und die 6! bez. 7! : 2 Operationen

---

*) Vergl. Cayley im 12ten Bande des Quarterly Journal (1873): *On the superlines of a quadric surface in five-dimensional space,* Veronese im 19ten Bande der Math. Annalen (1881): *Behandlung der projectiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen etc.,* Segre im 36ten Bande der Memorie der Turiner Akademie, ser. 2. (1884): *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.*

enthalten, das genaue Analogon zu den bei $n = 4$ und $n = 5$ auftretenden Oktaeder- und Ikosaeder-Gruppen.

An diese Sätze knüpft nun sofort die weitere Problemstellung. Es wird sich darum handeln, *aus n beliebig vorgegebenen Grössen* $x_0 \ldots x_{n-1}$ (mag $n = 6$ oder $n = 7$ sein) *vier Functionen* z_1, z_2, z_3, z_4 *so zusammenzusetzen, dass die Verhältnisse* $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ *bei den in Betracht kommenden, soeben näher bezeichneten Vertauschungen der* x *die zugehörigen linearen Transformationen erfahren.* Wir erreichen dann, dass wir die Gleichungen sechsten und siebenten Grades durch ein *Gleichungssystem der* z ersetzen können, was im Sinne der anderweitig entwickelten Gesichtspunkte als der erste, bei den genannten Gleichungen anzustrebende Fortschritt erscheint*). Diese Gleichungssysteme (deren nähere Eigenschaften zu untersuchen bleiben) sind das, was jetzt an Stelle der Oktaeder- und Ikosaeder-Gleichung tritt.

Der Analogie folgend werden wir nicht anders erwarten, als dass in den Ausdrücken der z durch die x accessorische Irrationalitäten auftreten müssen. In den Coefficienten des zugehörigen Gleichungssystems kommen neben rationalen Functionen der Coefficienten der jeweils vorgelegten Gleichung diese accessorischen Irrationalitäten dann selbstverständlich ebenfalls vor. Ausserdem wird im Falle $n = 7$ auch noch die Quadratwurzel aus der Discriminante der vorgelegten Gleichung auftreten, insofern ja für $n = 7$ bei der Definition des Gleichungssystems der z nur die geraden Vertauschungen der x in Betracht gezogen werden.

II. Definition der Parameter z und der zugehörigen quaternären Substitutionsgruppen.

§ 3.

Allgemeines über den Zusammenhang der x und der z.

Um den Zusammenhang zwischen den x und den z, den ich bezeichnete, am einfachsten zu erfassen, müssen wir, wie bereits gesagt, an die Elemente der Liniengeometrie anknüpfen. Wir beginnen dabei mit den z, die wir als homogene Punktcoordinaten des gewöhnlichen Raumes deuten, und suchen von ihnen aus durch Vermittelung der sechs homogenen Coordinaten der Raumgeraden zu Grössen x zu gelangen, die den Relationen (3) genügen. Erscheint dieser Weg manchem Algebristen fremdartig, so sei daran erinnert, dass Alles, was wir über die linearen Räume auf dreifach und vierfach ausgedehnten

*) Vergleiche, auch wegen der Ausdrucksweise, Bd. XV dieser Annalen, l. c., sowie „Vorlesungen" p. 125, 126.

quadratischen Mannigfaltigkeiten wissen, ursprünglich auf eben diesem Wege erschlossen wurde*).

Wir werden die Raumgerade hier als Verbindungslinie zweier Punkte z, z' definiren. Als Coordinaten der Raumgeraden erscheinen dann zunächst die sechs Unterdeterminanten:

$$(5)\qquad \begin{cases} p_{12}=z_1z_2'-z_1'z_2, & p_{13}=z_1z_3'-z_1'z_3, & p_{14}=z_1z_4'-z_1'z_4, \\ p_{34}=z_3z_4'-z_3'z_4, & p_{42}=z_4z_2'-z_4'z_2, & p_{23}=z_2z_3'-z_2'z_3, \end{cases}$$

zwischen denen die quadratische Relation besteht:

$$(6)\qquad p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0,$$

weiter aber irgend sechs linearunabhängige lineare Functionen der p_{ik}:

$$(7)\qquad \xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_6,$$

zwischen denen, der Formel (6) entsprechend, eine quadratische Gleichung statthaben wird, die wir folgendermassen bezeichnen:

$$(8)\qquad \Omega(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_6)=0.$$

Vermöge geeigneter Wahl der ξ kann dieses Ω jede beliebige quadratische Form der beigesetzten Argumente werden, die, gleich der linken Seite von (6), eine nicht verschwindende Determinante besitzt: aus den Coefficienten von Ω schliessen wir auf die geometrischen Beziehungen der durch Nullsetzen der einzelnen ξ dargestellten linearen Complexe**).

Hiermit nun sind die Werthsysteme sechs homogener Variabler ξ, die einer quadratischen Gleichung (8) *von angegebener Beschaffenheit genügen, zu den Werthsystemen, welche vier homogene Variable z durchlaufen, in eine bestimmte Beziehung gesetzt und eben diese Beziehung ist es, die in geeigneter Weise specificirt den Zusammenhang zwischen den Grössen x und z des vorigen Paragraphen aufdeckt.* In der That entsprechen die Punkte des Raumes, wie hier nicht näher auszuführen ist, wenn wir dieselben als Strahlenbündel auffassen, genau den dreifach unendlich vielen R_2 der einen Art, welche die durch (8) vorgestellte $M_4^{(2)}$ enthält (während die Ebenen des Raumes, insofern wir sie als Geradenfelder auffassen, den dreifach unendlich vielen R_2 der anderen Art correspondiren). Oder auch, wenn wir zu (8) irgend eine lineare Gleichung hinzunehmen:

$$(9)\qquad \sum a_\varkappa\, \xi_\varkappa=0$$

und uns so auf die geraden Linien eines bestimmten linearen Complexes beschränken, so entsprechen die Punkte des Raumes den dreifach unendlich vielen R_1, welche die durch (8) und (9) vorgestellte

*) Vergl. Cayley, l. c.

**) Vergl. meinen Aufsatz in Bd. 2 dieser Annalen: *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten.* Wir benutzen dies später noch wiederholt.

$M_3^{(2)}$ enthält; läuft doch von jedem Raumpunkte aus ein bestimmtes dem Complexe (9) angehöriges Strahlbüschel!

Um dies jetzt in Bezug auf die x näher auszuführen, nehmen wir erstlich $n = 6$. Wir werden dann die $x_0 \dots x_5$ mit den $\xi_1 \dots \xi_6$ und die zwischen den x bestehende quadratische Gleichung des vorigen Paragraphen, die ich hier mit neuer Nummer noch einmal hersetze:

$$\sum_0^5 x_\varkappa^2 = 0 \tag{10}$$

mit der Gleichung (8) identificiren können. Die $x_\varkappa$ bedeuten dann, gleich Null gesetzt, in bekannter Weise solche sechs lineare Complexe, welche wechselseitig in Involution liegen. Jetzt sollte zwischen den $x_\varkappa$ auch noch die lineare Gleichung statthaben:

$$\sum_0^5 x_\varkappa = 0\,, \tag{11}$$

die wir mit Gleichung (9) parallelisiren. Ich werde den durch diese Gleichung dargestellten Complex den *Einheitscomplex* nennen *Hiernach sind die Werthsysteme $x_\varkappa$, welche im Falle $n = 6$ den Gleichungen* (3) *des vorigen Paragraphen, oder, was dasselbe ist, den Gleichungen* (10) *und* (11) *genügen, durch die Geraden des Einheitscomplexes vorgestellt; die z aber, die wir einzuführen haben, werden nichts anderes sein, als irgendwelche Tetraedercoordinaten der Raumpunkte.* Wir begnügen uns hier vorab mit dieser allgemeinen Aussage; ein bestimmtes Coordinatensystem zur Festlegung der zwischen den x und den z bestehenden analytischen Beziehungen werden wir erst im zweitfolgenden Paragraphen definiren.

Sei ferner $n = 7$. Statt der sechs Coordinaten $\xi_1 \dots \xi_6$ und der einen für sie geltenden Gleichung (8) haben wir dann sieben Grössen $x_0 \dots x_6$ und zwei zwischen ihnen bestehende Relationen:

$$\sum_0^6 x_\varkappa = 0, \quad \sum_0^6 x_\varkappa^2 = 0. \tag{12}$$

Offenbar brauchen wir hier nur das eine x, etwa x_0, vermöge der ersten dieser beiden Relationen aus der zweiten zu eliminiren, um die übrigen x, also $x_1 \dots x_6$, als Specialfall der $\xi_1 \dots \xi_6$ betrachten zu können; mit anderen Worten: wir haben $x_0 \dots x_6$ als *überzählige Liniencoordinaten* aufzufassen. *Hiernach repräsentirt jedes den Gleichungen* (12) *genügende Werthsystem der x eine Raumgerade; die Grössen z aber, die wir in Aussicht nehmen, werden wieder nichts Anderes sein,*

als irgendwelche Tetraedercoordinaten der Raumpunkte. Bestimmte Formeln für den Zusammenhang der x und der z sollen wieder erst im zweitfolgenden Paragraphen aufgestellt werden.

§ 4.

Ueber das Verhalten der z bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x.

Die zwischen den Grössen x und z bestehende Abhängigkeit ist durch die Sätze des vorigen Paragraphen hinreichend definirt, so dass wir jetzt schon den Beweis erbringen können, auf den es vor allen Dingen ankommt, *dass sich die z bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x linear transformiren.* Wir haben zu dem Zwecke den liniengeometrischen Satz zu Grunde zu legen, den ich zuerst in Bd. 4 dieser Annalen (p. 356) mittheilte, dass nämlich jede lineare Substitution der Liniencoordinaten $\xi_1 \ldots \xi_6$, bei welcher die in (8) benutzte quadratische Form Ω in sich übergeht, eine Collineation oder eine dualistische Umformung des Raumes bedeutet, und zwar das erstere oder das zweite, je nachdem die zugehörige Substitutionsdeterminante, deren Quadrat nothwendig gleich Eins ist, gleich $+1$ oder gleich -1 gefunden wird. Des Näheren müssen wir wieder zwischen den Fällen $n = 6$ und $n = 7$ unterscheiden.

Im Falle $n = 7$, der sich hier unmittelbar erledigt, ersetzen wir im Ausspruche unseres Satzes ξ_1 etwa durch x_1, ξ_2 durch $x_2, \ldots, \xi_6$ durch x_6, und bemerken, dass jede gerade Vertauschung der sieben Grössen $x_0, x_1, \ldots, x_6$ vermöge der Relation $\sum_0^6 x_\varkappa = 0$ auf eine lineare Substitution der $x_1, \ldots, x_6$ von der Determinante $+1$ zurückkommt. *Daher entsprechen*, wie es behauptet wurde, *den $\frac{7!}{2}$ geraden Vertauschungen der x ebenso viele Collineationen des Raumes, d. h. lineare Transformationen der $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$.* Genau so entsprechen den $\frac{7!}{2}$ ungeraden Vertauschungen der x eine gleiche Zahl dualistischer Umformungen des Raumes, — eine Bemerkung, die zwar im Augenblicke nicht in Betracht kommt, auf die wir aber später zurückgreifen werden.

Im Falle $n = 6$ beginnen wir mit einer ganz ähnlichen Ueberlegung, indem wir die sechs in diesem Falle vorhandenen x der Reihe nach den $\xi_1, \ldots, \xi_6$ unseres liniengeometrischen Satzes entsprechend setzen. Wir finden dann, genau wie im Falle $n = 7$, *dass die geraden Vertauschungen der x Collineationen bedeuten, die ungeraden aber dualistische Umformungen des Raumes**). Nun haben wir uns aber

*) Cf. Math. Annalen IV, l. c.

nicht mit sämmtlichen Raumgeraden zu beschäftigen, sondern nur mit denjenigen des Einheitscomplexes. Ich sage, *dass wir mit Rücksicht hierauf die* 360 *dualistischen Umformungen, die wir gerade fanden, durch ebenso viele Collineationen ersetzen können.*

Ehe ich dies ausführe, muss ich zwei Vorbemerkungen machen hinsichtlich derjenigen dualistischen Umformung, die durch den Einheitscomplex als solchen gegeben ist, die nämlich jeden Punkt durch die Ebene ersetzt, die ihm im Einheitscomplexe entspricht.

Es handelt sich zunächst um die Darstellung dieser Umformung in Liniencoordinaten x. Um sie zu finden, haben wir offenbar die Coordinaten x' derjenigen Linie zu berechnen, welche irgend einer Linie x in Bezug auf den Einheitscomplex als conjugirte Polare zugeordnet ist. Dies giebt uns auf Grund bekannter Regeln die Formel:

$$(13) \qquad x'_\varkappa = x_\varkappa - \frac{1}{3} \sum x,$$

wo ich die absoluten Werthe der x' so bemessen habe, dass irgend welche x, die der Gleichung des Einheitscomplexes genügen ($\Sigma x = 0$), überhaupt keine Umänderung erleiden. Wir constatiren leicht, dass die Operation (13) die Periode Zwei besitzt.

Zweitens will ich die Formel (13) mit irgend welcher Vertauschung der x:

$$x'_i = x_\varkappa$$

combiniren. Wir finden

$$(14) \qquad x'_i = x_\varkappa - \frac{1}{3} \sum x$$

und zwar unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Zusammensetzung der Operationen geschieht, so dass also die Operation (13) mit irgend welchen Vertauschungen der x permutabel ist.

Die nähere Durchführung der Umsetzung unserer 360 dualistischen Transformationen knüpft jetzt unmittelbar an (14) an. Ist $x'_i = x_\varkappa$ ungerade, also eine dualistische Transformation, so bedeutet (14) eine Collineation. *Unsere Verabredung sei jetzt einfach, dass wir diese durch* (14) *gegebene Collineation in der Folge der Vertauschung* $x'_i = x_\varkappa$ *entsprechend setzen wollen.*

Um diese Verbindung als berechtigt erscheinen zu lassen, bemerken wir erstlich, dass die Transformationen (14) auf die Geraden des Einheitscomplexes (dessen Gleichung $\Sigma x = 0$ ist) ebenso wirken, wie die Vertauschungen der x selbst. Wir zeigen ferner, dass die neuen Operationen mit den geraden Vertauschungen der x zusammen eine Gruppe von 720 Operationen bilden, und dass diese Gruppe mit der Gruppe der 720 Vertauschungen der x holoedrisch isomorph ist. Ich will zu dem Zwecke irgendwelche Collineationen, welche geraden Vertauschungen der x entsprechen, mit $C, C', \ldots$ bezeichnen, dualistische

Umformungen, die den ungeraden Vertauschungen der x correspondiren, mit $D, D', \ldots$, endlich die Operation (13) mit E. Dann ist nach dem, was wir sagten:

$$E^2 = 1, \quad CE = EC, \quad DE = ED.$$

In Folge dessen kann jede Aufeinanderfolge von Collineationen $C, C', \ldots$, $DE, D'E', \ldots$ so umgestaltet werden, dass wir den Buchstaben E zwischendurch einfach weglassen und dafür eventuel am Ende zufügen, wenn nämlich die Anzahl der an der Zusammenstellung betheiligten $D, D', \ldots$ eine ungerade ist. Nun ist jede Verbindung der $C, C', \ldots$ $D, D', \ldots$ selbst eine C oder D, letzteres, wenn die Anzahl der benutzten $D, D', \ldots$ ungerade war. Daher ist jede Verbindung der $C, C', \ldots$ $DE, D'E, \ldots$, selbst eine C oder DE, und unsere 720 Operationen $C, C' \ldots DE, D'E, \ldots$ bilden in der That eine Gruppe. Die Uebereinstimmung dieser Gruppe mit der Vertauschungsgruppe der x ist in diesem Beweisgange von selbst mit enthalten. Denn nicht nur erscheint vermöge desselben jede Verbindung der $C, C', \ldots DE$, $D'E, \ldots$ eindeutig auf eine Verbindung der $C, C', \ldots, D, D', \ldots$ bezogen, sondern die Beziehung ist auch eine solche, dass einer Zusammenstellung zweier Verbindungen der einen Art die Zusammenstellung der entsprechenden Verbindungen der anderen Art entspricht. Hiermit nun sind unsere Behauptungen vollständig erwiesen. Es wird kein Missverständniss erzeugen, wenn ich in der Folge schlechthin von den 720 Collineationen rede, die „den Vertauschungen der x entsprechen."

§ 5.

Formeln für den Zusammenhang der x und der z.

Wir knüpfen jetzt den Zusammenhang zwischen den x und den z an bestimmte Formeln, indem wir geeignete einfache Coordinatensysteme zu Grunde legen. Wir wollen dabei für $n = 6$ und $n = 7$ übereinstimmend die Ausdrücke des Lagrange als Durchgangspunkt benutzen:

$$(16) \qquad \pi_\nu = x_0 + \gamma^\nu x_1 + \gamma^{2\nu} x_2 + \cdots + \gamma^{(n-1)\nu} x_{n-1},$$

wo γ eine zu n gehörige primitive Einheitswurzel bezeichnen soll und ν die Werthe $0, 1, \ldots, (n-1)$ zu durchlaufen hat; wir erreichen dadurch, soweit dies möglich ist, einen gewissen formalen Anschluss an die für $n = 4$ und $n = 5$ in meinen „Vorlesungen" gegebenen Entwickelungen.

Im Falle $n = 6$, den wir jetzt näher betrachten, will ich der grösseren Uebersichtlichkeit halber γ gleich $-\alpha$ setzen, unter α eine imaginäre dritte Wurzel aus Eins verstanden. Wir haben dann sechs Ausdrücke π_ν, die ich hier einzeln herschreibe:

$$(17)\quad \begin{cases} \pi_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ \pi_1 = x_0 - \alpha\, x_1 + \alpha^2 x_2 - x_3 + \alpha\, x_4 - \alpha^2 x_5, \\ \pi_2 = x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha\, x_2 + x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha\, x_5, \\ \pi_3 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5, \\ \pi_4 = x_0 + \alpha\, x_1 + \alpha^2 x_2 + x_3 + \alpha\, x_4 + \alpha^2 x_5, \\ \pi_5 = x_0 - \alpha^2 x_1 + \alpha\, x_2 - x_3 + \alpha^2 x_4 - \alpha\, x_5. \end{cases}$$

Aus ihnen folgt durch Auflösung:

$$(18)\quad \begin{cases} 6x_0 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5, \\ 6x_1 = \pi_0 - \alpha^2 \pi_1 + \alpha\, \pi_2 - \pi_3 + \alpha^2 \pi_4 - \alpha\, \pi_5, \\ 6x_2 = \pi_0 + \alpha\, \pi_1 + \alpha^2 \pi_2 + \pi_3 + \alpha\, \pi_4 + \alpha^2 \pi_5, \\ 6x_3 = \pi_0 - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_5, \\ 6x_4 = \pi_0 + \alpha^2 \pi_1 + \alpha\, \pi_2 + \pi_3 + \alpha^2 \pi_4 + \alpha\, \pi_5, \\ 6x_5 = \pi_0 - \alpha\, \pi_1 + \alpha^2 \pi_2 - \pi_3 + \alpha\, \pi_4 - \alpha^2 \pi_5, \end{cases}$$

und hieraus:

$$(19)\quad 3\sum_0^5 x_\varkappa{}^2 = \frac{\pi_0{}^2 + \pi_3{}^2}{2} + \pi_1 \pi_5 + \pi_2 \pi_4.$$

Wir schliessen aus (19), *dass wir setzen können:*

$$(20)\quad \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{p_{12} + p_{34}}{\sqrt{2}}, \quad \pi_1 = p_{13}, \quad \pi_2 = p_{14}, \\[2ex] \pi_3 = \dfrac{p_{12} - p_{34}}{i\sqrt{2}}, \quad \pi_4 = p_{23}, \quad \pi_5 = p_{42}, \end{cases}$$

unter $p_{12}, p_{13}, \ldots$ *gewöhnliche Liniencoordinaten, also Unterdeterminanten von* z, z' (*Formel* (5)) *verstanden.* In der That verwandelt sich ja vermöge dieser Substitution die für die Liniencoordinaten x geltende Bedingungsgleichung $\sum_0^5 x_\varkappa{}^2 = 0$ in die für die $p_{i\varkappa}$ charakteristische Form*):

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Wir tragen jetzt die in (20) gegebenen Werthe der π in (18) ein und haben damit *folgende Darstellung der x durch zwei Reihen von Punktcoordinaten z, z', die weiterhin zu Grunde zu legen sein wird***):*

---

*) Vergl. wiederholt meinen Aufsatz in Bd. 2 dieser Annalen: *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten.*

**) Eine andere Darstellung der $x_\varkappa$, die sonst vielfach gebraucht wird (vergl. z. B. Rohn in Bd. 18 der mathematischen Annalen, p. 143 ff.), ist folgende:

$$\begin{aligned} x_1 &= (p_{12}+p_{34}), & x_2 &= (p_{13}+p_{42}), & x_4 &= (p_{14}+p_{23}), \\ x_1 &= -\,i(p_{12}-p_{34}), & x_3 &= -\,i(p_{13}-p_{42}), & x_5 &= -\,i(p_{14}-p_{23}). \end{aligned}$$

$$(21)\begin{cases} 6x_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} + \quad p_{13} + \quad p_{14} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} + \quad p_{42} + \quad p_{23}, \\ 6x_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} - \alpha^2 p_{13} + \alpha\, p_{14} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} - \alpha\, p_{42} + \alpha^2 p_{23}, \\ 6x_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} + \alpha\, p_{13} + \alpha^2 p_{14} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} + \alpha^2 p_{42} + \alpha\, p_{23}, \\ 6x_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} - \quad p_{13} + \quad p_{14} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} - \quad p_{42} + \quad p_{23}, \\ 6x_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} + \alpha^2 p_{13} + \alpha\, p_{14} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} + \alpha\, p_{42} + \alpha^2 p_{23}, \\ 6x_5 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} - \alpha\, p_{13} + \alpha^2 p_{14} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} - \alpha^2 p_{42} + \alpha\, p_{23}, \end{cases}$$

wo in alter Weise:

(21*) $$p_{i\varkappa} = z_i z_\varkappa' - z_i' z_\varkappa.$$

Wir berechnen hieraus

$$\sqrt{2}\cdot\sum_0^5 x_\varkappa = p_{12} + p_{34},$$

so dass also die *Gleichung des Einheitscomplexes* folgende wird:

(22) $$p_{12} + p_{34} = 0.$$

Wir nehmen jetzt $n = 7$. Indem wir die für die x geltende lineare Gleichung

$$\sum_0^6 x_\varkappa = 0$$

als identisch erfüllt betrachten, werden von den sieben Ausdrücken π_ν (16), die in diesem Falle existiren, nur sechs übrig bleiben, nämlich diejenigen, welche $\nu = 1, 2, \ldots, 6$ entsprechen. Vermöge derselben drücken sich die $x_\varkappa$ folgendermassen aus:

(23) $$7x_\varkappa = \gamma^{-\varkappa}\pi_1 + \gamma^{-2\varkappa}\pi_2 + \gamma^{-3\varkappa}\pi_3 + \gamma^{-4\varkappa}\pi_4 + \gamma^{-5\varkappa}\pi_5 + \gamma^{-6\varkappa}\pi_6$$
$$\left(\varkappa = 0, 1, \ldots, 6;\quad \gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right).$$

Hiernach wird:

(24) $$\frac{7}{2}\sum_0^6 x_\varkappa^2 = \pi_1\pi_6 + \pi_2\pi_5 + \pi_3\pi_4.$$

Ich bin von derselben im Texte abgegangen, weil bei ihr die Formeln für die Operation S (siehe unten) unnöthig complicirt werden, und der Vergleich mit den für $n = 7$ zu gebrauchenden Formeln erschwert wird.

Wir können also den Uebergang zu den $p_{i\varkappa}$ etwa folgendermassen bewerkstelligen):*

$$(25)\qquad \begin{cases} \pi_6 = p_{12}, & \pi_3 = p_{13}, \quad \pi_5 = p_{14}, \\ \pi_1 = p_{34}, & \pi_4 = p_{42}, \quad \pi_2 = p_{23}. \end{cases}$$

*Die Ausdrücke für die $x_\varkappa$, die wir weiterhin zu Grunde zu legen haben, werden hiernach einfach**):*

$$(26)\qquad x_\varkappa = \gamma^{\varkappa} p_{12} + \gamma^{4\varkappa} p_{13} + \gamma^{2\varkappa} p_{14} + \gamma^{6\varkappa} p_{34} + \gamma^{3\varkappa} p_{42} + \gamma^{5\varkappa} p_{23}. -$$

Wir wollen diesen Formeln zum Schlusse noch eine kleine ergänzende Verabredung hinzufügen. Der Weg, den wir weiterhin einschlagen, zwingt uns, neben Punktcoordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 auch Ebenencoordinaten w_1, w_2, w_3, w_4 in Betracht zu ziehen. Setzen wir dementsprechend Liniencoordinaten $q_{i\varkappa}$ aus zwei Reihen von Grössen w zusammen:

$$(27)\qquad q_{i\varkappa} = w_i w'_\varkappa - w'_i w_\varkappa,$$

so sind diese den Coordinaten $p_{i\varkappa}$, welche dieselbe Gerade nach Formel (5) erhält, in bekannter Weise unter Abänderung der Reihenfolge proportional. Wir wollen nun festsetzen, dass die $q_{i\varkappa}$ den entsprechenden $p_{i\varkappa}$ einfach *gleich* sein sollen. Dann werden wir also folgende Beziehungen haben:

$$(28)\qquad p_{12} = q_{34},\; p_{13} = q_{42},\; p_{14} = q_{23},\; p_{34} = q_{12},\; p_{42} = q_{13},\; p_{23} = q_{14}.$$

§ 6.

Formeln für die durch die Vertauschungen der x definirten linearen Transformationen der z.

Es handelt sich jetzt darum, die linearen und ev. auch die dualistischen Transformationen hinzuschreiben, welche die Punktcoordinaten z auf Grund der im vorigen Paragraphen entwickelten

*) Ich wähle diese Reihenfolge, um die Formeln für die $x_\varkappa$, die ich sofort gebe, mit den sogleich aus Bd. XV zu citirenden Formeln möglichst in Uebereinstimmung zu bringen.

**) Ich möchte hier daran erinnern, dass ich schon im 15ten Annalenbande (p. 273 ff.) sieben Complexe dieser Art betrachtet habe und zwar zwei Reihen solcher Complexe neben einander, die ich damals durch die Gleichungen darstellte:

$$(\gamma^{\varkappa} p_{12} + \gamma^{3\varkappa} p_{13} + \gamma^{4\varkappa} p_{14}) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} (\gamma^{6\varkappa} p_{34} + \gamma^{3\varkappa} p_{42} + \gamma^{5\varkappa} p_{23}) = 0.$$

Diese zwei Reihen von Complexen gehen, wie ich damals zeigte, durch 168 Collineationen des Raumes simultan je in sich über. Offenbar ist diese Gruppe von 168 Collineationen eine Untergruppe in jeder der beiden Gruppen von $\frac{7!}{2}$ Collineationen, die im Sinne der jetzt im Texte gegebenen Entwickelungen zur einzelnen Complexreihe gehören.

Formeln (21), (26) den in Betracht kommenden Vertauschungen der x entsprechend erleiden. Wir behandeln diese Aufgabe (mit Rücksicht auf Ausdehnungen, welche den gegenwärtigen Untersuchungen späterhin gegeben werden sollen) in der Weise, dass wir sie über das zunächst Erforderliche hinaus noch präcisiren: wir werden nämlich zusehen, wie man die in die $p_{i\varkappa}$ eingehenden *homogenen* Grössen z_1, z_2, z_3, z_4 und z_1', z_2', z_3', z_4' (die hier immer als cogrediente Grössen betrachtet werden) linear substituiren oder dualistisch transformiren muss, damit sich die durch (21), (26) definirten x *ohne irgendwelchen zutretenden Factor* in geeigneter Weise umsetzen. Wir erhalten solcher homogener Substitutionen der z einer jeden Umänderung der x entsprechend selbstverständlich zwei, deren jede durch einen simultanen Vorzeichenwechsel sämmtlicher z aus der anderen hervorgeht. Denn die $p_{i\varkappa}$ und also die x sind bilineare Functionen der z, z' und bleiben also bei einem Vorzeichenwechsel der genannten Art völlig ungeändert. —

Um jetzt die Durchführung der so präcisirten Aufgabe zu beginnen, verabreden wir, dass wir wegen der übergrossen Zahl der in Betracht kommenden Operationen *explicite nur einige wenige Vertauschungen der x untersuchen wollen, aus denen sich alle anderen durch Wiederholung und Combination zusammensetzen.* Als solche fundamentale Vertauschungen wählen wir auf Grund bekannter Entwickelungen die folgenden beiden:

1) *die Operation S*, welche in einer cyklischen Vertauschung sämmtlicher x entsprechend der natürlichen Reihenfolge der Indices besteht:

$$S = (x_0 x_1 \cdots x_{n-1}), \tag{29}$$

2) *die Operation T*, welche x_0 mit x_1 vertauscht und die anderen x festlässt:

$$T = (x_0 x_1)(x_2) \cdots (x_{n-1}). \tag{30}$$

Im Falle $n = 6$ sind S und T beide ungerade Vertauschungen und liefern als solche zunächst dualistische Umformungen, die wir hinterher mit Hülfe des Einheitscomplexes in Collineationen umsetzen werden. Im Falle $n = 7$ ist S eine gerade, T aber wieder eine ungerade Vertauschung. Wir erhalten also für S eine Collineation, für T eine dualistische Umformung, die wir als solche in Punktcoordinaten z und Ebenencoordinaten w hinschreiben. Um dann die Collineationen zu haben, welche den geraden Vertauschungen der x entsprechen, verabreden wir einfach, dass wir nur solche Combinationen von S und T in Betracht ziehen wollen, *an denen T eine gerade Anzahl von Malen betheiligt ist.*

Die so umgrenzte Aufgabe erledigt sich nun dank unserer Coordinatenwahl und auf Grund einfacher geometrischer Betrachtungen ohne

besonders complicirte Rechnung. Ich behandele hier die Fälle $n = 6$ und $n = 7$ nach einander.

I. $n = 6$.

1) *Die Operation S.*

Wir wollen hier von der Umsetzung der x direct zu derjenigen der p_{ix} übergehen. Wir haben zunächst die cyklische Vertauschung:

$$x_0' = x_1, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_5, \quad x_5' = x_0,$$

und finden ihr entsprechend aus (21):

$$p_{12}' = p_{34}, \quad p_{13}' = -\alpha p_{13}, \quad p_{14}' = \alpha^2 p_{14}, \quad p_{34}' = p_{12}, \quad p_{42}' = -\alpha^2 p_{42}, \quad p_{23}' = \alpha p_{23}.$$

Wir haben ferner für die durch den Einheitscomplex bewirkte Umsetzung nach Formel (13)

$$x_x' = x_x - \frac{1}{3} \sum x,$$

was vermöge (21) für die p_{ix} besagt, dass man p_{12} durch $-p_{34}$, p_{34} durch $-p_{12}$ ersetzen, die übrigen p_{ix} aber ungeändert lassen soll. Durch Combination entsteht hiernach als die der Operation S entsprechende Collineation:

$$p_{12}' = -p_{12}, \quad p_{13}' = -\alpha p_{13}, \quad p_{14}' = \alpha^2 p_{14}, \quad p_{34}' = -p_{34}, \quad p_{42}' = -\alpha^2 p_{42}, \quad p_{23}' = \alpha p_{23}.$$

Dies aber liefert sofort die folgende lineare Umsetzung der z, die wir selbst mit S bezeichnen:

(31) S: $\pm z_1' = z_1, \quad \pm z_2' = -z_2, \quad \pm z_3' = -\alpha z_3, \quad \pm z_4' = \alpha^2 z_4.$

Die $\pm$ Zeichen linker Hand entsprechen der bereits bemerkten nothwendigen Unbestimmtheit; dieselben sind, hier wie in der Folge, so zu verstehen, dass bei sämmtlichen z' übereinstimmend entweder das $+$ oder das $-$ Zeichen in Anwendung zu bringen ist.

2) *Die Operation T.*

Wir haben als ursprüngliche Vertauschung der x:

$$x_0' = x_1, \quad x_1' = x_0, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4, \quad x_5' = x_5.$$

Wir wollen die Rechnung nun so einrichten, dass wir zunächst die dualistische Beziehung zwischen den w und den z aufsuchen, die dieser Vertauschung der x entspricht. Es wird dies durch den Umstand erleichtert, dass die geometrische Bedeutung der Vertauschung auf der Hand liegt. In der That bleiben bei derselben alle Raumgeraden ungeändert, für welche $x_0 - x_1 = 0$ ist. Wir schliessen daraus, dass wir es mit der dualistischen Umformung zu thun haben, die durch den Complex

$$(32) \qquad x_0 - x_1 = 0$$

indicirt ist, d. h. die jeden Punkt durch diejenige Ebene ersetzt, welche ihm in diesem Complexe entspricht. Jetzt schreibt sich (32) vermöge (21) folgendermassen:

$$(32^*) \qquad -\sqrt{2}\cdot ip_{12} - \alpha p_{13} + (1-\alpha)\,p_{14} + \sqrt{2}\cdot ip_{34} - \alpha^2 p_{42} + (1-\alpha^2)\,p_{23} = 0.$$

Wir setzen für die $p_{i\varkappa}$ ihre Werthe in den z, z' und ordnen nach den z'. So entsteht:

$$\begin{array}{rlllll} & z_1'(\quad \cdot & + \; i\sqrt{2}\cdot z_2 & + \quad \alpha z_3 & + \; (\alpha-1)\,z_4) \\ + & z_2'(-i\sqrt{2}\cdot z_1 & + \quad \cdot & + \; (\alpha^2-1)\,z_3 & - \quad \alpha^2 z_4 \quad) \\ + & z_3'(\quad -\alpha z_1 & - \; (\alpha^2-1)\,z_2 & + \quad \cdot & - \; i\sqrt{2}\cdot z_4 \;) \\ + & z_4'(-(\alpha-1)\,z_1 & + \quad \alpha^2 z_2 & + \; i\sqrt{2}\cdot z_3 & + \quad \cdot \quad) = 0. \end{array}$$

Hier sind die Coefficienten von z_1', z_2', z_3', z_4' bis auf einen Proportionalitätsfactor ϱ, der zunächst dem Wesen der Sache nach unbestimmt ist, die Coordinaten w der dem Punkte z entsprechenden Ebene. *Wir haben also als Darstellung der dem Complexe* (32) *zugehörigen dualistischen Umformung:*

$$(33)\quad \begin{cases} \varrho w_1 = \quad \cdot \quad + \; i\sqrt{2}\cdot z_2 + \quad \alpha z_3 \quad + \; (\alpha-1)\,z_4, \\ \varrho w_2 = - \; i\sqrt{2}\cdot z_1 + \quad \cdot \quad + \; (\alpha^2-1)\,z_3 - \quad \alpha^2 z_4 \quad, \\ \varrho w_3 = - \quad \alpha z_1 \quad - \; (\alpha^2-1)\,z_2 + \quad \cdot \quad - \; i\sqrt{2}\cdot z_4 \;, \\ \varrho w_4 = -(\alpha-1)\,z_1 + \quad \alpha^2 z_2 \quad + \; i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad \cdot \quad . \end{cases}$$

Wir bestimmen andererseits die dualistische Umformung, die zum Einheitscomplexe gehört, indem wir dieselbe Methode unter Benutzung der Coordinaten $q_{i\varkappa}$ in Anwendung bringen. Nach (22), (28) ist die Gleichung des Einheitscomplexes in den $q_{i\varkappa}$:

$$(34) \qquad q_{12} + q_{34} = 0$$

oder, wenn wir für die $q_{i\varkappa}$ ihre Werthe setzen und nach den w' ordnen:

$$w_1'(-w_2) + w_2'(w_1) + w_3'(-w_4) + w_4'(w_3) = 0.$$

Ich werde jetzt den Punkt, welcher der Ebene w im Einheitscomplexe entspricht, z' nennen, ferner unter σ einen unbestimmten Proportionalitätsfactor verstehen. *Die zum Einheitscomplexe gehörige dualistische Umformung findet sich dann folgendermassen dargestellt:*

$$(34^*) \qquad \sigma z_1' = -w_2, \quad \sigma z_2' = w_1, \quad \sigma z_3' = -w_4, \quad \sigma z_4' = w_3.$$

Jetzt eliminiren wir die w zwischen (33) und (34*). *Wir erhalten dann zur Darstellung der zur Vertauschung T gehörigen linearen Substitution der z:*

$$
(35)\quad\begin{cases}
\varrho\sigma\cdot z_1' = i\sqrt{2}\cdot z_1 + \quad\cdot\quad - (\alpha^2-1)\,z_3 + \alpha^2 z_4, \\
\varrho\sigma\cdot z_2' = \quad\cdot\quad + i\sqrt{2}\cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha-1)\,z_4, \\
\varrho\sigma\cdot z_3' = (\alpha-1)\,z_1 - \alpha^2 z_2 - i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad\cdot\quad, \\
\varrho\sigma\cdot z_4' = -\alpha z_1 - (\alpha^2-1)\,z_2 + \quad\cdot\quad - i\sqrt{2}\cdot z_4.
\end{cases}
$$

Hier ist jetzt noch der Factor $\varrho\sigma$ zu bestimmen. Es hat dies so zu geschehen, dass in Folge von (35) die durch (21) definirten x genau diejenige Umsetzung erfahren, die wir vermöge (14) der Vertauschung T zugeordnet haben, dass also:

$$
(36)\quad x_0' = x_1 - \tfrac{1}{3}\sum x,\quad x_1' = x_0 - \tfrac{1}{3}\sum x,\quad x_2' = x_2 - \tfrac{1}{3}\sum x \text{ etc.}
$$

wird. Wir betrachten zu dem Zwecke zwei specielle Werthreihen der z:

$$
z_1 = \varrho\sigma,\quad z_2 = 0,\quad z_3 = 0,\quad z_4 = 0
$$

und

$$
z_1 = 0,\quad z_2 = \varrho\sigma,\quad z_3 = 0,\quad z_4 = 0,
$$

denen vermöge (35) nachstehende Werthe der z' entsprechen:

$$
z_1' = i\sqrt{2},\quad z_2' = 0,\quad z_3' = \alpha - 1,\quad z_4' = -\alpha,
$$

beziehungsweise

$$
z_1' = 0,\quad z_2' = i\sqrt{2},\quad z_3' = -\alpha^2,\quad z_4' = -\alpha^2 + 1.
$$

Die Unterdeterminanten $p_{i\varkappa}$ aus den zweierlei z und die Unterdeterminanten $p'_{i\varkappa}$ aus den zweierlei z' erhalten hier die Werthe:

$$
p_{12} = (\varrho\sigma)^2,\quad p_{13} = 0,\quad p_{14} = 0,\quad p_{34} = 0,\quad p_{42} = 0,\quad p_{23} = 0,
$$

$$
p'_{12} = -2,\quad p'_{13} = -\alpha^2 i\sqrt{2},\quad p'_{14} = (1-\alpha^2)\,i\sqrt{2},\quad p'_{34} = -4,
$$

$$
p'_{42} = -\alpha i\sqrt{2},\quad p'_{23} = (1-\alpha)\,i\sqrt{2}.
$$

Sonach wird vermöge (21):

$$
x_0 = x_2 = x_4 = \frac{1-i}{6\sqrt{2}}(\varrho\sigma)^2,\quad x_1 = x_3 = x_5 = \frac{1+i}{6\sqrt{2}}(\varrho\sigma)^2,
$$

$$
x_0' = -\frac{1-i}{\sqrt{2}},\quad x_1' = -\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad x_2' = -\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \cdots
$$

woraus durch Vergleich mit einer beliebigen der Formeln (36) die gewünschte Werthbestimmung folgt*):

$$
\varrho\sigma = \pm\sqrt{6}.
$$

) Die hier benutzte, sozusagen empirische Bestimmung des Factors $\varrho\sigma$ wurde deshalb von mir gewählt, weil sie auf durchaus elementarem Wege, ohne Erläuterungen über Invarianten von linearen Complexen etc., zu Stande kommt. Will man die angedeuteten höheren Hülfsmittel heranziehen, so kann man den Werth von $\varrho\sigma$ daraus deduciren, dass die Invarianten der linken Seiten von (32) und (34) gleich 6, bez. gleich 1 sind.

Die lineare Substitution der z, welche der Vertauschung T der x entspricht und die wir selbst mit T bezeichnen, lautet hiernach definitiv:

$$(37)\quad \begin{cases} \pm\sqrt{6}\cdot z_1' = i\sqrt{2}\cdot z_1 - \quad \cdot \quad - (\alpha^2-1)\,z_3 + \alpha^2 z_4\,, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_2' = \quad \cdot \quad + i\sqrt{2}\cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha-1)\,z_4, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_3' = (\alpha-1)\,z_1 - \alpha^2 z_2 - i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad \cdot \quad, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_4' = -\alpha z_1 - (\alpha^2-1)\,z_2 + \quad \cdot \quad - i\sqrt{2}\cdot z_4\,. \end{cases}$$

II. $n = 7$.

1) *Die Operation S.*

Mit Rücksicht auf (26) entspricht der Vertauschung S der $x_\varkappa$:

$$x_\varkappa' = x_{\varkappa+1}$$

die folgende Umsetzung der $p_{i\varkappa}$:

$$\begin{aligned} p'_{12} &= \gamma p_{12}, & p'_{34} &= \gamma^6 p_{34}, \\ p'_{13} &= \gamma^4 p_{13}, & p'_{42} &= \gamma^3 p_{42}, \\ p'_{14} &= \gamma^2 p_{14}, & p'_{23} &= \gamma^5 p_{23}, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar als *zugehörige Substitution der z* folgt:

$$(38)\quad S:\ \pm z_1' = z_1,\quad \pm z_2' = \gamma z_2,\quad \pm z_3' = \gamma^4 z_3,\quad \pm z_4' = \gamma^2 z_4.$$

2) *Die Operation T.*

Ich will mir betreffs der Operation T in dem hier vorliegenden Falle $n = 7$ im Interesse grösserer Symmetrie der aufzustellenden Formeln eine kleine Abweichung gestatten. Statt nämlich T direct in Betracht zu ziehen, welches folgende Umstellung der Indices $0 \ldots 6$ bewirkt:

$$T\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{cases}$$

will ich die Vertauschung T' behandeln, die durch das Schema definirt ist:

$$(39)\qquad T'\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6. \end{cases}$$

Offenbar ist

$$T' = S^{-3}TS^3, \quad T = S^3T'S^{-3},$$

so dass T' ebenso geeignet ist, durch Combination mit S die sämmtlichen Vertauschungen der sieben Grössen x zu liefern, wie T selbst.

Um jetzt die Formeln für w und z zu finden, welche T' entsprechen, schlage ich denselben Weg ein, wie soeben bei $n = 6$. Geometrisch bedeutet T' diejenige dualistische Transformation, die zum linearen Complexe

$$x_3 - x_4 = 0$$

gehört. Nun wird diese Gleichung in den $p_{i\varkappa}$ vermöge (26):

$$(\gamma^3-\gamma^4)(p_{12}-p_{34})+(\gamma^5-\gamma^2)(p_{13}-p_{42})+(\gamma^6-\gamma)(p_{14}-p_{23})=0,$$

also, wenn wir die $p_{i\varkappa}$ durch ihre Werthe in den z, z' ersetzen und nach den z' ordnen:

$$\begin{array}{rlllll}
0 = z_1'(& \cdot & -(\gamma^3-\gamma^4)z_2 & -(\gamma^5-\gamma^2)z_3 & -(\gamma^6-\gamma)z_4) \\
+z_2'(& (\gamma^3-\gamma^4)z_1 & + \quad \cdot & +(\gamma^6-\gamma)z_3 & -(\gamma^5-\gamma^2)z_4) \\
+z_3'(& (\gamma^5-\gamma^2)z_1 & -(\gamma^6-\gamma)z_2 & + \quad \cdot & +(\gamma^3-\gamma^4)z_4) \\
+z_4'(& (\gamma^6-\gamma)z_1 & +(\gamma^5-\gamma^2)z_2 & -(\gamma^3-\gamma^4)z_3 & + \quad \cdot \quad).
\end{array}$$

Daher lautet die zugehörige dualistische Transformation in den w und z, indem wir zunächst wieder einen unbestimmten Proportionalitätsfactor ϱ einführen:

$$\begin{array}{rllll}
\varrho w_1 = & \cdot & -(\gamma^3-\gamma^4)z_2 & -(\gamma^5-\gamma^2)z_3 & -(\gamma^6-\gamma)z_4, \\
\varrho w_2 = & (\gamma^3-\gamma^4)z_1 & + \quad \cdot & +(\gamma^6-\gamma)z_3 & -(\gamma^5-\gamma^2)z_4, \\
\varrho w_3 = & (\gamma^5-\gamma^2)z_1 & -(\gamma^6-\gamma)z_2 & + \quad \cdot & +(\gamma^3-\gamma^4)z_4, \\
\varrho w_4 = & (\gamma^6-\gamma)z_1 & +(\gamma^5-\gamma^2)z_2 & -(\gamma^3-\gamma^4)z_3 & + \quad \cdot \quad .
\end{array}$$

Wir bestimmen jetzt das ϱ, indem wir aus diesen Formeln unter Beschränkung auf particuläre Werthereihen der z die Vertauschung T' der x vermöge der Formeln (26) abzuleiten suchen. Als besondere Werthsysteme der z will ich folgende wählen:

$$z_1=\varrho,\quad z_2=0,\quad z_3=0,\quad z_4=0$$

und

$$z_1=0,\quad z_2=\varrho,\quad z_3=0,\quad z_4=0,$$

denen als Ebenencoordinaten w nach unseren Formeln entsprechen:

$$w_1=0,\quad w_2=(\gamma^3-\gamma^4),\quad w_3=(\gamma^5-\gamma^2),\quad w_4=(\gamma^6-\gamma),$$

beziehungsweise:

$$w_1=-(\gamma^3-\gamma^4),\quad w_2=0,\quad w_3=-(\gamma^6-\gamma),\quad w_4=(\gamma^5-\gamma^2).$$

Hieraus folgt für die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$p_{12}=\varrho^2,\quad p_{13}=0,\quad p_{14}=0,\quad p_{34}=0,\quad p_{42}=0,\quad p_{23}=0$$

und für die Durchschnittslinie der beiden Ebenen mit Rücksicht auf (28):

$$\begin{array}{ll}
p_{12}=q_{34}=-5-(\gamma+\gamma^6), & p_{34}=q_{12}=-2+(\gamma+\gamma^6), \\
p_{13}=q_{42}=-(\gamma+\gamma^6)+(\gamma^2+\gamma^5), & p_{42}=q_{13}=(\gamma+\gamma^6)-(\gamma^2+\gamma^5), \\
p_{14}=q_{23}=-(\gamma^2+\gamma^5)+(\gamma^4+\gamma^3), & p_{23}=q_{14}=(\gamma^2+\gamma^5)-(\gamma^4+\gamma^3).
\end{array}$$

Dies jetzt in (26) eingesetzt giebt:

$$\begin{array}{llll}
x_0=\varrho^2, & x_1=\gamma\varrho^2, & x_2=\gamma^2\varrho^2 & \text{etc.,} \\
x_0'=-7, & x_1'=-7\gamma, & x_2'=-7\gamma^2 & \text{etc.,}
\end{array}$$

also $\varrho^2=-7$. *Die dualistische Transformation, welche der Vertauschung T' entspricht und die wir selbst T' nennen, lautet also definitiv:*

$$
(39^*)\ T': \begin{cases}
\pm\sqrt{-7}\cdot w_1 = \quad \cdot \quad -(\gamma^3-\gamma^4)z_2 - (\gamma^5-\gamma^2)z_3 - (\gamma^6-\gamma)z_4, \\
\pm\sqrt{-7}\cdot w_2 = (\gamma^3-\gamma^4)z_1 + \quad \cdot \quad + (\gamma^6-\gamma)z_3 - (\gamma^5-\gamma^2)z_4, \\
\pm\sqrt{-7}\cdot w_3 = (\gamma^5-\gamma^2)z_1 - (\gamma^6-\gamma)z_2 + \quad \cdot \quad + (\gamma^3-\gamma^4)z_4, \\
\pm\sqrt{-7}\cdot w_4 = (\gamma^6-\gamma)z_1 + (\gamma^5-\gamma^2)z_2 - (\gamma^3-\gamma^4)z_3 + \quad \cdot \quad .
\end{cases}
$$

Fassen wir zusammen, so haben wir folgendes Resultat gewonnen:

1) bei $n = 6$: Den beiden Vertauschungen der x, die wir S und T nannten, entsprechen bez. die folgenden linearen Substitutionen der z:

$$
(40)\quad S:\quad \pm z_1' = z_1,\quad \pm z_2' = -z_2,\quad \pm z_3' = -\alpha z_3,\quad \pm z_4' = +\alpha^2 z_4;
$$

$$
(41)\ T: \begin{cases}
\pm\sqrt{6}\cdot z_1' = i\sqrt{2}\cdot z_1 + \quad \cdot \quad - (\alpha^2-1)z_3 + \alpha^2 z_4, \\
\pm\sqrt{6}\cdot z_2' = \quad \cdot \quad + i\sqrt{2}\cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha-1)z_4, \\
\pm\sqrt{6}\cdot z_3' = (\alpha-1)z_1 - \alpha^2 z_2 - i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad \cdot \quad , \\
\pm\sqrt{6}\cdot z_4' = -\alpha z_1 - (\alpha^2-1)z_2 + \quad \cdot \quad - i\sqrt{2}\cdot z_4 .
\end{cases}
$$

2) bei $n = 7$: den Vertauschungen S und T' der x entsprechen die lineare Substitution der z:

$$
(42)\quad S:\quad \pm z_1' = z_1,\quad \pm z_2' = \gamma z_2,\quad \pm z_3' = \gamma^4 z_3,\quad \pm z_4' = \gamma^2 z_4
$$

bez. die dualistische Transformation:

$$
(43)\ T': \begin{cases}
\pm\sqrt{-7}\cdot w_1 = \quad \cdot \quad -(\gamma^3-\gamma^4)z_2 - (\gamma^5-\gamma^2)z_3 - (\gamma^6-\gamma)z_4, \\
\pm\sqrt{-7}\cdot w_2 = (\gamma^3-\gamma^4)z_1 + \quad \cdot \quad + (\gamma^6-\gamma)z_3 - (\gamma^5-\gamma^2)z_4, \\
\pm\sqrt{-7}\cdot w_3 = (\gamma^5-\gamma^2)z_1 - (\gamma^6-\gamma)z_2 + \quad \cdot \quad + (\gamma^3-\gamma^4)z_4, \\
\pm\sqrt{-7}\cdot w_4 = (\gamma^6-\gamma)z_1 + (\gamma^5-\gamma^2)z_2 - (\gamma^3-\gamma^4)z_3 + \quad \cdot \quad .
\end{cases}
$$

§ 7.

Ueber die Nothwendigkeit der doppelten Vorzeichen, die in den Substitutionsformeln der z auftreten.

Die Formeln (40), (41), bez. (42), (43), die wir nunmehr für $n = 6$ und $n = 7$ gewonnen haben, definiren auf Grund der vorausgeschickten Erläuterungen die zugehörigen Substitutionsgruppen genau so durch zwei erzeugende Operationen, wie dies in meinen „Vorlesungen" betreffs der Oktaeder- und Ikosaedergruppe geschehen ist, deren Analoga sie sind. Dabei erstreckt sich die Uebereinstimmung auch auf einen Punkt, der zunächst unwesentlich erscheinen könnte, nämlich auf die $\pm$ Zeichen, welche bei jeder einzelnen Operation vorkommen. Ich habe in meinen „Vorlesungen" (p. 44—47) untersucht,

ob man die linearen Substitutionen der dort in Betracht kommenden homogenen Variabelen z_1, z_2 nicht so durch Einfügen irgend welcher (bei z_1, z_2 gleichzeitig zuzusetzender) Multiplicatoren modificiren kann, dass zwischen ihrer Gruppe und der Gruppe gebrochener linearer Transformationen, welche $z_1 : z_2$ erfährt, holoedrischer Isomorphismus statt hat, wobei sich zeigte, dass dies unmöglich ist. Diese Unmöglichkeit hatte dann zur Folge, wie ich ebenda p. 255, 256 darlegte, dass es keine *rationalen* Functionen z_1, z_2 beliebig veränderlicher $x_0 \,.\,.\, x_3$ oder $x_0 \,.\,.\,.\, x_4$ gab, deren Quotient sich bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x oktaedrisch oder ikosaedrisch transformirte. Vielmehr werden Grössen z_1, z_2 der genannten Art immer Irrationalitäten enthalten müssen, die dann als „accessorische" Irrationalitäten in die schliessliche Oktaeder- oder Ikosaeder-Gleichung eingehen. Ich werde jetzt zeigen, dass es mit den quaternären Gruppen der z, die wir im vorigen Paragraphen definirten, ganz dieselbe Bewandnis hat*), woraus folgt, *dass eine Reduction der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die zugehörigen Gleichungssysteme der z ohne Zuhülfenahme accessorischer Irrationalitäten gleichfalls unmöglich ist***).

Am einfachsten scheint es, den hier erforderlichen Beweis ohne alle Rechnung auf den früheren zurückzuführen. Dies gelingt für $n = 6$ und $n = 7$ gleichförmig folgendermassen. Wir wählen irgend vier der gegebenen x:

$$x_a,\ x_b,\ x_c,\ x_d$$

und betrachten nun diejenigen geraden Vertauschungen, welche die nicht hingeschriebenen x unverändert lassen, die hingeschriebenen aber beziehungsweise in folgender Weise umsetzen:

$$\begin{array}{cccc} x_a, & x_b, & x_c, & x_d, \\ x_b, & x_a, & x_d, & x_c, \\ x_c, & x_d, & x_a, & x_b, \\ x_d, & x_c, & x_b, & x_a, \end{array}$$

deren Inbegriff also in der Terminologie meiner „Vorlesungen" eine „Vierergruppe" bildet. Bei den entsprechenden Collineationen des Raumes geht, wie leicht zu sehen, jede der beiden geraden Linien, welche die vier Complexe

*) Dieser Beweis ist für die Untergruppe jener 360 Collineationen, die den geraden Vertauschungen der x für $n = 6$ entsprechen, auf einem etwas anderen Wege bereits von Hrn. Reichardt geführt worden; siehe dessen soeben in der Einleitung citirte zwei Mittheilungen.

**) „Allgemein" heissen hier selbstverständlich solche Gleichungen, deren Wurzeln als beliebig veränderliche Grössen gedacht sind (womit über die Gruppe der Gleichungen noch gar nichts ausgesagt ist).

$$x_a = 0, \quad x_b = 0, \quad x_c = 0, \quad x_d = 0$$

mit einander gemein haben, in sich selbst über. Ich will jetzt ein Coordinatentetraeder zu Grunde gelegt denken, bei welchem $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ die eine, $z_3 = 0$, $z_4 = 0$ die andere dieser geraden Linien ist*). Unsere vier Collineationen müssen sich dann so als lineare Substitutionen der z darstellen, dass z_1 und z_2, und ebenso z_3 und z_4, für sich, also binär, substituirt werden. Wäre es nun möglich, den vier in Betracht kommenden Collineationen entsprechend eine Gruppe von nur *vier* quaternären linearen Substitutionen der z_1, z_2, z_3, z_4 (also eine holoedrisch isomorphe Gruppe) zu bilden, so hätten wir damit zugleich, und zwar sowohl für z_1 und z_2, wie für z_3 und z_4, eine mit der Vierergruppe holoedrisch isomorphe Gruppe binärer linearer Substitutionen, was nach p. 44—47 der „Vorlesungen" unmöglich ist. *Die Gesammtheit der Substitutionen unserer z kann also mit der Gruppe der Vertauschungen der x nur meroedrisch isomorph sein*, was zu beweisen war. Jetzt sind die Substitutionen der z, wie wir sie im vorigen Paragraphen definirten, doppelt so zahlreich, wie die Vertauschungen der x, den $\pm$ Zeichen entsprechend, die in ihnen vorkommen. Ihre Gesammtheit ist also mit der Vertauschungsgruppe der x *hemiedrisch* isomorph und wir haben daher mit den Formeln des vorigen Paragraphen von selbst den geringsten Grad von Meroedrie erreicht, der zwischen den Substitutionen der z und den Vertauschungen der x überhaupt statthaft ist.

III. Zurückführung der Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die zugehörigen Gleichungssysteme der z.

§ 8.

Allgemeine Principien der beabsichtigten Zurückführung.

Wir stehen nunmehr vor der Aufgabe für $n = 6$ und $n = 7$ aus irgend vorgelegten Grössen $x_0 \ldots x_{n-1}$ Functionen z_1, z_2, z_3, z_4 zusammenzusetzen, deren Verhältnisse bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x die in § 6 näher angegebenen linearen Transformationen erfahren. Zu dem Zwecke bediene ich mich, wie in Kapitel 2 und 5 des zweiten Abschnitts meiner Vorlesungen, eines geometrischen Ansatzes. Derselbe benöthigt gewisse liniengeometrische Auffassungen, von denen im gegenwärtigen Aufsatze noch nicht die Rede war, so dass ich betreffs ihrer einige Bemerkungen vorausschicken muss.

---

*) Dies setzt natürlich voraus, dass die beiden geraden Linien verschieden sind und einander nicht schneiden, was beides durch Berechnung ihrer Coordinaten x bestätigt wird.

Wir hatten seitlang nur solche Grössensysteme $X_0 \ldots X_{n-1}$ (ich gebrauche hier grosse Buchstaben, um nicht unnöthigerweise an die vorgelegten Wurzeln $x_0 \ldots x_{n-1}$ zu erinnern) der geometrischen Deutung unterworfen, welche den beiden Gleichungen genügten:

$$(45) \qquad \sum_0^{n-1} X_\varkappa = 0, \quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa^2 = 0;$$

dieselben bezeichneten im Falle $n = 7$ allgemein eine beliebige Raumgerade, im Falle $n = 6$ speciell eine Gerade des Einheitscomplexes. Es ist jetzt die Frage, wie wir Grössensysteme $X_0 \ldots X_{n-1}$ deuten wollen, welche nur der ersten der beiden Gleichungen, also der Relation

$$(46) \qquad \sum_0^{n-1} X_\varkappa = 0$$

Genüge leisten. Die liniengeometrische Antwort ist, dass wir solche X als *Coordinaten eines linearen Complexes* betrachten sollen, der im Falle $n = 7$ jeder beliebige sein kann, während er im Falle $n = 6$ zum Einheitscomplexe „involutorisch" liegt, — *desjenigen Complexes nämlich, dessen Gleichung in laufenden Liniencoordinaten* $X_0', \ldots, X_{n-1}'$ *die folgende ist:*

$$(47) \qquad \sum_0^{n-1} X_\varkappa X_\varkappa' = 0.$$

Diese Einführung von Complexcoordinaten ist berechtigt, weil sie im speciellen Falle mit der anfänglichen Definition der Liniencoordinaten übereinstimmt. In der That, wenn die $X_\varkappa$ nicht nur der Gleichung (46), sondern den Gleichungen (45) genügen, so definirt (47) alle geraden Linien X', welche der Geraden X „angehören", d. h. dieselbe schneiden. Dabei wird die Gerade X im Falle $n = 6$ zum Einheitscomplexe involutorisch liegen, denn dies ist nur eine andere Ausdrucksweise dafür, dass sie selbst eine Linie des Einheitscomplexes ist. —

Dies vorausgeschickt wenden wir uns zur Betrachtung einer vorgelegten Gleichung mit den Wurzeln $x_0 \ldots x_{n-1}$, wobei wir der Einfachheit halber von vorneherein voraussetzen wollen (was ja in jedem Falle durch eine leichte Hülfstransformation zu erreichen ist), dass der Gleichung (46) entsprechend die Summe der x verschwindet. Wir betrachten jetzt $x_0 \ldots x_{n-1}$ für $n = 6$ und $n = 7$ übereinstimmend als *Coordinaten eines linearen Complexes* (dessen besondere Lage für $n = 6$ nicht noch einmal bezeichnet zu werden braucht), die Grössen $z_1, \ldots, z_4$ aber, die wir construiren sollen, *als Coordinaten eines Raumpunktes.* Den in Betracht kommenden Vertauschungen der x entsprechend unterliegt unser Complex gewissen collinearen Umformungen des Raumes. Unsere Aufgabe kann dann so bezeichnet

werden: *es gilt, einen Punkt z von dem Complexe x in der Art abhängig zu machen, dass er mit dem Complexe zusammen immer gleichzeitig dieselben (durch die Vertauschungen der x definirten) Collineationen des Raumes erleidet.* Ich habe in meinen „Vorlesungen“ (II, 2, § 5: Geometrische Auffassung der Tschirnhausentransformation) eine solche auf eine Gruppe von Operationen bezügliche Zusammengehörigkeit zweier Gebilde als *Covarianz* bezeichnet. Indem wir diese Ausdrucksweise hier aufnehmen, können wir unsere Aufgabe kurz dahin zusammenfassen, *dass wir verlangen, einen zum Complexe x covarianten Punkt zu construiren.*

Wir haben damit im Grunde dieselbe Formulirung, welche in II, 5, § 1 meiner „Vorlesungen“ für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades vorliegt*). Ein Unterschied besteht natürlich in der Art der in Betracht gezogenen geometrischen Gebilde: wir deuteten damals die $x_\varkappa$ als Coordinaten eines Raumpunktes, die z als Coordinaten (Parameter) einer Erzeugenden der einen auf der Hauptfläche zweiten Grades befindlichen Regelschaar. Das Problem aber war, genau wie hier, *das Gebilde z von dem Gebilde x in covarianter Weise abhängig zu machen.* In der That schlagen wir jetzt bei $n=6$ und $n=7$ einen Weg ein, der dem bei $n=5$ angewandten Verfahren genau entspricht.

Ich recapitulire hier kurz das letztere Verfahren. Wir begannen damit, den allgemeinsten zum Punkte x covarianten Punkt zu suchen, und fanden, dass dessen Coordinaten durch folgende Formel gegeben sind:

$$(48)\qquad X_\varkappa = \lambda_1 x_\varkappa + \lambda_2\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{5}\right) + \lambda_3\left(x_\varkappa^3 - \frac{s_3}{5}\right) + \lambda_4\left(x_\varkappa^4 - \frac{s_4}{5}\right),$$

wo die s_2, s_3, s_4 die zweiten, dritten, vierten Potenzsummen der Wurzeln sind**) und die λ invariante Coefficienten bezeichnen. Wir suchten dann die λ irgendwie so zu bestimmen, dass die Gleichung statt hat:

$$(48^*)\qquad \sum_0^4 X_\varkappa^2 = 0,$$

dass also der Punkt X der Hauptfläche angehört. Ist dies geschehen, so haben wir damit eo ipso eine zum Punkte x covariante Erzeugende

*) Auch bei den Gleichungen vierten Grades sind selbstverständlich ganz analoge Vorstellungsweisen am Platze, die nur nicht in den „Vorlesungen“ besonders entwickelt worden sind.

**) Wir hatten vorausgesetzt, dass die Summe der ersten Potenzen der x verschwinde; andernfalls würde in (48) statt $x_\varkappa$ zu setzen sein $x_\varkappa - \frac{s_1}{5}$. Analoges gilt von der Formel (49).

z gefunden: wir brauchen nämlich nur diejenige Erzeugende z der in Betracht kommenden Art zu wählen, welche durch den Punkt X *hindurchläuft.*

Wir werden jetzt für $n=6$ und $n=7$ genau so beginnen, nämlich zuvörderst die Coordinaten $X_\varkappa$ des allgemeinsten zum Complexe x covarianten Complexes (der überdies, im Falle $n=6$, gleich dem Complexe x, zum Einheitscomplexe involutorisch liegen soll) hinschreiben. Wir finden in dieser Hinsicht:

$$(49)\quad X_\varkappa = \lambda_1 x_\varkappa + \lambda_2\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \cdots + \lambda_{n-1}\left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right),$$

wo die s und λ ganz die frühere Bedeutung haben. Hierauf haben wir das Analogon zur Gleichung (48*) zu construiren. Dieses wollen wir nun nicht etwa darin erblicken, dass wir ein einzelnes System von $X_\varkappa$ suchen, für welches die Summe der Quadrate verschwindet, *dass wir vielmehr zwei unterschiedene Systeme von $X_\varkappa$ suchen, — sie mögen $X_\varkappa'$ und $X_\varkappa''$ heissen —, welche die simultanen Gleichungen befriedigen:*

$$(50)\qquad \sum_0^{n-1} X_\varkappa'^2 = 0,\quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0,\quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa''^2 = 0.$$

Sind solche X', X'' gefunden, so können wir, wie ich behaupte, sehr leicht zu einem covarianten Punkte z gelangen.

Um letzteres einzusehen, überlegen wir uns einfach, was die Gleichungen (50) geometrisch bedeuten. Die erste und dritte derselben sagen aus, dass wir es mit zwei speciellen Complexen X', X'', d. h. mit zwei Raumgeraden X', X'', zu thun haben, die zweite Gleichung, dass diese Raumgeraden sich schneiden. *Hiernach erhalten wir einen covarianten Punkt z, indem wir einfach den Schnittpunkt von X' und X'' in Betracht ziehen.*

Ich werde in den folgenden beiden Paragraphen zeigen, erstlich, wie wir die Gleichungen (50) in passender Weise befriedigen, zweitens, wie wir aus den einmal gefundenen X', X'' die Coordinaten z des Schnittpunktes berechnen. Bemerken wir hier nur noch, dass die in Aussicht genommene Methode in der Lage ist, den allgemeinsten zum Complexe x covarianten Punkt z zu liefern. Nehmen wir nämlich an, es sei auf irgend eine Weise gelungen, dem Complexe x einen Punkt z covariant zuzuordnen, so kann man sofort beliebig viele covariante Raumgerade X', X'', ... finden, die vom Punkte z auslaufen: man hat einfach die Ebenen, die dem Punkte z in irgendwelchen covarianten Complexen (49) entsprechen, paarweise zum Durchschnitt zu bringen. Dies aber heisst, dass wir den Punkt z auch als Schnitt zweier geeigneter zum Complexe x covarianter gerader Linien auffassen können, was genau der von uns geplanten Construction entspricht. — Auch

diese Betrachtung ist die Uebertragung einer analogen Ueberlegung, die in der Theorie der Gleichungen fünften Grades Platz griff (Vorlesungen, II, 5, § 8).

§ 9.

Formeln zur Auffindung der Geraden X', X''.

Um jetzt die Gleichungen (50) durch bestimmte Werthe der X', X'' zu befriedigen, will ich im Anschluss an (49) ausführlich schreiben:

$$(51)\quad \begin{cases} X_\varkappa' = \lambda_1' x_\varkappa + \lambda_2'\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \cdots + \lambda_{n-1}'\left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right), \\ X_\varkappa'' = \lambda_1'' x_\varkappa + \lambda_2''\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \cdots + \lambda_{n-1}''\left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right). \end{cases}$$

Wir erhalten dann aus (50) eine homogene quadratische Gleichung für die λ', eine ebensolche für die λ'', endlich eine homogene bilineare Gleichung für die λ' und λ'' zusammen; die Coefficienten dieser Gleichungen sind symmetrische Functionen der x, also rational bekannte Grössen. Um die hieraus folgende Bestimmung der λ', λ'' und insbesondere die accessorischen Irrationalitäten, die bei ihr auftreten, einigermassen zu übersehen, will ich einen speciellen Fall ausführlicher betrachten.

Wir gehen zunächst darauf aus, ein möglichst einfaches System von Grössen $X_\varkappa'$ zu gewinnen. Zu dem Zwecke nehmen wir (indem es sich zunächst nur um die eine Gleichung $\Sigma X'^2 = 0$ handelt) $\lambda_2' = 1$, $\lambda_3' = \cdots = \lambda_{n-1}' = 0$, setzen also, indem wir bei λ_1' noch Accent und Index unterdrücken:

$$(52)\qquad X_\varkappa' = \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \lambda x_\varkappa.$$

Wir erhalten dann aus (50):

$$s_2\lambda^2 + 2 s_3 \lambda + \left(s_4 - \frac{s_2^2}{n}\right) = 0,$$

also

$$\lambda = \frac{-s_3 + W'}{s_2}$$

wo W' die Quadratwurzel bezeichnet:

$$(53)\qquad W' = \pm\sqrt{-s_2 s_4 + s_3^2 + \frac{s_2^3}{n}}.$$

Die Eintragung in (52) ergiebt:

$$(54)\qquad X_\varkappa' = \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_3}{s_2}x_\varkappa - \frac{s_2}{n}\right) + \frac{x_\varkappa \cdot W'}{s_2}.$$

Dieser Ausdruck enthält, wie ersichtlich, *eine erste accessorische Irrationalität, die Quadratwurzel W'.*

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung geeigneter $X_\varkappa''$, den beiden noch übrigen Gleichungen (50) entsprechend: $\Sigma X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0$, $\Sigma X_\varkappa''^2 = 0$. Zu dem Zwecke bemerken wir vor allem, dass mit jedem Systeme zulässiger $X_\varkappa''$ unendlich viele Grössensysteme von der Form $X_\varkappa'' - \sigma X_\varkappa'$ gefunden sind (wo σ einen willkürlichen Multiplicator bedeuten soll), welche ebenso, wie die $X_\varkappa''$ selbst, die Gleichungen (50) befriedigen. Um der hieraus entspringenden Unbestimmtheit zu entgehen, wollen wir festsetzen, dass in den aufzusuchenden $X_\varkappa''$ (siehe Formel (51)) der bei den $X_\varkappa'$ benutzte Term $\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right)$ fehlen soll. Uebrigens aber setzen wir

$$X_\varkappa'' = Z_\varkappa'' + \varrho Y_\varkappa'', \tag{55}$$

und nehmen

$$Y_\varkappa'' = \left(x_\varkappa^3 - \frac{s_3}{n}\right) + \mu x_\varkappa, \qquad Z_\varkappa'' = \left(x_\varkappa^4 - \frac{s_4}{n}\right) + \nu x_\varkappa,$$

wo wir nun μ, ν so bestimmen werden, dass gleichzeitig:

$$\sum X_\varkappa' Y_\varkappa'' = 0, \quad \sum X_\varkappa' Z_\varkappa'' = 0 \tag{56}$$

wird, was, wegen (55),

$$\sum X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0$$

nach sich zieht. Hierbei bleibt das in (55) enthaltene ϱ noch willkürlich. Wir bestimmen dasselbe jetzt aus der Forderung, dass auch noch

$$\sum X_\varkappa''^2 = 0$$

sein soll, was die folgende quadratische Gleichung ergiebt:

$$\varrho^2 \cdot \sum Y_\varkappa''^2 + 2\varrho \cdot \sum Y_\varkappa'' Z_\varkappa'' + \sum Z_\varkappa''^2 = 0. \tag{57}$$

Ist dieselbe gelöst, so haben wir in (55) die gewünschten X''.

Die Durchführung der hiermit angedeuteten Rechnung ergiebt zunächst:

$$\mu = -\frac{s_4}{s_2} + \frac{\frac{s_2 s_3}{n} - s_5 + \frac{s_3 s_4}{s_2}}{W'},$$

$$\nu = -\frac{s_5}{s_2} + \frac{\frac{s_2 s_4}{n} - s_6 + \frac{s_3 s_5}{s_2}}{W'},$$

unter w' die Quadratwurzel (53) verstanden, sodann

$$Y_\varkappa'' = \left(x_\varkappa^3 - \frac{s_4}{s_2} x_\varkappa - \frac{s_3}{n}\right) + \left(\frac{s_2 s_3}{n} - s_5 + \frac{s_3 s_4}{s_2}\right) \cdot \frac{x_\varkappa}{W'},$$

$$Z_\varkappa'' = \left(x_\varkappa^4 - \frac{s_5}{s_2} x_\varkappa - \frac{s_5}{n}\right) + \left(\frac{s_2 s_4}{n} - s_6 + \frac{s_3 s_5}{s_2}\right) \cdot \frac{x_\varkappa}{W'},$$

endlich aus (57) als quadratische Gleichung für das ϱ:

$$\varrho^2\left(\left(s_6-\frac{s_4^2}{s_2}-\frac{s_3^2}{n}\right)\left(-s_2s_4+s_3^2+\frac{s_2^3}{n}\right)+s_2\left(\frac{s_2s_3}{n}-s_5+\frac{s_3s_4}{s_2}\right)^2\right)$$
$$+2\varrho\left(\left(s_7-\frac{s_4s_5}{s_2}-\frac{s_3s_4}{n}\right)\left(-s_2s_4+s_3^2+\frac{s_2^3}{n}\right)+s_2\left(\frac{s_2s_3}{n}-s_5+\frac{s_3s_4}{s_2}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{s_2s_4}{n}-s_6+\frac{s_3s_5}{s_2}\right)\right)$$
$$+\left(\left(s_8-\frac{s_5^2}{s_2}-\frac{s_4^2}{n}\right)\left(-s_2s_4+s_3^2+\frac{s_2^3}{n}\right)+s_2\left(\frac{s_2s_4}{n}-s_6+\frac{s_3s_5}{s_2}\right)^2\right)=0.$$

Es dürfte keinen Zweck haben, diese Gleichung, *aus der merkwürdigerweise das W' völlig verschwunden ist*, noch weiter zu reduciren oder ihre Auflösung explicite herzusetzen. Was uns vorwiegend interessirt, ist die bei ihrer Auflösung auftretende Quadratwurzel, die wir W'' nennen wollen. Dieselbe ist, wie W', aus einer rationalen Function der Potenzsummen s zu ziehen, die sich von derjenigen, welche bei W' auftritt, als wesentlich verschieden erweist. *W'' ist also neben W' eine mit W' coordinirte neue accessorische Quadratwurzel.* In dem Ausdrucke der $X_\varkappa''$ kommen W' und W'' neben einander vor. —

So weit der specielle Fall unserer Rechnung. Es ist klar, dass wir auch bei anderweitiger Bestimmung der λ', λ'', sofern wir an der Benutzung gewöhnlicher Methoden festhalten, das Auftreten zweier accessorischer Quadratwurzeln nicht vermeiden können. Ob es überhaupt unmöglich ist, die Gleichungen (50) ohne geringeren Aufwand an accessorischen Irrationalitäten zu befriedigen, bleibe dahingestellt. Dass die accessorischen Irrationalitäten jedenfalls nicht ganz zu vermeiden sind, wurde bereits in § 7 hervorgehoben.

Ich komme noch einmal auf $n=5$ zurück, um eine Bemerkung über die neuesten diesen Fall betreffenden Arbeiten von Gordan*) hinzuzufügen. Wir hatten bei $n=5$ nur eine Grössenreihe $X_\varkappa$ benutzt, die wir der einen Gleichung (48*) unterwarfen. Nun hat Hr. Gordan bemerkt, dass es auch bei den Gleichungen fünften Grades aus Gründen der Rechnung bequem sein kann, zwei Grössenreihen $X_\varkappa'$, $X_\varkappa''$ zu gebrauchen, welche genau unseren Gleichungen (50) unterworfen werden. Die Bestimmung solcher $X_\varkappa'$, $X_\varkappa''$ erfolgt dann eben so, wie in unserem Falle, nur dass die Quadratwurzel W'' ihren accessorischen Charakter verliert und in die Quadratwurzel aus der Discriminante der vorgelegten Gleichung fünften Grades übergeht. In letzterem Umstande allein wird man schon ein Zeichen dafür erblicken, dass es sich bei aller Aehnlichkeit der Formeln doch um wesentlich verschiedene Ansätze handelt. Wir können den Gordan'schen Ansatz sofort auf Gleichungen siebenten Grades übertragen, indem wir bei

---

*) Liouville's Journal, sér. 4, Bd. I, sowie im vorliegenden Annalenbande, p. 152 ff.

ihnen *drei* Grössenreihen $X_\varkappa'$, $X_\varkappa''$, $X_\varkappa'''$ in Betracht ziehen, die dann den Gleichungen genügen müssen:

$$(58)\quad \begin{cases} \sum X_\varkappa'^2 = 0, & \sum X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0, & \sum X_\varkappa' X_\varkappa''' = 0, \\ & \sum X_\varkappa''^2 \ = 0, & \sum X_\varkappa'' X_\varkappa''' = 0, \\ & & \sum X_\varkappa'''^2 \ = 0, \end{cases}$$

(während bei den Gleichungen sechsten Grades eine solche Uebertragung wegen der zu geringen Zahl der bei ihnen zur Verfügung stehenden Parameter $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ überhaupt ausgeschlossen ist). Geometrisch besagen die Gleichungen (58), dass wir drei Gerade suchen sollen, die sich wechselseitig schneiden. Das Letztere kann in einem Punkte oder in einer Ebene geschehen und hieraus schliessen wir, dass die dritte Quadratwurzel, welche bei Auflösung der Gleichungen (58) benöthigt wird, keine accessorische mehr sein kann, sondern mit der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung siebenten Grades zusammenfallen wird. Ich kann dies an gegenwärtiger Stelle nicht weiter verfolgen.

§ 10.

Berechnung des Schnittpunktes von X' und X''.

Um jetzt den Schnittpunkt der beiden Geraden X', X'' zu berechnen, schreiben wir vor allem die Bedingung hin, dass irgend eine Gerade x (die übrigens mit den Wurzeln x der vorgelegten Gleichung gar nichts zu thun haben soll) die Gerade X' oder X'' schneidet:

$$\sum_0^{n-1} X_\varkappa' x_\varkappa = 0, \quad \text{bez.} \quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa'' x_\varkappa = 0.$$

Hier nun substituiren wir für die x nach (21), (26) ihre Werthe in den $p_{i\varkappa}$. Ich will für $n = 6$ der Formel (17) entsprechend schreiben:

$$(59)\qquad \Pi_\nu = \sum_0^5 (-\alpha)^{\nu\varkappa} \cdot X_\varkappa, \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right),$$

und für $n = 7$ in Uebereinstimmung mit (16):

$$(60)\qquad \Pi_\nu = \sum_0^6 \gamma^{\nu\varkappa} \cdot X_\varkappa, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right),$$

wo nun Π in Π' oder Π'' übergehen soll, wenn für die $X_\varkappa$ die $X_\varkappa'$ oder die $X_\varkappa''$ gesetzt werden. Dann werden die Gleichungen in den $p_{i\varkappa}$ für $n = 6$:

$$(61)\quad \begin{cases} 0 = \Pi_0' \dfrac{p_{12}+p_{34}}{\sqrt{2}} + \Pi_1' p_{42} + \Pi_2' p_{23} + \Pi_3' \dfrac{-p_{12}+p_{34}}{\sqrt{2}} \\ \qquad\qquad + \Pi_4' p_{14} + \Pi_5' p_{13}, \\ 0 = \Pi_0'' \dfrac{p_{12}+p_{34}}{\sqrt{2}} + \Pi_1'' p_{42} + \Pi_2'' p_{23} + \Pi_3'' \dfrac{-p_{12}+p_{34}}{\sqrt{2}} \\ \qquad\qquad + \Pi_4'' p_{14} + \Pi_5'' p_{13}, \end{cases}$$

und für $n = 7$:

$$(62)\quad \begin{cases} 0 = \Pi_1' p_{12} + \Pi_4' p_{13} + \Pi_2' p_{14} + \Pi_6' p_{34} + \Pi_3' p_{42} + \Pi_5' p_{23}, \\ 0 = \Pi_1'' p_{12} + \Pi_4'' p_{13} + \Pi_2'' p_{14} + \Pi_6'' p_{34} + \Pi_3'' p_{42} + \Pi_5'' p_{23}. \end{cases}$$

Wir ersetzen jetzt die p_{ik} durch ihre Werthe in den z, z' und ordnen nach den z_1, z_2, z_3, z_4. Ich will statt der beiden Gleichungen, welche so aus (61) bez. (62) entstehen, nur je eine hinschreiben, indem ich das Symbol Π^* einführe, welches sowohl Π' als Π'' bedeuten kann. Wir haben dann folgende Gleichungen:

1) bei $n = 6$:

$$\begin{aligned} (63)\quad 0 = z_1 \Big(& \quad \cdot \quad + \frac{\Pi_0^* - \Pi_3^*}{\sqrt{2}} \cdot z_2' + \Pi_5^* z_3' + \Pi_4^* z_4' \Big) \\ + z_2 \Big(& \frac{-\Pi_0^* + \Pi_3^*}{\sqrt{2}} \cdot z_1' + \quad \cdot \quad + \Pi_2^* z_3' - \Pi_1^* z_4' \Big) \\ + z_3 \Big(& -\Pi_5^* z_1' - \Pi_2^* z_2' + \quad \cdot \quad + \frac{\Pi_0^* + \Pi_3^*}{\sqrt{2}} \cdot z_4' \Big) \\ + z_4 \Big(& -\Pi_4^* z_1' + \Pi_1^* z_2' - \frac{\Pi_0^* + \Pi_3^*}{\sqrt{2}} \cdot z_3' + \quad \cdot \quad \Big), \end{aligned}$$

und

2) bei $n = 7$:

$$\begin{aligned} (64)\quad 0 = z_1 (& \quad \cdot \quad + \Pi_1^* z_2' + \Pi_4^* z_3' + \Pi_2^* z_4') \\ + z_2 (& -\Pi_1^* z_1' + \quad \cdot \quad + \Pi_5^* z_3' - \Pi_3^* z_4') \\ + z_3 (& -\Pi_4^* z_1' - \Pi_5^* z_2' + \quad \cdot \quad + \Pi_6^* z_4') \\ + z_4 (& -\Pi_2^* z_1' + \Pi_3^* z_2' - \Pi_6^* z_3' + \quad \cdot \quad). \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen (63), (64) *ist jetzt unsere Aufgabe im Princip gelöst.* Die Gleichungen (63) oder (64) besagen nämlich, wie zwei Punkte z, z' gegen einander liegen müssen, damit ihre Verbindungslinie die Gerade X^* treffe. Beide Gleichungen (63) oder (64) werden also für beliebige Werthe der $z_1' \ldots z_4'$ erfüllt sein, wenn man für $z_1 \ldots z_4$ die Coordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden X', X'' einträgt. Mit anderen Worten: *Die Coordinaten* z_1, z_2, z_3, z_4 *des gesuchten Schnittpunktes sind das gemeinsame Lösungssystem, welches den zweierlei Gleichungen* (63) *oder* (64) *zukommt, welche Werthe man auch den unbestimmten Grössen* $z_1' \ldots z_4'$ *beilegen mag.* Ich unterlasse es, die Verhältnisse der z noch explicite zu be-

rechnen, was nur mit Aufgeben der Symmetrie möglich scheint. Wir wollen zusammenfassend sagen, *dass diese Verhältnisse zu dreigliedrigen Determinanten der Lagrange'schen Ausdrücke* Π', Π'' *proportional sind.* Man vergleiche hierzu das entsprechende Resultat für die Gleichungen vierten und fünften Grades (Vorlesungen, p. 188). Bei ihnen werden die z_1, z_2 den Lagrange'schen Ausdrücken, die sich aus den $X_\varkappa$ (48*) bilden lassen, direct proportional. —

§ 11.

Einige Bemerkungen über Gleichungen beliebigen Grades.

Indem ich die Betrachtung der Gleichungen sechsten und siebenten Grades an dem hiermit erreichten Punkte abbreche, kann ich nicht umhin, einige Bemerkungen über Gleichungen höheren Grades hinzuzufügen.

Von vorneherein ist ersichtlich, wie wir die Entwickelung des § 9 auf Gleichungen höheren (n^{ten}) Grades zu übertragen haben. Wir schreiben zu dem Zwecke

$$(65)\quad X_\varkappa = \lambda_1\left(x_\varkappa - \frac{s_1}{n}\right) + \lambda_2\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \cdots + \lambda_{n-1}\left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right),$$

unter $x_\varkappa$ die Wurzeln der vorgelegten Gleichung verstanden, bezeichnen mit ν die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl und suchen nun $(\nu - 1)$ Reihen von Grössen $X_\varkappa$:

$$X_\varkappa', X_\varkappa'', \cdots, X_\varkappa^{(\nu-1)},$$

welche die folgenden Bedingungen befriedigen:

$$(66)\quad \left\{\begin{array}{lll} \sum_0^{n-1} X_\varkappa'^2 = 0, & \sum_0^{n-1} X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0, \cdots, & \sum_0^{n-1} X_\varkappa' X_\varkappa^{(\nu-1)} = 0, \\ & \sum_0^{n-1} X_\varkappa''^2 \quad = 0, \cdots, & \sum_0^{n-1} X_\varkappa'' X_\varkappa^{(\nu-1)} = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ & & \sum_0^{n-1} X_\varkappa^{(\nu-1)^2} \quad = 0, \end{array}\right.$$

was uns mit Hülfe von $(\nu - 1)$ nebeneinanderstehenden accessorischen Quadratwurzeln gelingen wird. Wir beachten jetzt, dass durch diese $X', X'', \ldots$ ein bestimmter $(\nu - 2)$-fach ausgedehnter linearer Raum (ein $R_{\nu-2}$) festgelegt wird, welcher ganz in derjenigen quadratischen Mannigfaltigkeit von $(n - 3)$ Dimensionen (in der M_{n-3}^2) enthalten ist, die durch

$$(67) \qquad \sum_{0}^{n-1} X_\varkappa = 0, \quad \sum_{0}^{n-1} X_\varkappa^2 = 0$$

vorgestellt wird, — derjenige $R_{\nu-2}$ nämlich, dessen Elemente X sich aus den Elementen X', X'', ... mit Hülfe von Parametern, die ich μ', μ'', ... nennen will, nach der Formel zusammensetzen:

$$(68) \qquad X_\varkappa = \mu' X_\varkappa' + \mu'' X_\varkappa'' + \cdots + \mu^{(\nu-1)} X_\varkappa^{(\nu-1)}.$$

Dieser $R_{\nu-2}$ wird auf Grund der Formeln (66) *dem Werthsysteme der anfänglichen $x_\varkappa$ covariant zugeordnet sein.* Nun sind im Falle $n = 2\nu$ die $R_{\nu-2}$ die meist ausgedehnten auf der quadratischen Mannigfaltigkeit (67) enthaltenen linearen Räume. *Daher haben wir für $n = 2\nu$ das von uns zunächst anzustrebende Ziel bereits erreicht.* Für $n = 2\nu + 1$ giebt es auf der Mannigfaltigkeit (67) über die $R_{\nu-2}$ hinaus noch zwei Arten von $R_{\nu-1}$, wobei die Beziehung die ist, dass durch jeden der Mannigfaltigkeit angehörigen $R_{\nu-2}$ ein $R_{\nu-1}$ der einen Art und ein $R_{\nu-1}$ der anderen Art hindurchgeht. Wir wollen jetzt unter den beiden $R_{\nu-1}$, welche durch den $R_{\nu-2}$ (68) hindurchlaufen, durch Verabredung den einen festlegen. *Dieser $R_{\nu-1}$ ist dann seinerseits dem Werthsysteme der anfänglichen $x_\varkappa$ covariant zugeordnet,* nur dass wir nicht mehr sämmtliche Vertauschungen der $x_\varkappa$, sondern nur die geraden Vertauschungen derselben in Betracht ziehen dürfen. *Hiermit haben wir auch für $n = 2\nu + 1$ den zunächst in Aussicht zu nehmenden Zielpunkt erreicht.* Wir bemerken hierzu noch, dass die Anzahl der auf der Mannigfaltigkeit (67) enthaltenen meistausgedehnten linearen Räume für $n = 2\nu$ und $n = 2\nu + 1$ übereinstimmend $\infty^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ beträgt. —

Alle diese Sätze sind, wie man sieht, die genaue Verallgemeinerung der Theoreme, die wir für $\nu = 2$, also $n = 4, 5$, und für $\nu = 3$, also $n = 6, 7$, von früher her kennen. Aber nun tritt der ferneren Entwickelung eine Schwierigkeit entgegen, die wir bei $\nu = 2, 3$ unter Benutzung sozusagen zufälliger Umstände überwunden haben und die wir in principieller Form noch gar nicht anrührten. Im Falle $\nu = 2$ hatten wir nämlich aus *functionentheoretischen* Gründen schliessen können, dass es möglich sei, die bei ihm in Betracht kommenden ∞^1 linearen Räume so durch zwei Verhältnissgrössen $z_1 : z_2$ zu bezeichnen, dass $z_1 : z_2$ bei den Vertauschungen der x lineare Transformationen erleide. Für $\nu = 3$ begründeten wir den analogen Schluss durch Heranziehung *liniengeometrischer Entwickelungen:* es zeigte sich, dass wir die dreifach unendlich vielen alsdann vorhandenen linearen Räume in ganz entsprechender Weise durch vier Verhältnissgrössen $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ bezeichnen können. Für $\nu > 3$ aber versagen solche besondere Hülfsmittel und wir werden die Frage nach der zweck-

mässigsten Festlegung der dann vorhandenen linearen Räume durch Parameter, sowie nach dem Verhalten dieser Parameter bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x, auf directem, algebraischem Wege beantworten müssen. Ich möchte mir vorbehalten, hierauf bei Gelegenheit zurückzukommen, und beschränke mich einstweilen darauf, auf Hrn. Lipschitz' Untersuchungen über orthogonale Substitutionen zu verweisen, die ich dabei zu benutzen haben werde*).

Göttingen, im October 1886.

---

*) Vergl. Comptes Rendus der Pariser Academie vom 11ten und 18ten October 1880: *Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions*, sowie die besonders erschienene Schrift: *Untersuchungen über die Summen von Quadraten* (Bonn, Cohn, 1886).

Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale.

Von

Felix Klein in Göttingen.

In der im vorigen Annalenbande abgedruckten Arbeit *über Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind*, entwickele ich (pag. 133 daselbst) im Anschlusse an die Untersuchungen von Herrn Rohn u. A. einen Satz, demzufolge eine gerade Linie mit den elliptischen Coordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sich entweder um einen festen Punkt der zu Grunde liegenden Kummer'schen Fläche dreht oder in einer festen Tangentialebene derselben fortschreitet, sofern bei irgendwie fixirten Vorzeichen die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems erfüllt sind:

$$(1) \qquad \sum_1^4 {}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

wo $\nu = 0, 1$ zu nehmen ist und $\varphi(\lambda)$ das Product bezeichnet:

$$(2) \qquad \varphi(\lambda) = \prod_1^6 {}_i (\lambda - k_i).$$

Ich berühre ferner (pag. 138 daselbst, Fussnote) eine andere Deutung desselben Theorems, die sich für Differentiale von analogem Aufbau in der Dissertation des Herrn Domsch findet*) und auf deren Inhalt ich weiter unten noch genauer eingehen werde. Die folgenden Entwickelungen, die ich bei Gelegenheit zusammenstellte, haben den Zweck, die allgemeinen auf confocale Mannigfaltigkeiten zweiten Grades eines beliebig ausgedehnten Raumes bezüglichen Sätze aufzuweisen, unter welche sich die gesammten Theoreme subsumiren. Hierdurch wird, wie ich hoffe, nicht nur über die zunächst in Betracht kommenden liniengeometrischen Theoreme und eine grosse Zahl ähnlicher Beziehungen neue Klarheit verbreitet, sondern insbesondere auch unsere allgemeine Kenntniss der confocalen Mannigfaltigkeiten zweiten

---

*) 1885, cf. Grunert's Archiv, Neue Serie, Theil 2.

Grades durch Aufweisung einer merkwürdigen Gruppirung gewisser in ihnen enthaltener linearer Räume wesentlich vervollständigt. Letzteres aber erscheint um so werthvoller, als die Gruppirung der auf quadratischen Mannigfaltigkeiten enthaltenen linearen Räume immer noch wenig untersucht ist, während sie doch in verschiedenem Betracht von durchschlagender Wichtigkeit sein muss; man vergleiche die Schlussbemerkungen der hier vorangehenden Arbeit: *Ueber die Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades.* — Um die Darstellung nicht zu abstract zu gestalten, erörtere ich die zur Verwendung kommenden Schlussweisen zunächst ausführlich für den dreidimensionalen Punktraum, übertrage dieselben dann in grossen Zügen auf den Raum von beliebig vielen Dimensionen und steige schliesslich zum Falle der Liniengeometrie wieder herab. Mein Grundsatz ist dabei, im Gegensatze zu sonstigen diese Fragen betreffenden Arbeiten möglichst wenig zu rechnen, wesshalb ich denn auch in § 1 und anderwärts auf den Beweis sonst bekannter Theoreme aufs Neue eingehe.

§ 1.

Die confocalen $F^{(2)}$ des R_3 und der auf sie bezügliche Fundamentalsatz.

Indem ich von der Berücksichtigung irgendwelcher metrischer Beziehungen oder Realitätsdiscussionen im Folgenden durchweg absehe, definire ich hier, was fortan eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades des dreifach ausgedehnten Punktraums genannt werden soll, durch folgende Gleichung:

$$\sum_1^4 \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \tag{2}$$

in der die k_i irgendwie gegebene von einander verschiedene Grössen, die x_i aber beliebige Tetraedercoordinaten bedeuten sollen. Als elliptische Coordinaten des Punktes x bezeichne ich die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 (allgemein λ_α), welche (2) bei festgehaltenen x_i für λ als Unbekannte ergiebt. Schreiben wir dann:

$$\varphi(\lambda) = \prod_1^4 (\lambda - k_i).(\lambda - a)(\lambda - b) \tag{3}$$

und verlangen das Bestehen der Abel'schen Differentialgleichungen:

$$\sum_1^3 \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1), \tag{4}$$

so bewegt sich der Raumpunkt λ, einem Satze zufolge, der wohl

zuerst von Liouville aufgestellt wurde*) und der hier als *Fundamentalsatz* bezeichnet werden soll, *auf einer geraden Linie, welche die Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ berührt.* Aus dem in der Einleitung bemerkten Grunde und mit Rücksicht auf die Verallgemeinerungen, die ich für höhere Fälle beabsichtige, gebe ich hier zunächst einen neuen, möglichst einfachen Beweis dieses Satzes.

Mein Beweis ruht darauf, *das algebraische Gebilde, welches von der Gesammtheit der Schnittpunkte einer beliebigen Raumgeraden mit den Flächen* (2) *gebildet wird, in doppelter Weise aufzufassen.* Erstlich nehme ich, wie es am nächsten liegt, je diejenigen drei (durch die Werthe λ_1, λ_2, λ_3 des zugehörigen λ unterschiedenen) Schnittpunkte zusammen, welche in den nämlichen Punkt der Raumgeraden fallen. Das algebraische Gebilde stellt sich dann als dreifache Ueberdeckung unserer Raumgeraden dar, wobei die drei Ueberdeckungen an denjenigen Stellen Verzweigungspunkte haben, an denen die Raumgerade der developpablen Fläche begegnet, welche den Flächen (2) gemeinsam umgeschrieben ist. Als Zahl dieser Stellen ergiebt sich auf Grund bekannter Abzählungen 8, woraus sich das Geschlecht des algebraischen Gebildes als 2 berechnet. Wir schliessen sofort, dass es zwei zugehörige überall endliche Differentiale giebt, die wir $du^{(1)}$, $du^{(2)}$ nennen wollen. Indem wir noch durch einen unteren Index 1, 2 oder 3 unterscheiden, ob wir uns in der ersten oder der zweiten oder dritten Ueberdeckung der Raumgeraden befinden (ob wir uns also die in den Differentialen vorkommende algebraische Function des Ortes, λ, gleich λ_1 oder gleich λ_2 oder λ_3 gesetzt denken wollen) haben wir in bekannter Weise bei beliebigem Fortschreiten auf der Raumgeraden:

$$(5)\quad du_1^{(1)} + du_2^{(1)} + du_3^{(1)} = 0, \qquad du_1^{(2)} + du_2^{(2)} + du_3^{(2)} = 0,$$

Wir wenden uns jetzt zur zweiten Auffassung unseres algebraischen Gebildes. Dieselbe ruht darauf, dass wir immer diejenigen zwei Stellen desselben zusammengenommen denken, welche derselben Fläche λ der Schaar (2) angehören. Wir erhalten so eine zweifache Ueberdeckung des Gebietes der Variabelen λ, wobei, damit das Geschlecht 2 herauskomme, 6 Verzweigungsstellen auftreten müssen, solchen Flächen zweiten Grades der Schaar (2) entsprechend, die unsere Raumgerade in zusammenfallenden Punkten treffen. Vier dieser letzteren Flächen sind a priori bekannt: es sind die doppeltzählenden Ebenen des Coordinatentetraeders der x_i, welche unter der Schaar (2) für $\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4$ enthalten sind; die anderen beiden (die beliebig liegen können) nennen

*) Journal des Mathématiques, sér. I, t. 12 (1847). Wegen weiterer hier anknüpfender Entwickelungen und insbesondere der einschlägigen Literatur vergl. Staude in Bd. 22 dieser Annalen (*Geometrische Deutung des Additionstheorems hyperelliptischer Integrale* etc.)

wir, um den Anschluss an die Formeln (3) und (4) zu erzielen, $\lambda = a$ und $\lambda = b$. Ich will auch die Bezeichnung $\varphi(\lambda)$ der Formel (3) wieder aufnehmen. Dann ist vermöge unserer neuen Auffassungsweise ersichtlich, dass die beiden soeben eingeführten Differentiale $du^{(1)}$, $du^{(2)}$ in folgende Form gesetzt werden können:

$$(6) \qquad du^{(1)} = \frac{\pm d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad du^{(2)} = \frac{\pm \lambda d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Dies aber in (5) *eingetragen ergiebt die Formeln* (4), *womit der gewünschte Beweis der letzteren erbracht ist.* In der That ist ja die „beliebige" Raumgerade, mit der wir unseren Beweis begannen, im Verlaufe des Beweises von selbst in eine solche übergegangen, welche die Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ berührt.

Uebrigens ist leicht zu sehen, dass wir unseren Fundamentalsatz noch ein wenig strenger formuliren können. Man beachte, dass von einem beliebigen Raumpunkte aus an zwei gegebene Flächen zweiten Grades 4 gemeinsame Tangenten möglich sind, während die Differentialgleichungen (4) vermöge der in ihnen unbestimmt bleibenden Vorzeichen gerade auch 4 Fortschreitungsrichtungen vom Punkte λ aus bestimmen. Wir wussten bisher nur, dass unsere Differentialgleichungen thatsächlich erfüllt sind, wenn wir auf einer der genannten gemeinsamen Tangenten fortschreiten; wir sehen jetzt, dass sie auch *auf keine andere Weise* erfüllt werden können. *Die gemeinsamen Tangenten der Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ sind also als Integralcurven der Differentialgleichungen* (4) *charakterisirt.* In diesem verschärften Sinne soll fortan unser Fundamentalsatz aufgefasst sein.

§ 2.

Die erste Ausdehnung des Fundamentalsatzes.

Statt der Gleichungen (3), (4) betrachte ich jetzt einen Augenblick die folgenden:

$$(7) \qquad \varphi_1(\lambda) = \prod_1^4{}_i (\lambda - k_i), \qquad \sum_1^2{}_\alpha \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

wo in $\varphi_1(\lambda)$ die beiden in dem früheren $\varphi(\lambda)$ enthaltenen Factoren $(\lambda - a)$ und $(\lambda - b)$, die ich fortan als *willkürliche* Factoren bezeichne, weggeblieben sind und dafür nur *eine* Differentialgleichung geschrieben ist, bei der sich das Summenzeichen auf die beiden Indices 1 und 2 beschränkt, so dass λ_3 als constant zu gelten hat. Welches ist die geometrische Deutung dieses Gleichungssystems? Da wir $\lambda_3 =$ Const. gesetzt haben, so liefert die Integration von (7) jedenfalls solche Curven, die ganz auf einer, übrigens beliebigen $F^{(2)}$ unserer Schaar

verlaufen. Man erkennt jetzt leicht, *dass es sich einfach nur um die geradlinigen Erzeugenden der $F^{(2)}$ handelt**). Der Beweis lässt sich genau so gliedern, wie beim Satze des vorigen Paragraphen. Wir haben unsere Aufmerksamkeit wieder einem einfach ausgedehnten algebraischen Gebilde zuzuwenden, nämlich demjenigen, das von den Schnittpunkten einer geradlinigen Erzeugenden unserer festen $F^{(2)}$ mit den übrigen $F^{(2)}$ der confocalen Schaar gebildet wird. Dieses Gebilde kann einmal so aufgefasst werden, dass es die gewählte Erzeugende mehrfach (und zwar doppelt) überdeckt, andererseits wieder so, dass jeder Fläche λ zwei seiner Elemente zugeordnet werden, wobei sich Verzweigungsstellen bei $\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4$ einstellen. Der Vergleich beider Auffassungsweisen ergiebt sofort, dass die Differentialgleichung (7) beim Fortschreiten auf einer geradlinigen Erzeugenden der festen $F^{(2)}$ thatsächlich erfüllt ist. Nun bietet (7) aber ebenso viele Vorzeichencombinationen dar, als die Zahl der Erzeugenden beträgt, die auf $\lambda_3 = \text{Const.}$ durch einen beliebigen Punkt laufen. Die in Rede stehenden Erzeugenden sind also wieder auch die einzigen Curven, die der vorgeschriebenen Differentialbeziehung genügen.

Diese Betrachtung und Interpretation der Gleichungen (7) sollen hier nur vorläufige Bedeutung haben. Was wir eigentlich anstreben, ist die geometrische Integration der folgenden Gleichung:

$$\sum_{1}^{3}{}_{\alpha} \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \tag{8}$$

in der $\varphi_1(\lambda)$ dieselbe Bedeutung hat, wie in (7), die Summation über α aber von 1 bis 3 erstreckt ist, also sämmtliche λ als beweglich gelten. Offenbar handelt es sich jetzt darum, dass der Punkt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf gewissen *Flächen* fortschreitet, die den Raum so erfüllen, dass durch jeden Punkt vier derselben laufen. Aus dem Umstande, dass wir es in (8) mit der Differentialgleichung des Additionstheorems des elliptischen Integrals erster Gattung zu thun haben, werden wir sofort schliessen, dass es sich um *algebraische* Flächen handelt. Aber welches ist die nähere Definition dieser Flächen? Ich sage, dass wir *Ebenen* finden und zwar keine anderen Ebenen, als *die gemeinsamen Tangentialebenen der $F^{(2)}$ unserer confocalen Schaar.*

Der nächstliegende Beweis dieses Satzes beruht auf einer directen Verallgemeinerung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Da es bekannt ist, dass es gemeinsame Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ giebt

---

*) Dieser Satz ist keineswegs neu; man findet ihn beispielsweise in Herrn Darboux's Buche: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873), auf welches ich hier um so lieber verweisen will, als es mannigfache Beziehungspunkte auch zu den folgenden Paragraphen des Textes darbietet.

und dass diese Ebenen eine Developpable vierter Classe umhüllen, so genügt es, zu verificiren, dass die Differentialgleichung (8) erfüllt ist, wenn wir in einer solchen Ebene, die wir als gegeben betrachten, fortschreiten. Dies aber gelingt sofort, wenn wir beachten, dass die Paare geradliniger Erzeugender, in denen eine solche Ebene von unseren confocalen $F^{(2)}$ geschnitten wird, innerhalb der Ebene eine Curve dritter Classe vom Geschlechte Eins umhüllen, zu der ein bestimmtes überall endliches Integral gehört, das wir u nennen, — dass für je drei in einem Punkte der Ebene zusammenlaufende Tangenten der Curve dem Abel'schen Theoreme zufolge

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{Const.}$$

ist, — dass endlich du vermöge der Beziehung der Curve auf das Gebiet der Variabelen λ in die Form gesetzt werden kann:

$$du = \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi_1(\lambda)}}.$$

Der Unterschied dieser Betrachtung von der früheren ist ersichtlich nur der, dass jetzt eine ebene Curve zu Grunde gelegt wird, wo wir damals eine mehrfach überdeckte Gerade vor uns hatten.

Der hiermit angedeutete Beweis ist an sich so einfach wie möglich. Er setzt aber voraus, dass wir über die Existenz und Haupteigenschaften der gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ bereits unterrichtet sind, und eignet sich daher nicht für die weiterhin beabsichtigten Verallgemeinerungen, bei denen uns solche Vorkenntnisse nicht zu Gebote stehen. Ich entwickele daher hier eine andere Beweismethode, bei welcher die Existenz der gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ selbst erst aus (8) erschlossen wird.

Die neue Methode, welche ich darzulegen habe, geht davon aus, Gleichung (8) mit Gleichung (7) zu vergleichen und die für (7) gefundene Interpretation als bekannt vorauszusetzen. Gleichung (7) geht aus Gleichung (8) hervor, indem wir λ_3 constant nehmen. Wir schliessen, dass die durch (8) definirten Flächen die Eigenschaft haben, jede Fläche $\lambda_3 = \text{Const.}$, d. h. schlechthin jede $F^{(2)}$ unserer confocalen Schaar, nach Curven zu schneiden, welche (7) befriedigen, d. h. nach geradlinigen Erzeugenden zu schneiden. Unsere Fläche ist also jedenfalls vollständig durch gerade Linien überdeckt. Nun gehen aber durch jeden Raumpunkt drei $F^{(2)}$ der confocalen Schaar. *Unsere Fläche ist also sogar dreifach durch gerade Linien überdeckt.* Dann aber muss sie aus evidenten Gründen eine Ebene sein. Denn eine krumme Fläche kann nie mehr als zwei Schaaren geradliniger Erzeugender aufweisen (Hyperboloid). Wir finden also *Ebenen*, und zwar *Ebenen, welche sämmtliche $F^{(2)}$ unserer Schaar nach geraden Linien schneiden*, d. h. gemeinsame Tangentialebenen der $F^{(2)}$ unserer Schaar, w. z. b. w.

Wir müssen noch ausführen, dass mit den so definirten Ebenen sämmtliche gemeinsame Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ erschöpft sind. Dies gelingt folgendermassen. Wir betrachten irgend zwei durch einen Punkt laufende $F^{(2)}$ unserer Schaar und die zweimal zwei Erzeugenden, welche auf diesen $F^{(2)}$ durch den Punkt hindurchgehen. Soll eine gemeinsame Tangentialebene sämmtlicher confocaler $F^{(2)}$ durch den Punkt hindurch möglich sein, so muss dieselbe jede der beiden vorgenannten $F^{(2)}$ nach einer durch den Punkt hindurchlaufenden Erzeugenden schneiden, sie muss also eine der beiden durch den Punkt hindurchgehenden Erzeugenden der einen Fläche mit einer der beiden entsprechenden Erzeugenden der anderen Fläche verbinden. Die Zahl der durch den Punkt hindurchlaufenden gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ kann also nicht grösser als 4 sein, und da 4 gerade auch die Zahl der bei (8) möglichen Vorzeichencombinationen ist, so ist die geforderte Ergänzung unseres Gedankenganges erbracht:

Durch jeden Raumpunkt hindurch gehen der Differentialgleichung (8) *entsprechend vier Ebenen, welche geometrisch als gemeinsame Tangentenebenen der $F^{(2)}$ der confocalen Schaar charakterisirt sind.*

Es ist sehr merkwürdig, dass die Ergänzung, welche wir unserem zweiten Beweisgange hinzufügten, zu derjenigen, welche beim ersten Beweisgange nöthig war, gewissermassen complementär ist. In der That handelte es sich jetzt darum, dass geometrisch nicht mehr Ebenen einer gewissen Definition geliefert werden, als es Ebenen giebt, die der Differentialgleichung (8) genügen, während wir früher zu zeigen hatten, dass unsere Differentialgleichungen nicht etwa noch andere Integralmannigfaltigkeiten zulassen als diejenigen, deren geometrische Natur wir bereits erkannten.

§ 3.

Die zweite Ausdehnung des Fundamentalsatzes.

Die zweite Ausdehnung, die ich dem Fundamentalsatze zu geben beabsichtige, bezieht sich auf Folgendes: es soll sich darum handeln, anzugeben, wie sich die Bedeutung der Gleichungen (4) oder (8) modificirt, wenn wir in $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ statt eines oder mehrerer Factoren $(\lambda - k_i)$ *willkürliche* Factoren $(\lambda - c)$, $(\lambda - d)$, etc. einführen.

Um die so gestellte Frage in einfachster Weise zu beantworten, bediene ich mich einer geometrischen Transformation. Ich setze:

$$x_i^2 = \xi_i. \tag{9}$$

Dann geht Gleichung (2) der confocalen Flächen zweiten Grades in folgende über:

$$(10)\qquad \sum_1^4 \frac{\xi_i}{\lambda - k_i} = 0,$$

d. h. die Schaar der Flächen in die Schaar der einfach unendlich vielen Osculationsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung. Für Gleichung (4) aber, die wir in unveränderter Form hersetzen:

$$(11)\qquad \begin{gathered} \sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \\ \left(\nu = 0, 1;\ \varphi(\lambda) = \prod_1^4{}_i (\lambda - k_i)\cdot(\lambda - a)(\lambda - b)\right), \end{gathered}$$

ergiebt sich nach leichter Ueberlegung*), dass sie diejenigen *Kegelschnitte* des Raumes der ξ definirt, welche die Ebenen (10), die folgenden Parameterwerthen entsprechen:

$$\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4, a, b,$$

berühren. Gleichung (8) hingegen, die ich ebenfalls noch einmal herschreibe:

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \\ &\left(\varphi_1(\lambda) = \prod_1^4{}_i (\lambda - k_i)\right), \end{aligned} \right.$$

bedeutet jetzt diejenigen *Steiner'schen Flächen*, welche zur Raumcurve dritter Ordnung (10) in der Beziehung stehen, dass sie eine beliebige Osculationsebene derselben in zwei Kegelschnitten schneiden, die vier Osculationsebenen aber, deren Parameter λ bez. gleich k_1, k_2, k_3, k_4 sind, nach Erstreckung ganzer Kegelschnitte berühren.

Der Gewinn, den wir hiernach durch die Substitution (9) erzielt haben, liegt darin, dass die Unterscheidung der Factoren $(\lambda - k_i)$ und der willkürlichen Factoren $(\lambda - a)$ etc. für die geometrische Deutung gegenstandslos geworden ist. Führen wir statt etwelcher Factoren $(\lambda - k_i)$ neue willkürliche Factoren $(\lambda - c)$ etc. ein, so ist der Erfolg augenscheinlich der, dass in den gerade ausgesprochenen Sätzen an Stelle der Ebenen $\lambda = k_i$ etc. die Ebenen $\lambda = c$ etc. zu nennen sind, während die Form der Sätze selbst völlig ungeändert bleibt. Dies legen wir jetzt zu Grunde und kehren vermöge der Transformation (9) von den

---

*) Nämlich entweder vermöge unserer Transformation aus dem Fundamentalsatze des § 1, oder auch durch Wiederholung des damaligen Beweisverfahrens an dem von den Schnittpunkten des Kegelschnitts und der Osculationsebenen (10) erzeugten algebraischen Gebildes.

ξ_i zu den x_i zurück. Die ursprüngliche Frage nach der Bedeutung der modificirten Differentialgleichungen im Raume der x_i ist dann in folgende rein algebraische verwandelt: *Im Raume der ξ_i ist ein Kegelschnitt gegeben* (der selbstverständlich mit der Raumcurve dritter Ordnung (10) sechs Osculationsebenen gemein hat) *oder auch eine Steiner'sche Fläche, welche zur Raumcurve dritter Ordnung in der oben bezeichneten Beziehung steht* (die der Raumcurve eingeschrieben ist, wie man kurz sagen könnte): *es soll entschieden werden, welche Bilder Kegelschnitt und Steiner'sche Fläche im Raume der x_i finden.*

Ich will das Resultat, welches sich unmittelbar darbietet, hier nur für den Fall aussprechen, dass sämmtliche Factoren $(\lambda - k_i)$ durch willkürliche Factoren ersetzt worden sind. Dabei benenne ich eine Fläche oder eine Curve oder auch Punktsystem als *symmetrisch*, wenn die zugehörige algebraische Definition bei irgend welchen Vorzeichenänderungen der x_i ungeändert bleibt. Wir haben dann folgende Sätze:

I. *Sei*

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - a)\,(\lambda - b)\,(\lambda - c)\,(\lambda - d)\,(\lambda - e)\,(\lambda - f),$$

dann werden die Differentialgleichungen:

$$\sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1) \tag{13}$$

durch symmetrische Curven achter Ordnung integrirt, welche die Flächen $\lambda = a, b, c, d, e, f$ je achtmal in beziehungsweise symmetrisch gelegenen Punkten berühren.

II. *Sei*

$$\varphi_1(\lambda) = (\lambda - c)\,(\lambda - d)\,(\lambda - e)\,(\lambda - f).$$

Die Integralflächen der Differentialgleichung:

$$\sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm\, d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0 \tag{14}$$

sind dann symmetrische Flächen achter Ordnung, welche jede $F^{(2)}$ der confocalen Schaar in einem Paare symmetrischer Curven achter Ordnung durchsetzen, die Flächen $\lambda = c, d, e, f$ aber nach Erstreckung je einer solchen Curve berühren.

Wie nun entstehen aus diesen Curven und Flächen die speciellen, die wir in § 1 und 2 fanden? Die Sache ist selbstverständlich elementar, und so mag es genügen, hier nur das Resultat der betr. Ueberlegung mitzutheilen. So lange in $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ der Factor $\lambda - k_i$ noch nicht vorhanden ist, wird die Coordinatenebene $x_i = 0$ von der symmetrischen Curve oder Fläche achter Ordnung gewissermassen *senkrecht* geschnitten, d. h. so geschnitten, dass die Tangente der Curve

bez. die Tangentialebene der Fläche durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Coordinatentetraeders hindurchläuft. Dies kann nicht völlig aufhören zu gelten, wenn auch einer der Factoren von $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ in $(\lambda - k_i)$ übergeht, während dann doch gleichzeitig die Curve oder Fläche achter Ordnung die Ebene $x_i = 0$ berühren soll. Die Folge ist, dass die 8 Schnittpunkte der Curve mit der Ebene in *4 Doppelpunkte* zusammenrücken und die Schnittcurve achter Ordnung der Fläche mit der Ebene in eine *Doppelcurve vierter Ordnung* übergeht (während Curve wie Fläche nach wie vor symmetrisch bleiben). Man denke sich dies jetzt bei sämmtlichen 4 Coordinatenebenen gleichzeitig eintretend. Dann ist die Folge, wie man sofort sieht, dass die Curve oder Fläche in ein symmetrisches Aggregat von 8 linearen Bestandtheilen *zerfällt*, also die Curve in 8 Gerade, die Fläche in 8 Ebenen, die aus einer Geraden bez. Ebene durch die Vorzeichenwechsel der x_i hervorgehen. Und nun ist die Beziehung zu den Sätzen der § 1 und 2 ohne weiteres ersichtlich: wir haben damals je nur von *einer* dieser acht geraden Linien oder Ebenen gesprochen, insofern wir keinen Anlass hatten, auch noch die anderen Linien etc. zu betrachten, die aus der ersten Geraden durch die Vorzeichenwechsel der x_i entstehen. Dem entspricht auch, dass wir statt der achtmaligen Berührung der Curve achter Ordnung mit gewissen Flächen zweiten Grades in § 1 nur eine je einmalige Berührung der in Betracht kommenden geraden Linie und der Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ fanden, etc. etc. —

Ich habe hier gleich die beiden äussersten Fälle einander gegenübergestellt, dass nämlich an den Producten $\varphi(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)$ entweder keiner der Factoren $\lambda - k_i$ oder alle diese Factoren betheiligt sind. Es hat keinen Zweck, die verschiedenen möglichen Zwischenfälle hier einzeln aufzuzählen. Ich will hier nur den Fall hervorheben, dass in $\varphi(\lambda)$ drei der Factoren $(\lambda - k_i)$ und also noch drei willkürliche Factoren enthalten sind. Die Integralcurven des allgemeinen Falles zerfallen dann in Kegelschnitte, welche nur auf der einen der vier Coordinatenebenen senkrecht stehen (in dem eben erwähnten Sinne), während sie gleichzeitig drei $F^{(2)}$ der confocalen Schaar je zweimal berühren*).

§ 4.

Uebergang zu Räumen von $(n-1)$ Dimensionen.

Indem wir jetzt statt des gewöhnlichen Punktraums einen Raum von $(n-1)$ Dimensionen, R_{n-1}, einführen, versuchen wir die Entwickelungen der § 1 und 2 auf diesen allgemeineren Fall zu übertragen. Eine gleiche Uebertragung ist natürlich ebensowohl bei den Betrachtungen

*) Man sehe diesen Satz bei Darboux, l. c. —

des § 3 statthaft; wir unterlassen sie aber, da sie keinerlei besondere Schwierigkeit darbietet und eine blosse Häufung in ihrer Allgemeinheit doch unanschaulicher Theoreme nicht unser Zweck sein kann. Auf den Inhalt des § 3 kommen wir vielmehr erst zurück, wenn wir später die für beliebiges n erhaltenen Resultate am Falle der Liniengeometrie, der $n = 6$ entspricht, wieder specialisiren.

Als Ausgangsgleichung für unsere neue Betrachtung werden wir, der Gleichung (3) entsprechend, die folgende hinstellen:

$$\sum_1^n {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \tag{15}$$

vermöge deren jedem Raumpunkte x im Ganzen $(n - 1)$ elliptische Coordinaten

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ (allgemein } \lambda_\alpha)$$

zugeordnet werden. Wir wollen dabei sagen, dass jede einzelne Gleichung (15) eine *quadratische Mannigfaltigkeit von* $(n-2)$ *Dimensionen*, $M^{(2)}_{(n-2)}$, bestimmt. Den Buchstaben M mit ähnlicher Stellung zweier Indices verwenden wir später allgemein zur Bezeichnung irgend welcher algebraischer Mannigfaltigkeiten nach Ordnung und Dimension. Insbesondere *lineare* in R_{n-1} einbegriffene Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir kurzweg mit dem Buchstaben R, wobei wir die Dimensionen wieder durch einen rechts unten beigefügten Index markiren (z. B. R_ϱ)*).

Wenn wir jetzt zunächst das Analogon zum Fundamentalsatze des § 1 aufstellen wollen**), so werden wir vor Allem dem Producte der n jetzt a priori gegebenen Factoren

$$\prod_1^n {}_i (\lambda - k_i)$$

noch $(n-2)$ willkürliche Factoren zufügen, die

$$(\lambda - a_\varkappa)$$

heissen sollen $(\varkappa = 1, 2, \ldots, (n-2))$, so dass ein Ausdruck $\varphi(\lambda)$ entsteht, der folgendermassen lautet:

$$\varphi(\lambda) = \prod_1^n {}_i (\lambda - k_i) \cdot \prod_1^{n-2} {}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa). \tag{16}$$

Wir construiren dann die Differentialgleichungen:

---

*) Dies ist dieselbe Bezeichnungsweise, deren ich mich in der vorangehenden Abhandlung bediene.

**) Die Ausdehnung des Fundamentalsatzes auf beliebig viele Dimensionen findet sich schon in einer Arbeit von Schläfli, die von 1849 datirt ist und 1852 in Crelle's Journal t. 43 veröffentlicht wurde.

$$(17)\qquad \sum_1^{n-1}{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3),$$

und finden durch genau dasselbe Schlussverfahren, das wir in § 1 anwandten, den folgenden ersten Satz:

I. *Die Gleichungen* (17) *werden durch diejenigen* ∞^{n-2} R_1 *integrirt, welche die* $(n-2)$ *beliebig vorgegebenen* $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda = a_1,\ \lambda = a_2,\ \ldots,\ \lambda = a_{n-2}$$

berühren, und von denen durch jeden Raumpunkt 2^{n-2} *hindurchgehen.*

Diese Zahl 2^{n-2} ist zunächst durch die Zahl der in (17) möglichen Vorzeichencombinationen gegeben; wir bestimmen sie algebraisch, indem wir die $(n-2)$ Kegel zweiter Ordnung, die sich vom beliebig gewählten Raumpunkte aus an die $(n-2)$ $M_{(n-2)}^{(2)}$ legen lassen, zum gemeinsamen Schnitt bringen. Dass beidemal dieselbe Zahl resultirt, ist in der Form, die wir Satz I ertheilt haben, bereits ausgesprochen.

Wir fahren nun fort, wie in § 2 zu Anfang, indem wir von den in $\varphi(\lambda)$ auftretenden willkürlichen Factoren zwei weglassen, also etwa schreiben:

$$(18)\qquad \varphi_1(\lambda) = \prod_1^n{}_i (\lambda - k_i) \cdot \prod_1^{n-4}{}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa)$$

und nun nur $(n-3)$ Differentialgleichungen bilden, bei denen wir eines der λ, also etwa λ_{n-1}, als constant voraussetzen:

$$(19)\qquad \sum_1^{n-2}{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-4).$$

Wir finden:

II. *Durch jeden Punkt der einzelnen* $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda_{n-1} = \text{Const.}$$

laufen den Gleichungen (19) *entsprechend* 2^{n-3} *in der* $M_{(n-2)}^{(2)}$ *enthaltene* R_1, *welche geometrisch dadurch charakterisirt sind, dass sie die* $(n-4)$ *beliebig vorgegebenen* $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda = a_1,\ \lambda = a_2,\ \ldots,\ \lambda = a_{n-4}$$

berühren.

Die Gesammtzahl der so auf der einzelnen $M_{(n-2)}^{(2)}$ (bei festgehaltenen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$) bestimmten R_1 beträgt ∞^{n-3}. Was die Zahl 2^{n-3} angeht, so erhalten wir dieselbe algebraisch, indem wir die ausgezeichnete $M_{(n-2)}^{(2)}$ [deren Gleichung $\lambda_{n-1} = \text{Const.}$ ist] mit ihrer Tangentialebene in dem gerade ausgewählten Punkte und übrigens den $(n-4)$ Kegeln zweiter Ordnung schneiden, die sich vom genannten Punkte aus an die Mannigfaltigkeiten $\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$ legen lassen.

Jetzt ist deutlich, dass wir den Schritt, der von (16) und (17) zu (18) und (19) führt, und der darin besteht, dass wir zwei der willkürlichen in $\varphi(\lambda)$ enthaltenen Factoren wegwerfen und dafür die Zahlenreihen, welche die Indices α und ν in den Differentialgleichungen durchlaufen, je um eine Einheit kürzen, — für grössere n mehrere Mal wiederholen können. Ich will annehmen, dass dieser Schritt bereits ϱ-mal ausgeführt sei, wo $\varrho \leqq \left[\frac{n-2}{2}\right]$ sein wird. An Stelle des in (16) eingeführten $\varphi(\lambda)$ erhalten wir dann:

$$(20)\qquad \varphi_\varrho(\lambda) = \prod_1^n{}_i (\lambda - k_i) \cdot \prod_1^{n-2-2\varrho}{}_x (\lambda - a_x),$$

an Stelle der Differentialgleichungen (17) aber die $(n-2-\varrho)$ Differentialgleichungen:

$$(21)\qquad \sum_1^{n-1-\varrho}{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho).$$

Der zugehörige Satz aber, der die Sätze I und II als specielle Fälle unter sich begreift, wird folgendermassen lauten:

III. *Auf der* $M_{n-\varrho-1}^{2\varrho}$, *welche irgend* ϱ *Mannigfaltigkeiten unseres confocalen Systems:*

$$(21\text{ b})\qquad \lambda_{n-1} = C_1,\ \lambda_{n-2} = C_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho$$

gemeinsam ist, verlaufen den Differentialgleichungen (21) *entsprechend durch jeden Punkt* $2^{n-2-\varrho}$ R_1, *die geometrisch unter den übrigen* R_1 *der genannten Mannigfaltigkeit dadurch definirt sind, dass sie die* $n-2-2\varrho$ $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda = a_1,\ \lambda = a_2,\ \ldots,\ \lambda = a_{n-2-2\varrho}$$

berühren.

Die Gesammtzahl der hier (bei festen $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2-2\varrho}$) in Betracht kommenden R_1 ist $\infty^{n-\varrho-2}$.

Die Aufstellung der Sätze I, II, III erfolgt auf Grund der früheren Betrachtungen ohne Schwierigkeit. Es ist nun aber die Frage, ob wir, an sie anknüpfend, so weiterschliessen können, wie in § 2 geschah, ob wir also zu mehrfach ausgedehnten linearen Räumen von erkennbarer geometrischer Eigenschaft geführt werden, wenn wir den Index α in den Formeln (17), (19), (21) gleichförmig von 1 bis $n-1$ laufen lassen und die so entstehenden Differentialgleichungen integriren. Dass dies in der That der Fall ist, wollen wir im folgenden Paragraphen zeigen.

§ 5.

Ausdehnung der Sätze des vorigen Paragraphen.

In welcher Richtung die Ausdehnung der Sätze des vorigen Paragraphen zu suchen ist, dürfte nach dem Gesagten bereits erkennbar sein. Wenn wir in den Differentialgleichungen (21) die Summation nach α nicht von 1 bis $(n-1-\varrho)$, sondern von 1 bis $(n-1-\varrho+\sigma)$ ausdehnen, wo σ irgend eine Zahl $\leqq \varrho$ ist, also schreiben:

$$(22)\qquad \sum_1^{n-1-\varrho+\sigma} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (\nu - 3 - \varrho),$$

während, den Gleichungen (21b) entsprechend,

$$(23)\qquad \lambda_{n-1} = C_1,\ \lambda_{n-2} = C_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho+\sigma} = C_{\varrho-\sigma}$$

gesetzt sein soll, so werden wir bei Integration der neuen Differentialgleichungen von jedem Punkte der durch (23) vorgestellten $M^{2(\varrho-\sigma)}_{n-1-\varrho+\sigma}$ auslaufend $2^{n-1-\varrho+\sigma}$ ganz in dieser Mannigfaltigkeit enthaltene algebraische $M_{\sigma+1}$ (überhaupt also auf der durch (23) vorgestellten Mannigfaltigkeit $\infty^{n-2-\varrho}\ M_{\sigma+1}$) erhalten. Von diesen $M_{\sigma+1}$ wissen wir zunächst nur, dass sie jedes Aggregat von weiter zutretenden σ Mannigfaltigkeiten $M^{(2)}_{(n-2)}$:

$$(24)\qquad \lambda_{n-\varrho+\sigma-1} = C_{\varrho-\sigma+1}, \ldots, \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho$$

dem Satze III des vorigen Paragraphen zufolge (wie aus Vergleichung der Differentialgleichungen hervorgeht) nach lauter solchen R_1 schneiden, welche die an dem Ausdrucke $\varphi_\varrho(\lambda)$ ausgezeichnet betheiligten Mannigfaltigkeiten

$$(25)\qquad \lambda = a_1,\ \lambda = a_2, \ldots, \lambda = a_{n-2-2\varrho}$$

berühren (wobei alle in (24) enthaltene berührende R_1 dieser Art zur Verwendung gelangen). *Hieraus wollen wir schliessen, dass die $M_{\sigma+1}$ selber linear (also $R_{\sigma+1}$) sind, — dass sie jede einzelne der zutretenden Mannigfaltigkeiten (24) nach einem Paare linearer Räume (R_σ) schneiden, welche zusammenfallen, wenn man als zutretende Mannigfaltigkeit insbesondere eine der (25) wählt, — dass ferner ausser den $R_{\sigma+1}$, die (24) genügen, keine anderen $R_{\sigma+1}$ derselben geometrischen Definition existiren.* Wir mögen in diesem Satze der Zahl σ insbesondere den Maximalwerth ϱ ertheilen. *Dann soll es also den Differentialgleichungen entsprechend:*

$$(26)\qquad \sum_1^{n-1} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho)$$

von jedem Punkte des R_{n-1} auslaufend $2^{n-2}\ R_{\varrho+1}$ (i. e. im Ganzen $\infty^{n-2-\varrho}\ R_{\varrho+1}$) geben, welche jede unserer confocalen Mannigfaltigkeiten

nach einem Paare von R_ϱ *schneiden, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn man eine der Mannigfaltigkeiten* (25) *herannimmt; zugleich soll es keine anderen* $R_{\varrho+1}$ *dieser Eigenschaft geben als die durch* (26) *gefundenen.*

Man bemerke, dass wir aus dem letztausgesprochenen Satze den vorangehenden, auf beliebiges σ bezüglichen und darum scheinbar allgemeineren sofort wieder ableiten können. Denn wenn der Schnitt eines der in Rede stehenden $\infty^{n-2-\varrho}$ $R_{\varrho+1}$ mit jeder der confocalen Mannigfaltigkeiten in lineare Bestandtheile zerfällt, so geschieht nothwendig das Gleiche mit dem Schnitte, den $R_{\varrho+1}$ mit beliebig vielen, gleichzeitig in Betracht gezogenen confocalen Mannigfaltigkeiten gemein hat. Nun repräsentirt jeder durch (22), (23) definirte $R_{\sigma+1}$, wie durch Vergleichung der Differentialgleichungen (22), (26) hervorgeht, nur den einzelnen der $2^{\varrho-\sigma}$ linearen Bestandtheile, die in dem hiermit bezeichneten Sinne durch Zusammenstellung eines geeigneten $R_{\varrho+1}$ mit den Mannigfaltigkeiten (23) definirt wird (wie denn auch die Zahl der $R_{\sigma+1}$ und $R_{\varrho+1}$ beidemal dieselbe, nämlich $\infty^{n-2-\varrho}$, ist). Daher ist deutlich, dass der Schnitt des $R_{\sigma+1}$ mit beliebig zutretenden weiteren confocalen Mannigfaltigkeiten genau ebenso in lineare Bestandtheile zerfallen muss, wie der Schnitt des $R_{\varrho+1}$. Der auf beliebiges σ bezügliche Satz ist also in der That ein specieller Fall des zu (26) gehörigen, und wir werden den letzteren als den zusammenfassenden Ausdruck des durch unsere Ueberlegungen für den Raum von beliebig vielen Dimensionen abzuleitenden Resultates betrachten dürfen.

Was den Beweis der somit formulirten Sätze betrifft, so führe ich ihn genau entsprechend zu den Ueberlegungen des § 2. Es handelt sich vor Allem darum, einzusehen, dass unsere $M_{\sigma+1}$ *linear* sein müssen (also $R_{\sigma+1}$ sind). In dieser Hinsicht gingen wir in § 2 davon aus, dass eine Fläche nicht öfter als zweimal von geraden Linien überdeckt sein kann, ohne eben zu sein. In der That werden die geraden Linien, welche durch einen Flächenpunkt laufen, der Tangentialebene im Flächenpunkte und der im Punkte osculirenden Fläche zweiten Grades gemeinsam sein, und ihre Zahl kann also nur dann > 2 sein, wenn die Tangentialebene ein Bestandtheil der genannten Fläche zweiten Grades ist, was bei einer gekrümmten Fläche nur in einzelnen Punkten denkbar ist. Ich formulire dementsprechend für mehr Dimensionen den folgenden Grundsatz:

Eine $M_{\sigma+1}$ *ist linear* (*also ein* $R_{\sigma+1}$), *wenn von jedem Punkte der* $M_{\sigma+1}$ *mehr als zwei der* $M_{\sigma+1}$ *angehörige Räume* R_σ *auslaufen.*

Wir beachten jetzt, dass der von uns zu beweisende Hauptsatz in Folge der Theoreme des § 4 jedenfalls für $\sigma = 0$ richtig ist (die dort durch die Differentialgleichungen definirte M_1 ist ein R_1). Wir werden also annehmen, derselbe sei überhaupt bereits für $\sigma = \sigma'$ bewiesen,

und werden dann zeigen, dass er für $\sigma = \sigma' + 1$ ebenfalls gilt. Dieser Beweis aber gelingt unmittelbar in Folge des formulirten Grundsatzes (den wir hier als richtig acceptiren, ohne ihn weiter zu begründen). Die $M_{\sigma+1}$, die wir durch Integration von (22) erhalten, liegt den Formeln (23) entsprechend auf $\varrho - \sigma$ confocalen Mannigfaltigkeiten, wo $\varrho \leq \left[\frac{n-2}{2}\right]$; durch jeden Punkt der $M_{\sigma+1}$ gehen also noch weitere $(n - 1 - \varrho + \sigma)$ confocale Mannigfaltigkeiten, eine Zahl, die für $n \geq 4$ jedenfalls grösser als 2 ist. Nun aber schneidet jede dieser weiteren confocalen Mannigfaltigkeiten längs einer durch unseren Punkt hindurchlaufenden M_σ, die nach Voraussetzung linear ist. Unsere $M_{\sigma+1}$ hat also die Eigenschaft, dass von jedem ihrer Punkte aus mehr als zwei in ihr enthaltene R_σ auslaufen, und also ist sie nach unserem Grundsatze selbst linear ($= R_{\sigma+1}$), was zu beweisen war.

Was die übrigen Punkte unserer Behauptungen angeht, so erledigen wir sie ebenfalls nach dem Vorbilde der in § 2 gegebenen Entwickelungen.

Zunächst ist zu zeigen, dass die $R_{\sigma+1}$, welche jede einzelne confocale Mannigfaltigkeit, wie wir jetzt wissen, nach zwei R_σ schneiden, die Mannigfaltigkeiten (25) speciell nach solchen zwei R_σ treffen, die zusammenfallen. Wieder nehmen wir an, der Satz sei für kleinere Werthe von σ bewiesen (wie er es für $\sigma = 0$ ja in der That ist). Dann haben also die sämmtlichen R_σ, welche aus $R_{\sigma+1}$ durch die confocalen Mannigfaltigkeiten ausgeschnitten werden (und die $R_{\sigma+1}$, wie wir wissen, mehrfach überdecken), die Eigenschaft, jene beiden R_σ, in denen $R_{\sigma+1}$ einer Mannigfaltigkeit (25) begegnet, in einem Paare zusammenfallender $R_{\sigma-1}$ zu treffen, woraus gewiss folgt, dass die beiden R_σ, welche aus $R_{\sigma+1}$ durch die einzelne Mannigfaltigkeit (25) ausgeschnitten werden, zusammenfallen. (Auf gleiche Weise zeigt man, dass die beiden R_σ, nach denen eine confocale Mannigfaltigkeit, die nicht zu den (25) gehört, unserer $R_{\sigma+1}$ begegnet, allgemein zu reden *nicht* coïncidiren).

Wir behaupten ferner, dass es keine anderen $R_{\sigma+1}$ derselben, uns nun bekannten geometrischen Definition giebt, als diejenigen, die aus unseren Differentialgleichungen entspringen. Auch diese Behauptung ist für $\sigma = 0$ (und zwar durch algebraische Abzählung) bewiesen, so dass wir abermals nur zu zeigen brauchen, dass sie für $\sigma = \sigma' + 1$ gilt, wenn sie für $\sigma = \sigma'$ zutrifft. Wir denken uns irgend einen $R_{\sigma+1}$ gegeben, der, auf den confocalen Mannigfaltigkeiten (23) gelegen, die übrigen confocalen Mannigfaltigkeiten in der hier nicht noch einmal zu nennenden Weise durchsetzt. Derselbe wird ein System linearer Differentialgleichungen befriedigen, das wir für einen Augenblick folgendermassen schreiben wollen:

$$(27) \qquad \sum_{1}^{n-1-\varrho+\sigma} M_\alpha^{(\nu)} \cdot d\lambda_\alpha = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho).$$

Nun wird unser $R_{\sigma+1}$ nach Voraussetzung von jeder zutretenden confocalen Mannigfaltigkeit in zwei R_σ von kanonischer Definition durchsetzt, d. h. in zwei R_σ, welche den Differentialgleichungen genügen, die aus (22) hervorgehen, wenn man bei der Summation einen der angegebenen Werthe von α überspringt. Dies aber heisst nichts Anderes, als dass aus (27) durch Nullsetzen eines beliebigen der $d\lambda_\alpha$ immer dasselbe System linearer Differentialgleichungen entstehen soll, wie aus den mit den richtigen Vorzeichen genommenen Formeln (22), was nicht anders möglich ist, als wenn für die gegebenen $R_{\sigma+1}$ die Gleichungen (27) bei geeigneter Wahl der Vorzeichen mit den Gleichungen (22) gleichbedeutend sind, was zu beweisen war.

§ 6.

Verification des gerade gegebenen Beweises.

Der Beweis, den ich im vorigen Paragraphen erbrachte, dürfte bei manchem Leser vielleicht darum auf Schwierigkeiten stossen, weil ich das von mir benutzte Theorem der mehrdimensionalen Geometrie ohne weitere Erläuterung hingestellt habe. Ich will also nicht unterlassen, meine Schlüsse, soweit sie geometrisch waren (also mit Ausnahme des letzten, wesentlich algebraischen) auch noch durch Rechnung zu verificiren, wobei ich nur insofern an meinem bisherigen Entwickelungsgange festhalte, als ich mich nach wie vor auf die Theoreme des § 4 stütze.

Die Sache ist einfach folgende. Das allgemeine Integral der Gleichungen (26) (die ich hier allein in's Auge fasse, da ihre Betrachtung genügt, wie wir früher sahen) ist bekanntermassen durch Nullsetzen einer Matrix von $(n-\varrho+1)$ Verticalreihen und $(2n-2)$ Horizontalreihen gegeben:

$$(28) \qquad \left| \begin{array}{llllll} \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-2} \cdots 1 & \lambda_1^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} & \lambda_1^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} & \cdots & \sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^{n-2} \cdots 1 & \lambda_2^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} & \lambda_2^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} & \cdots & \sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-2} \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{n-1} & \mu_1^{n-2} \cdots 1 & \mu_1^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} & \mu_1^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} & \cdots & \sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} \\ \mu_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{n-1}^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right| ;$$

hier sind $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ Integrationsconstanten. Es handelt sich jetzt darum, aus dieser Matrix die von uns aufgestellten Theoreme abzuleiten.

Erstlich wollen wir zeigen, dass die durch diese Matrix dargestellte algebraische $M_{\varrho+1}$ im Raume der x linear ist. Wir wissen zunächst nur, nach § 4, dass wenn wir

$$\lambda_{n-1} = C_1,\ \lambda_{n-2} = C_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho \tag{29}$$

setzen und selbstverständlich die dann in der Matrix vorkommenden Quadratwurzeln:

$$\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)},\ \sqrt{\varphi_\varrho(C_2)}, \ldots, \sqrt{\varphi_\varrho(C_\varrho)} \tag{30}$$

irgendwie fixiren, dass dann das Verschwinden der Matrix eine auf den Mannigfaltigkeiten gelegene lineare Mannigfaltigkeit von einer Dimension (einen R_1) vorstellt. Aber eben hieraus können wir unseren Schluss machen. Zu den Gleichungen (29) können nämlich die Vorzeichen (30) im Ganzen auf 2^ϱ Weisen hinzugewählt werden. Andererseits ist die $M_{n-1-\varrho}$, welche durch die Gleichungen (29) dargestellt wird, als Schnitt von ϱ Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung selber von der Ordnung 2^ϱ. Die durch (28) vorgestellte $M_{\varrho+1}$ hat hiernach die Eigenschaft eine $M_{n-1-\varrho}$ von der Ordnung 2^ϱ nach 2^ϱ R_1 zu schneiden. Dies aber heisst *nach dem Bezout'schen Theoreme*, dass $M_{\varrho+1}$ selber linear, $= R_{\varrho+1}$ ist.

Ferner zeigen wir, dass der Schnitt des $R_{\varrho+1}$ mit einer beliebigen confocalen Mannigfaltigkeit

$$\lambda_{n-1} = C_1,$$

aus zwei R_ϱ besteht. Es werden zwei getrennte Mannigfaltigkeiten, weil wir wieder in der Hand haben, für $\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_{n-1})}$ in unsere Matrix $+\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)}$ oder $-\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)}$ einzutragen, — und jede dieser Annahmen führt zu einer linearen Mannigfaltigkeit, d. h. zu einem R_ϱ, weil die Hinzunahme fester Werthe von $\lambda_{n-2}, \ldots, \lambda_{n-\varrho}$ und der zu ihnen gehörigen Quadratwurzeln, wie soeben, je einen R_1 ergiebt.

Endlich, dass die beiden R_ϱ, in denen unsere $R_{\varrho+1}$ eine der Mannigfaltigkeiten

$$\lambda = a_\varkappa$$

durchsetzt, zusammenfallen, folgt einfach daraus, dass $\varphi_\varrho(a_\varkappa)$ verschwindet und also in diesem Falle der Unterschied, der durch die Vorzeichenwahl von $\sqrt{\varphi_\varrho}$ eingeführt wird, verschwindet.

§ 7.

Besondere Betrachtung der Verhältnisse auf der einzelnen $M^{(2)}_{(n-2)}$.

Im Interesse der liniengeometrischen Anwendungen, die ich beabsichtige, erläutere ich hier noch besonders den Fall der im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze, in welchem $\sigma = \varrho - 1$ genommen ist und also *eine* elliptische Coordinate constant gesetzt wird:

$$\lambda_{n-1} = C_1. \tag{31}$$

Wir haben dann die Differentialgleichungen:

$$\sum_{1}^{n-2}{}_{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho) \tag{32}$$

und hierzu den Satz, den ich mit I benennen will:

I. *Auf der Mannigfaltigkeit* (31) *verlaufen durch jeden Punkt* 2^{n-3} *Räume* R_ϱ, *welche geometrisch dadurch definirt sind, dass sie alle anderen confocalen Mannigfaltigkeiten nach Paaren von Räumen* $R_{\varrho-1}$ *schneiden, welch' letztere für die besonderen Mannigfaltigkeiten*

$$\lambda = a_1, \; \lambda = a_2, \ldots, \; \lambda = a_{n-2\varrho-2}$$

zusammenfallen. Diese R_ϱ *sind die Integrale der Differentialgleichungen* (32).

Ich wünsche diesen Satz mit der allgemeinen Theorie der auf einer $M^{(2)}_{n-2}$ enthaltenen linearen Räume*) in Verbindung zu setzen.

Erstlich machen wir eine gewisse Abzählung. Der genannten Theorie zufolge enthält eine $M^{(2)}_{n-2}$ Räume R_ϱ für $\varrho = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-2}{2}\right]$ und zwar von der einzelnen Art je $\infty^{\frac{1}{2}(\varrho+1)(2n-3\varrho-4)}$. Räume aller dieser Arten treten auch in Satz I auf. Ihre Anzahl berechnet sich dabei folgendermassen. Halten wir die $(n-2\varrho-2)$ Grössen $a_\varkappa$ fest, so überdecken die zugehörigen R_ϱ die $M^{(2)}_{(n-2)}$ endlichfach, die Zahl der R_ϱ ist also $\infty^{n-2-\varrho}$. Denken wir uns jetzt auch noch die $a_\varkappa$ beweglich, so kommen wir auf $\infty^{2n-3\varrho-4}$ R_ϱ. Diese Zahl stimmt nur dann mit der vorher angegebenen, wenn $\varrho = 1$. Wir können hiernach folgendermassen sagen:

II. *Durch die in* I *auftretenden* R_ϱ *werden sämmtliche* R_1, *die auf* (31) *vorhanden sind, erschöpft, keineswegs aber die sonstigen mehrfach ausgedehnten* R.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall eines geraden n und setzen $\varrho = \frac{n-2}{2}$. Der Ausdruck $\varphi_\varrho(\lambda)$ enthält dann überhaupt keine will-

*) Vergl. in dieser Hinsicht insbesondere Segre: Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Atti di Torino, Memorie, 1884, sowie verschiedene Angaben und Bemerkungen in meiner eigenen hier vorangehenden Abhandlung.

kürlichen Factoren mehr, was diesem Falle sein besonderes Interesse verleiht. Andererseits weiss man, dass die $R_{\frac{n-2}{2}}$, die (für gerades n) auf einer $M_{n-2}^{(2)}$ vorhanden sind, in zwei gleichberechtigte Classen zerfallen, so zwar dass die $R_{\frac{n-2}{2}}$ der einzelnen Classe sich continuirlich an einander anschliessen, nirgends aber einen Uebergang zu den $R_{\frac{n-2}{2}}$ der anderen Classe haben (das einfachste Beispiel geben die beiden Erzeugendensysteme eines Hyperboloids). Mit Rücksicht hierauf behaupte ich:

III. *Die 2^{n-3} Räume $R_{\frac{n-2}{2}}$, welche (für gerades n und $\varrho = \frac{n-2}{2}$) dem Satze* I *entsprechend von einem beliebigen Punkte der $M_{(n-2)}^{(2)}$ auslaufen, vertheilen sich gleichförmig auf die beiden in Rede stehenden Classen, so zwar, dass immer solche zwei $R_{\frac{n-2}{2}}$ zu verschiedenen Classen gehören, deren Differentialgleichungen* (32) *sich durch eine ungerade Zahl von Zeichenwechseln unterscheiden. Diejenigen dem Satze I genügenden $R_{\frac{n-2}{2}}$, welche derselben Classe angehören, bilden je ein irreducibeles Ganzes.*

Was den Beweis angeht, so wollen wir die übrigens bekannte Bemerkung vorausschicken, dass eine gerade Zahl von Zeichenwechseln der Coordinaten x_i jede der beiden auf unserer $M_{(n-2)}^{(2)}$ (31) gelegenen Classen von $R_{\frac{n-2}{2}}$ ungeändert lässt, eine ungerade Zahl aber sie vertauscht. Wir müssen jetzt ferner die Formeln heranziehen, welche die Coordinaten x_i mit den elliptischen Coordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ verknüpfen. Dieselben lauten bekanntlich, unter σ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\sigma x_i = \sqrt{\frac{(\lambda_1 - k_i)(\lambda_2 - k_i)\cdots(\lambda_{n-1} - k_i)}{\varphi'_{\frac{n-2}{2}}(k_i)}}, \tag{34}$$

wo

$$\varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda) = (\lambda - k_1)(\lambda - k_2)\ldots(\lambda - k_n),$$

oder besser, da wir die Quadratwurzeln aus den einzelnen Factoren $(\lambda_\alpha - k_i)$ sogleich unabhängig von einander betrachten müssen:

$$\sigma x_i = \frac{\sqrt{\lambda_1 - k_i}\cdot\sqrt{\lambda_2 - k_i}\cdots\sqrt{\lambda_{n-1} - k_i}}{\sqrt{\varphi'_{\frac{n-2}{2}}(k_i)}}. \tag{34b}$$

Hiermit stellen wir nun die Differentialgleichungen (32) für $\varrho = \frac{n-2}{2}$ zusammen; wir wollen dieselben in der entsprechenden Form schreiben:

$$(35) \qquad \sum_{1}^{\frac{n-2}{2}}{}_{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha - k_1}\sqrt{\lambda_\alpha - k_2}\cdots\sqrt{\lambda_\alpha - k_n}} = 0, \quad \left(\nu = 0, 1, \cdots, \frac{n-4}{2}\right).$$

Wir denken uns jetzt zunächst, indem wir die sämmtlichen λ_α festhalten, eine dieser Differentialgleichungen fixirt, etwa diejenige, die lauter $+$ Zeichen aufweist, und fragen, durch welche Vorzeichenänderungen der Quadratwurzeln $\sqrt{\lambda_\alpha - k_i}$ wir von ihr zu den übrigen hingelangen. Da in (35) immer n der genannten Quadratwurzeln mit einander multiplicirt sind, so kann dies in jedem Falle auf eine grosse Zahl verschiedener Weisen geschehen. Unabhängig von dieser Willkür finden wir aber offenbar, da n gerade ist, folgenden Satz:

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die wir an den $\sqrt{\lambda_\alpha - k_i}$ anbringen müssen, ist gerade oder ungerade, je nachdem wir von der anfänglichen Differentialgleichung zu einer solchen mit einer geraden oder ungeraden Anzahl von Minuszeichen übergehen wollen.

Wie nun verhalten sich hierbei die Ausdrücke σx_i (34b)? Ein jeder derselben enthält von den in Betracht kommenden Factoren $\sqrt{\lambda_\alpha - k_i}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, (n-2))$ wieder eine gerade Zahl. Daher folgt (bei aller Unbestimmtheit im Einzelnen):

Die x_i erfahren eine gerade oder ungerade Zahl von Zeichenwechseln, je nachdem wir bei der anfänglichen Differentialgleichung eine gerade oder ungerade Zahl von Vorzeichenänderungen anbringen.

Dies aber heisst in der That, nach der vorausgeschickten Bemerkung, dass die $R_{\frac{n-2}{2}}$, welche zu verschiedenen Vorzeichencombinationen in (35) gehören, dann und nur dann von derselben Classe sind, wenn die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die von dem einen Systeme von Differentialgleichungen zum anderen hinüberführen, gerade ist, w. z. b. w.

Wir prüfen jetzt unsere Angabe über die *Irreducibilität* der von unseren $R_{\frac{n-2}{2}}$ erzeugten Gebilde. Von einer bestimmten Anfangslage aus lassen wir das Element x auf der Mannigfaltigkeit $\lambda_{n-1} = C_1$ (31) irgend welchen Weg beschreiben, durch welchen es schliesslich zu seiner Anfangslage zurückkehrt, und sehen zu, wie sich dabei die verschiedenen Systeme von Differentialgleichungen (35) permutirt haben mögen. Wir wollen dies in der Weise bewerkstelligen, dass wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}$ als die eigentlichen Veränderlichen betrachten, die

dann ihrerseits sich wegen (34b) so bewegen müssen, dass nicht nur sie selbst, sondern auch die Producte

$$\sqrt{\lambda_1 - k_i} \cdot \sqrt{\lambda_2 - k_i} \cdots \sqrt{\lambda_{n-2} - k_i}$$

(bis auf einen etwa bei allen simultan eintretenden und auf den Proportionalitätsfactor σ zu rechnenden Zeichenwechsel) zu ihren Anfangswerthen zurückkehren. Wir fragen, welche Zeichenwechsel dabei in (35) auftreten mögen. Offenbar kann dies nur eine gerade Zahl von Zeichenwechseln sein, wir können aber auch jede vorgegebene Art von Zeichenwechseln, deren Anzahl gerade ist, wirklich erzielen. Hierin liegt, was über die Irreducibilität gesagt wurde.

§ 8.

Anwendung auf Liniengeometrie.

Die Anwendung der vorhergehenden Ueberlegungen auf Liniengeometrie betrifft selbstverständlich, wie in der Einleitung in Aussicht genommen, die Theorie der „confocalen“ Liniencomplexe zweiten Grades, welche in bekannter Weise durch das Gleichungssystem

$$(36) \qquad \sum_1^6{}_i \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \qquad \sum_1^6{}_i x_i^2 = 0$$

dargestellt werden (wo sich die zweite Gleichung aus der ersten ergiebt, indem man $\lambda = \infty$ setzt). Wir haben hier für $n = 6$, $C_1 = \infty$ ganz die Prämissen des vorigen Paragraphen. Die Elemente der ausgezeichneten $M_{(4)}^{(2)}$, die durch $\lambda_5 = \infty$ gegeben ist, nennen wir *gerade Linien*, ihre R_1 *Strahlbüschel*, die beiden Arten der ihr angehörigen R_2 beziehungsweise *Strahlenbündel* und *Geradenfelder*. Der einzelne durch (36) gegebene Complex zweiten Grades hat mit einem Strahlbüschel, allgemein zu reden, zwei Strahlen gemein, mit einem Strahlenbündel einen Kegel zweiter Ordnung, mit einem Geradenfeld eine Curve zweiter Classe.

Wir recurriren jetzt auf Satz I des vorigen Paragraphen und haben sofort, indem wir zunächst $\varrho = 1$ setzen:

I′. *Jede Raumgerade gehört acht Strahlbüscheln an, die dadurch definirt sind, dass sie mit jedem von zwei vorgegebenen Complexen*

$$\lambda = a_1, \quad \lambda = a_2$$

zwei zusammenfallende Strahlen gemein haben. Diese Strahlbüschel sind die Integrale der Differentialgleichungen

$$(37) \qquad \sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

wo

$$\varphi(\lambda) = \prod_{1}^{6}{}_i (\lambda - k_i) \cdot \prod_{1}^{2}{}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa).$$

Hierzu beachte man, dass, Satz II des vorigen Paragraphen zufolge, jedes Strahlbüschel von zweien der confocalen Complexe in dem erwähnten Sinne berührt wird, dass also, bei geeigneter Annahme von a_1, a_2, jedes Strahlbüschel des Raumes seine Darstellung durch (37) findet.

Wir setzen ferner in Satz I des vorigen Paragraphen $\varrho = 2$, ziehen gleichzeitig Satz III heran und erhalten das Theorem von der *Gemeinsamkeit der Singularitätenfläche* unserer Complexe. In der That haben wir:

I″. *Jede Raumgerade gehört vier Strahlenbündeln und vier Geradenfeldern an, welche die Eigenschaft haben, mit jedem der confocalen Complexe einen in zwei Strahlenbüschel zerfallenden Kegel zweiter Ordnung, bez. eine in zwei Strahlenbüschel zerfallende Curve zweiter Classe gemein zu haben. Diese Bündel bez. Felder sind durch folgende Differentialgleichungen definirt:*

$$(38) \qquad \sum_{1}^{4}{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1),$$

wo

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_{1}^{6}{}_i (\lambda - k_i)$$

gesetzt ist und sich die verschiedenen Vorzeichencombinationen auf die Bündel und Felder in der erläuterten Weise vertheilen. Die Fläche der Bündelmittelpunkte und die von den Felderebenen umhüllte Fläche sind irreducibel.

Hier sind nun die Differentialgleichungen (38) keine anderen, als die von Hrn. Rohn aufgestellten, auf die in der Einleitung Bezug genommen wurde. Der Unterschied unserer jetzigen Entwickelung gegenüber der von Hrn. Rohn gegebenen oder auch gegenüber meiner eigenen, im vorigen Annalenbande enthaltenen (Ueber Configurationen etc.) ist dabei der, dass jetzt nicht, wie dort, die Existenz der gemeinsamen Singularitätenfläche unserer Complexe bereits als bekannt angesehen und nur die Richtigkeit der Differentialgleichungen bewiesen wird, dass vielmehr die Existenz der gemeinsamen Singularitätenfläche selbst aus den Differentialgleichungen erschlossen wird. Freilich bleibt bei unserem jetzigen Gedankengange ein wichtiger Punkt noch unerledigt, *dass nämlich die Fläche der singulären Punkte mit der*

Fläche der singulären Ebenen identisch ist; ich werde im folgenden Paragraphen hierauf zurückkommen. —

Haben wir so den Anschluss an die ersten Sätze erreicht, die zu Beginn dieser Mittheilung vorangestellt wurden, so gelingt jetzt ohne Schwierigkeit auch der Uebergang zu dem eben dort genannten Theoreme des Hrn. Domsch. Wir haben zu dem Zwecke an die Entwickelungen des § 3 anzuknüpfen, wobei wir uns aber darauf beschränken wollen, nur einen der Factoren $\lambda - k_i$, nämlich $\lambda - k_6$, durch einen willkürlichen Factor $\lambda - a_3$ zu ersetzen und diese Aenderung auch nur an den Differentialgleichungen (37) anzubringen. Wir erhalten so die Gleichungen:

$$(39) \qquad \sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_1^5{}_i (\lambda_\alpha - k_i) \cdot \prod_1^3{}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

deren geometrische Interpretation verlangt wird. Nach den Erläuterungen des § 3 wird es sich jedenfalls darum handeln, dass die Raumgerade x eine einfach ausgedehnte quadratische Mannigfaltigkeit, d. h. eine Regelschaar durchläuft, welche ungeändert bleibt, wenn man x_6 im Vorzeichen ändert. Letztere Eigenschaft aber lässt sich auf Grund bekannter liniengeometrischer Entwickelungen geometrisch kurz dahin ausdrücken, dass die Erzeugenden unserer Regelschaar paarweise in Bezug auf den Complex $x_6 = 0$ als conjugirte Polaren zusammengehören, oder auch, was dasselbe ist, dass die conjugirte Regelschaar, d. h. die zweite Erzeugung des von unserer Regelschaar überdeckten Hyperboloids, dem Complexe $x_6 = 0$ angehört. Im Uebrigen wird, in Uebereinstimmung mit § 3, unsere Regelschaar die drei Complexe $\lambda = a_1$, $\lambda = a_2$, $\lambda = a_3$ je zweimal berühren, d. h. mit jedem einzelnen derselben statt vier getrennter Strahlen zweimal zwei zusammenfallende Strahlen gemein haben. Wir finden das Theorem:

II. *Von jeder Raumgeraden aus erstrecken sich acht Regelschaaren, welche die drei vorgegebenen Complexe $\lambda = a_1$, $\lambda = a_2$, $\lambda = a_3$ je zweimal berühren und dabei die Eigenschaft haben, dass die von ihnen überdeckten Hyperboloide vermöge ihrer zweiten Erzeugung dem Complexe $x_6 = 0$ angehören. Diese Regelschaaren sind analytisch durch die Differentialgleichungen* (39) *definirt.*

Der hiermit gewonnene Satz steht dem von Hrn. Domsch gegebenen sehr nahe, aber er ist mit ihm noch nicht identisch. Hr. Domsch operirt überhaupt nicht, wie wir hier, mit beliebigen Raumgeraden, sondern immer nur mit den Geraden eines bestimmten der sechs linearen Fundamentalcomplexe, sagen wir mit den Geraden von $x_1 = 0$. Dies hat zufolge, dass von den vier elliptischen Coordinaten der Raum-

geraden eine (etwa λ_1) den constanten Werth k_1 bekommt und aus der Reihe der Veränderlichen ausscheidet. Ich will der besseren Uebersicht halber die ganze Reihe der hier entstehenden Sätze anführen. Formel (37) findet ihr Analogon, indem wir schreiben:

$$(40) \qquad \sum_2^4 {}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_2^6 {}_i (\lambda_\alpha - k_i) \cdot (\lambda_\alpha - a_1)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

(wo neben fünf Factoren $(\lambda - k_i)$ jetzt ein willkürlicher, $(\lambda - a_1)$, vorhanden ist), was uns von jeder geraden Linie des Complexes $x_1 = 0$ auslaufend *vier diesem Complexe angehörige Strahlbüschel ergiebt, welche den beliebig angenommenen Complex $\lambda = a_1$ je einfach berühren.* Formel (38) scheidet aus dem Vergleich aus, weil in (40) unter der Quadratwurzel überhaupt nur ein willkürlicher Factor vorhanden ist und also nicht zwei weggelassen werden können, wie es der Fortschritt von (37) zu (38) verlangt.

Das Gegenbild zu Formel (39) gewinnen wir, indem wir den in (40) auftretenden Factor $(\lambda - k_6)$ überall durch $(\lambda - a_2)$ ersetzen, unter a_2 eine willkürliche Grösse verstanden. Wir haben dann die Differentialgleichungen:

$$(41) \qquad \sum_2^4 {}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_2^5 {}_i (\lambda_\alpha - k_i) \cdot \prod_1^2 {}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

und finden ihnen entsprechend *von jeder Linie des Complexes $x_1 = 0$ auslaufend vier dem Complexe $x_1 = 0$ angehörige Regelschaaren, welche die beliebig vorgegebenen Complexe $\lambda = a_1$ und $\lambda = a_2$ je zweimal berühren und deren conjugirte Regelschaaren dem Complexe $x_6 = 0$ angehören.* Dies aber ist der Domsch'sche Satz.

§ 9.

Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche.

Als besten Gewinn der vorangehenden Erörterungen betrachte ich, dass sich eine naturgemässe Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche für den Fall hyperelliptischer Functionen höheren Geschlechtes darbietet. Die Kummer'sche Fläche erscheint im Vorhergehenden als der Inbegriff der ∞^2 Strahlenbündel, bez. ∞^2 Geradenfelder, welche den hyperelliptischen Differentialgleichungen vom Geschlechte 2 genügen:

$$\sum_{1}^{4}{}_{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1), \tag{42}$$

wo $\varphi(\lambda)$ das Product $\prod_{1}^{6}{}_{i} (\lambda - k_i)$ bezeichnet. Ist nun $p > 2$ gegeben, so werden wir entsprechend $n = 2p + 2$ wählen $\left(\text{so dass } p = \frac{n-2}{2} \text{ ist}\right)$, zunächst eine der elliptischen Coordinaten constant setzen:

$$\lambda_{n-1} = C_1 \tag{43}$$

und nun die Differentialgleichungen hinschreiben:

$$\sum_{1}^{n-2}{}_{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1, \cdots, (p-1)), \tag{44}$$

wo $\varphi(\lambda) = \prod_{1}^{n}{}_{i} (\lambda - k_i)$ zu nehmen ist. *Die irreducibelen Mannigfaltigkeiten von zweimal* ∞^p R_p, *welche die Mannigfaltigkeit* (43) *nach Satz* II *und* III *des* § 7 *den Differentialgleichungen* (44) *entsprechend enthält, erscheinen uns als die Verallgemeinerungen der das eine Mal von Punkten gebildeten und das andere Mal von Ebenen umhüllten Kummer'schen Fläche.* An die Stelle der Zahl 4, welche Ordnung und Classe der Kummer'schen Fläche angiebt, tritt dabei die Zahl 2^{n-4}. —

Hier nun wird es unabweisbar, zu discutiren, warum die von den Punkten gebildete und die von den Ebenen umhüllte Kummer'sche Fläche identisch sind. Wir werden den Beweis hierfür liefern müssen, indem wir von den elliptischen Liniencoordinaten λ und den Differentialgleichungen (42) ausgehen, und zusehen, was die Uebertragung derselben Ueberlegung auf den Fall grösserer Dimensionenzahl liefert.

Der in Aussicht genommene Beweis gestaltet sich jedenfalls am einfachsten, indem wir aus (42) zeigen, dass alle Linien, für welche zwei λ einander gleich werden (also etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ ist), gleichzeitig die von den singulären Punkten gebildete Kummer'sche Fläche und die von den singulären Ebenen umhüllte Kummer'sche Fläche berühren. Dies aber gelingt folgendermassen. Ich will, um unnöthige Unbestimmtheiten zu vermeiden, mir die Differentialgleichungen (42) hier so geschrieben denken, dass die Terme mit $d\lambda_1$ das $+$ Zeichen haben. Setzen wir dann, indem $\lambda_2 = \lambda_1$ genommen ist, $\varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_1)$, so werden vier der acht zu unterscheidenden Systeme von Differentialgleichungen lauten

$$\frac{(d\lambda_1 + d\lambda_2) \cdot \lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_3 \cdot \lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} \pm \frac{d\lambda_4 \cdot \lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1), \tag{45a}$$

vier andere aber folgendermassen:

$$(45\text{b})\quad \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\cdot\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_3\cdot\lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} \pm \frac{d\lambda_4\cdot\lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} = 0, \quad (\nu = 0,\ 1).$$

Die vier Systeme der einen und der anderen Art vertheilen sich dabei gleichförmig auf die singulären Punkte und die singulären Ebenen, welche die Gerade λ trägt: denn unter den Gleichungssystemen (45a) und (45b) sind gleichförmig zwei mit einer geraden und zwei mit einer ungeraden Zahl von Minuszeichen. Nun sage ich, — und darin liegt unser Beweis, — *dass von den Gleichungen* (45b) *immer diejenigen beiden, welche durchaus entgegengesetzte Vorzeichen haben, in ihrer geometrischen Bedeutung zusammenfallen* (so dass also die Gleichungen (45b) nicht zwei auf der Geraden λ befindliche Punkte und zwei durch sie hindurchgehende Ebenen vorstellen, sondern nur einen auf ihr befindlichen (doppeltzählenden) Punkt und eine durch sie hindurchgehende (doppeltzählende) Ebene). — In der That, ob ich beispielsweise schreibe:

$$0 = \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\,\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_3\cdot\lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} + \frac{d\lambda_4\cdot\lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} \quad (\nu = 0,\ 1)$$

oder

$$0 = \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\,\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} - \frac{d\lambda_3\cdot\lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} - \frac{d\lambda_4\cdot\lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} \quad (\nu = 0,\ 1),$$

kommt geometrisch auf dasselbe hinaus. Denn die eine Gleichung geht aus der anderen hervor, wenn ich λ_1 mit λ_2 vertausche, und dies ist eine für die geometrische Deutung irrelevante Operation. —

Wir wiederholen jetzt dieselbe Ueberlegung an den Differentialgleichungen (44). Wieder spalten wir die 2^{n-3} Systeme von Differentialgleichungen, die in (44) eingeschlossen sind (und die sich auf 2^{n-4} Systeme der einen Art und 2^{n-4} der anderen Art nach der Zahl der Minuszeichen vertheilen), für $\lambda_1 = \lambda_2$ in 2^{n-4}, welche den Term $\frac{d\lambda_1 + d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}\cdot\lambda_1^\nu$, und in ebensoviele, welche den Term $\frac{d\lambda_1 - d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}\cdot\lambda_1^\nu$ enthalten. Von letzteren erschliessen wir dann, dass sie paarweise zu demselben doppeltzählenden R_p gehören. Wir haben also folgenden Satz, in welchem wir die gewünschte Verallgemeinerung erblicken, wenn er auch der Form nach von dem ursprünglich für die Kummer'sche Fläche aufgestellten Theoreme zunächst sehr verschieden erscheint:

Während sich von einem beliebigen Punkte unserer Mannigfaltigkeit (43) *aus* 2^{n-4} *getrennte* R_p *der einen und ebensoviele* R_p *der anderen Art erstrecken, die beziehungsweise den Differentialgleichungen* (44) *genügen, fallen für solche Punkte von* (43), *für welche zwei* λ *einander gleich sind,* 2^{n-5} *der genannten* R_p *der einen Art und ebensoviele der*

anderen Art zu 2^{n-6} doppeltzählenden R_p der einen, bez. der anderen Art zusammen.

Ich unterlasse es, diesen Satz noch weiter zu verfolgen, insbesondere auch solche Punkte von (43) in Betracht zu ziehen, für welche mehrere λ einander gleich werden*), will aber den Wunsch nicht unterdrücken, dass dies von anderer Seite geschehen möge. Was den Fall $n = 4$ angeht, so findet man die betreffenden Verhältnisse in Bd. V dieser Annalen, p. 295—296, auseinandergesetzt.

Göttingen, im October 1886.

---

*) Durch Hrn. Bertini bin ich vor längerer Zeit auf eine Unrichtigkeit in meiner alten Arbeit „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades" (Math. Ann. t. 2) [derselben Arbeit, in der die nun wieder benutzten confocalen Liniencomplexe zweiten Grades eingeführt wurden] aufmerksam gemacht worden, die ich bei dieser Gelegenheit verbessern will. In Nr. 4 daselbst (p. 202) ist die Definition der allgemeinen Liniencoordinaten in unrichtiger Weise mit gewissen Momenten in Verbindung gesetzt worden, indem ich nämlich bei der Berechnung der Momente bestimmte Factoren vernachlässigte, die nicht weggelassen werden dürfen, auch wenn man nur die Verhältnisse der Momente in Betracht ziehen will. Ich kann den Leser nur bitten, den Eingang der genannten Nr. 4 bis zum Schluss des cursiv gedruckten Satzes einfach durchzustreichen. Desgleichen muss der Satz modificirt werden, mit welchem Nr. 1 meiner Arbeit über „die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten" beginnt (Bd. II dieser Annalen, p. 366).

F. Kl.

Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*).

Von

A. Hurwitz in Königsberg.

Bekanntlich ist das Chasles'sche Correspondenzprincip, welches nur für das Entsprechen von Punkten auf einer Curve vom Geschlechte Null Gültigkeit besitzt, von Herrn Cayley auf Curven von beliebigem Geschlechte erweitert worden, eine Erweiterung, welche zuerst von Herrn Brill bewiesen wurde**). Dieses verallgemeinerte Correspondenzprincip lautet folgendermassen:

„Zwischen den Coordinaten $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ zweier Punkte x und y einer algebraischen Curve C vom Geschlechte p sei eine algebraische Gleichung

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$$

gegeben. Vermöge dieser Gleichung werden jedem Punkte x der Curve eine bestimmte Anzahl α mit x beweglicher und im Allgemeinen von x verschiedener Punkte y und umgekehrt jedem Punkte y der Curve eine bestimmte Anzahl β mit y beweglicher und im Allgemeinen von y verschiedener Punkte x entsprechen. Dann kommt es immer

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma$$

Mal vor, dass zwei entsprechende Punkte x, y zusammenfallen. Dabei bedeutet γ eine positive Zahl, welche angiebt, wie viele von den Schnittpunkten der Curve $\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$ oder auch der Curve $\Psi(y_1, y_2, y_3 \mid x_1, x_2, x_3) = 0$ mit der Curve C in den Punkt y hineinfallen, wenn unter y_1, y_2, y_3 die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes y der Curve C verstanden werden."

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten d. k. sächs. Gesellschaft d. Wiss., mathematisch-physische Classe, Sitzung vom 11. Januar 1886.

**) Cayley, Comptes rendus, Bd. 62, pag. 586 und Transactions of the R. Soc. London Bd. 158, pag. 145. Brill, Math. Annalen Bd. 6, pag. 33 und Bd. 7, pag. 607. Man vgl. auch die „Vorlesungen über Geometrie" von Clebsch, herausgegeben von Lindemann (Bd. I, pag. 441 ff. und Bd. II, pag. 720 ff.)

Die Zahl γ heisst (nach Herrn Brill) die „Werthigkeit" des Punktes $x = y$.

Es ist eine wesentliche Voraussetzung dieses Satzes, dass die algebraische Correspondenz auf der Curve C in bestimmter Weise, nämlich durch eine Gleichung $\Psi = 0$, definirt werden könne. Nun zeigen aber Beispiele, dass Correspondenzen existiren, für welche diese Voraussetzung nicht zutrifft. Ich habe mir deshalb die Aufgabe gestellt, alle überhaupt möglichen algebraischen Correspondenzen zu bestimmen und die Zahl ihrer Coincidenzen festzustellen.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe erschien es rathsam, an Stelle der algebraischen Curve eine beliebige Riemann'sche Fläche als Träger der Correspondenz anzunehmen. Die für die Riemann'sche Fläche gewonnenen Resultate lassen sich dann nicht nur auf ebene algebraische Curven, sondern überhaupt auf alle einstufigen geometrischen Gebilde, welche durch eine beliebige Anzahl algebraischer Gleichungen definirbar sind, ohne Weiteres übertragen. Jedes solche Gebilde kann ja als eine besondere Erscheinungsform einer Riemann'schen Fläche aufgefasst werden.

§ 1.

Relationen zwischen den Integralen erster Gattung und deren Periodicitätsmoduln.

Um eine möglichst geringe Zahl von Voraussetzungen zu machen, möge die Aufgabe, um welche es sich handelt, folgendermassen formulirt werden:

„Zwischen zwei Stellen x und y einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p findet eine analytische Abhängigkeit statt der Art, dass jeder Stelle x der Fläche eine gewisse Zahl α mit x beweglicher und im Allgemeinen von x verschiedener Lagen $y', y'', \ldots y^{\alpha}$ der Stelle y correspondiren. Es soll diese Correspondenz zwischen den Stellen x und y analytisch definirt und die Zahl ihrer Coincidenzen bestimmt werden."

Es ergiebt sich zunächst, dass nothwendig jeder Lage der Stelle y nur eine endliche Anzahl β von Lagen $x', x'', \ldots x^{\beta}$ der Stelle x correspondiren können. Der Beweis, welcher auf bekannten Principien beruht, möge nur kurz angedeutet werden. Angenommen, es könnten einer Stelle y unendlich viele Stellen $x', x'', \ldots$ entsprechen, so würde mindestens eine Stelle a auf der Riemann'schen Fläche vorhanden sein, in deren noch so klein angenommenenen Umgebung unendlich viele der Stelle y correspondirende Stellen liegen. Diese Stelle a würde eine wesentlich singuläre im Gebiete der variabeln Stelle x sein und eine solche kann nicht existiren.

Indem ich mich der Behandlung des aufgestellten Problems zuwende, bemerke ich zuvörderst, dass ich den Fall $p = 0$, welcher sich in bekannter Weise einfach erledigt, ausschliesse. Ferner sollen die Indices

$$i,\ k,\ l,\ m,\ n$$

Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots p$ bedeuten und falls sie als Summationsbuchstaben auftreten, all' ihre Werthe durchlaufen, sodass z. B. das Zeichen $\sum_i$ als Abkürzung für $\sum_{i=1}^{i=p}$ gebraucht wird.

Es seien nun

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots\ u_p(x)$$

die Werthe von p unabhängigen überall endlichen Integralen der Fläche an der Stelle x. Betrachten wir die Summe

$$u_k(y') + u_k(y'') + \cdots + u_k(y^\alpha)$$

als Function der Stelle x, so wird dieselbe erstens überall endlich sein und zweitens, wenn x einen geschlossenen Weg beschreibt, sich um eine Periode von u_k vermehren, da sich die Stellen $y', y'', \ldots y^\alpha$ nur unter einander vertauscht haben können, wenn x auf seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt ist*). Die obige Summe ist daher ein überall endliches Integral der Fläche und es bestehen also die p Gleichungen:

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots p),$$

wo die Coefficienten π von der Stelle x unabhängige Grössen vorstellen**).

Die Constanten π_k sind offenbar von der Wahl der in den Integralen $u(x)$ enthaltenen additiven Constanten abhängig.

Die Integrale $u(x)$ sollen nun, was stets möglich ist, so gewählt werden, dass sie die folgenden primitiven Periodicitätsmoduln besitzen:

$$\begin{array}{l} u_1 \cdots 1, 0, \cdots 0, a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1p}, \\ u_2 \cdots 0, 1, \cdots 0, a_{21}, a_{22}, \cdots a_{2p}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_p \cdots 0, 0, \cdots 1, a_{p1}, a_{p2}, \cdots a_{pp}. \end{array}$$

Poincaré
Picard

*) Es ist möglich, dass von den Stellen $y', y'', \ldots y^\alpha$ einige abgesondert werden können, die bei allen geschlossenen Wegen, welche x beschreibt, sich nur unter sich vertauschen. Dann ist die betrachtete Correspondenz reductibel. Ob dieses eintritt oder nicht, lassen wir dahingestellt.

**) Aehnliche Gleichungen bestehen auch, wenn man eine Correspondenz zwischen zwei Stellen *zweier* Riemann'schen Flächen betrachtet. Diese Gleichungen können als eine Verallgemeinerung des Abel'schen Theorems angesehen werden, in welches sie übergehen, wenn eine der beiden Flächen das Geschlecht Null besitzt.

Dann lassen sich die Coefficienten π_{ki} auf folgendem Wege bestimmen: Die Stelle x beschreibe einen geschlossenen Weg, auf welchem $u_l(x)$ in $u_l(x) + 1$ übergeht, während die übrigen Integrale sich ungeändert reproduciren: so werden sich die rechten Seiten der Gleichungen (1) um die Coefficienten π_{kl} vermehren, während die linken Seiten um ein System simultaner Perioden der Integrale wachsen. Es ist also

$$(2) \qquad \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, a_{ki} \quad (k, l = 1, 2, \ldots p),$$

wo die Buchstaben h und g ganze Zahlen bezeichnen.

Beschreibt ferner x einen Weg, auf welchem $u_l(x)$ in $u_l(x) + a_{il}$ übergeht, so ergiebt sich in analoger Weise

$$(3) \qquad \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} a_{ki} \quad (k, l = 1, 2, \ldots p),$$

wobei die Zeichen H, G wiederum ganze Zahlen bedeuten.

Substituiren wir die Werthe der Grössen π aus (2) in (3), so erhalten wir zwischen den Grössen a_{ik} die folgenden p^2 Relationen:

$$(4) \qquad \sum_i h_{ki} a_{il} + \sum_{i,m} g_{mi}\, a_{km}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, a_{ki}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots p).$$

§ 2.

Eintheilung der Correspondenzen in singuläre und Werthigkeits-Correspondenzen.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden; entweder stellen nämlich die Relationen (4) eine wirkliche Abhängigkeit der Grössen a_{ik} von einander vor, oder dieses ist nicht der Fall, sodass die Relationen (4) für alle Werthe der $\frac{p(p+1)}{2}$ Grössen a_{ik} erfüllt sind. Setzen wir das Letztere voraus, so ergiebt sich, dass

$$h_{11} = h_{22} = \cdots h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \cdots = G_{pp},$$

und dass alle übrigen Zahlen g, h, G, H verschwinden müssen. Wenn wir den gemeinsamen Werth der Zahlen h_{ii}, G_{ii} mit $-\gamma$ bezeichnen, so nehmen jetzt die Gleichungen (1) folgende Gestalt an:

$$(5) \qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \gamma \cdot u_k(x) = \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Wir nennen dann die Correspondenz eine „*Werthigkeits-Correspondenz*“, die positive oder negative ganze Zahl γ die zu der Correspondenz gehörige „*Werthigkeit*“.

Dagegen soll in dem ersten oben erwähnten Falle, wenn also die p^2 Relationen (4) sich nicht alle auf Identitäten reduciren, die Correspondenz eine *„singuläre“* genannt werden. Solche singuläre Correspondenzen können offenbar nur auf besonderen Riemann'schen Flächen existiren, nämlich nur auf solchen, bei denen es möglich ist, die p^2 Relationen (4) durch ganzzahlige Werthe der Grössen h, g, H, G zu befriedigen, ohne dass $h_{11} = h_{22} = \cdots = G_{11} = G_{22} = \cdots$ ist und zugleich die übrigen Grössen h, g, H, G verschwinden.

Diese besonderen Riemann'schen Flächen sollen „singulär“ genannt werden. Wir haben also folgenden Satz:

„Jede auf einer nicht singulären Riemann'schen Fläche mögliche Correspondenz ist eine Werthigkeits-Correspondenz“.

Dieser Satz wird später durch den anderen ergänzt werden:

„Auf jeder singulären Riemann'schen Fläche existiren auch singuläre Correspondenzen“.

§ 3.

Definition der Werthigkeitscorrespondenzen durch eine algebraische Function.

Es bezeichne nun $\vartheta[v_1, v_2, \ldots v_p]$ oder kürzer $\vartheta[v_i]$ die zu der Fläche gehörige ϑ-Function, so wird bei passender Wahl der Constanten c_i

$$\vartheta[u_i(x) - u_i(y) - c_i]$$

als Function der Stelle x (oder y) aufgefasst für $x = y$ (oder $y = x$) und weitere $p - 1$ nur von den Constanten c_i abhängende Stellen unendlich klein von der ersten Ordnung. Wenn daher x eine variable, $y', y'', \ldots y^\alpha$ die correspondirenden Stellen, ferner x_0 eine feste, $y_0', y_0'', \ldots y_0^\alpha$ die ihr correspondirenden Stellen, endlich y eine variable, y_0 eine feste Stelle bedeutet, so wird die Function

$$(6) \qquad C(x, y) = \prod_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\vartheta[u_i(y) - u_i(y^r) - c_i]}{\vartheta[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i]\ \vartheta[u_i(y) - u_i(y_0^r) - c_i]}$$

als Function von y nur an den x correspondirenden Stellen $y', y'', \ldots y^\alpha$ einfach Null und nur an den x_0 correspondirenden Stellen $y_0', y_0'', \ldots y_0^\alpha$ einfach unendlich und verhält sich entsprechend, wenn man sie als Function von x auffasst. Das Product

$$(7) \qquad F(x, y) = \left[\frac{\vartheta[u_i(y) - u_i(x) - c_i]}{\vartheta[u_i(y) - u_i(x_0) - c_i]\ \vartheta[u_i(y_0) - u_i(x) - c_i]}\right]^\gamma \cdot C(x, y)$$

hat aber in Folge der Gleichungen (5) die Eigenschaft, sich unverändert zu reproduciren, wenn y einen geschlossenen Weg beschreibt und ist also eine algebraische Function der Stelle y. Lassen

wir x einen geschlossenen Weg durchlaufen, so geht $F(x, y)$ in $e^{2\pi i \sum_i M_i [u_i(y) - u_i(y_0)]} F(x, y)$ über, wo die M_i ganze Zahlen bezeichnen. Da aber die Function nach wie vor algebraisch von der Stelle y abhängen muss, so sind die Zahlen M_i sämmtlich gleich Null, sodass $F(x, y)$ in $F(x, y)$ übergeht, also ungeändert bleibt. $F(x, y)$ ist also auch eine algebraische Function der Stelle x. Damit ist folgender Satz bewiesen:

„*Jede Werthigkeitscorrespondenz — also nach dem vorigen Paragraphen z. B. jede auf einer nicht singulären Riemann'schen Fläche überhaupt mögliche Correspondenz — lässt sich durch eine von zwei Stellen x, y der Fläche algebraisch abhängende Function $F(x, y)$ definiren. Wird die Stelle x (bez. y) fixirt, so verschwindet $F(x, y)$ als Function der Stelle y (bez. x) aufgefasst γ-fach für $y = x$ (bez. $x = y$) und je einfach an denjenigen α (bez. β) Stellen, welche der Stelle x (bez. y) correspondiren; sie wird unendlich γ-fach an der festen Stelle x_0 (bez. y_0) und je einfach an den α (bez. β) dieser Stelle x_0 (bez. y_0) correspondirenden Stellen*".

Dabei ist unter einer γ-fachen Null-, bez. Unendlichkeitsstelle eine — γ-fache Unendlichkeits- bez. Nullstelle zu verstehen, wenn γ eine negative Zahl sein sollte. Die im Satze gegebene Aufzählung der Null- und Unendlichkeitsstellen ist eine erschöpfende.

§ 4.

Das Correspondenzprincip für Werthigkeitscorrespondenzen.

Durchwandern die Stellen x und y gleichzeitig (etwa dicht hinter einander) denselben geschlossenen Weg, so wird sich $\vartheta[u_i(y) - u_i(x) - c_i]$ ungeändert reproducirt haben, wenn x und y auf ihren Ausgangspunkt zurückgekehrt sind. Denn die Integrale $u_i(y)$ und $u_i(x)$ haben sich um dieselbe Periode vermehrt. Deshalb wird

$$F(x) = \left[\frac{F(x, y)}{(\vartheta[u_i(y) - u_i(x) - c_i])^\gamma}\right]_{y=x} \tag{8}$$

eine algebraische Function der Stelle x sein. Diese Function wird nun so oft verschwinden, als die Stelle x mit einer correspondirenden Stelle y^r zusammenfällt, also C-mal, wenn C die Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz bezeichnet. Sie wird an den α Stellen $x = y_0^r$ und den β der Stelle y_0 entsprechenden Stellen je einfach unendlich und überdies γ-fach unendlich (oder $(-\gamma)$-fach Null) an den $2p$ Nullstellen von $\vartheta[u_i(x) - u_i(x_0) - c_i] \cdot \vartheta[u_i(y_0) - u_i(x) - c_i]$. Da nun eine algebraische Function ebenso oft Null wie unendlich wird, so ist

(9) $$C = \alpha + \beta + 2p\gamma,$$

welches (für $\gamma > 0$) die Cayley-Brill'sche Correspondenzformel ist. Zugleich erhalten wir aber ausser dieser Formel den Satz:

„Die Coincidenzstellen einer Correspondenz mit positiver Werthigkeit sind stets die Nullstellen einer algebraischen Function $F(x)$ der Fläche. Die Coincidenzstellen einer Correspondenz mit negativer Werthigkeit γ sind zusammen mit $2p$ anderen je $(-\gamma)$-fach zu nehmenden Stellen (nämlich den willkürlichen Stellen x_0, y_0 und den $2p-2$ Nullstellen einer Function φ) die Nullstellen einer algebraischen Function $F(x)$ der Fläche".

§ 5.

Zahl der Stellenpaare, welche aus zwei sich gleichzeitig in zwei Werthigkeitscorrespondenzen entsprechenden Stellen bestehen.

Auch die von Herrn Brill aufgestellte Formel*) für die Zahl der zweien Correspondenzen gemeinsamen Paare entsprechender Stellen ist auf alle Werthigkeitscorrespondenzen ausdehnbar. Die erste Correspondenz besitze die Werthigkeit γ und es möge die Stelle y nach Fixirung der Stelle x α-deutig, umgekehrt die Stelle x nach Fixirung von y β-deutig bestimmt sein; ferner sollen α', β', γ' für die zweite Correspondenz die entsprechende Bedeutung haben, wie α, β, γ für die erste. Fassen wir nun immer zwei Paare (x, y), (x_1, y) zusammen, von denen das erste zur ersten, das zweite zur zweiten Correspondenz gehört, während die zweite Stelle y in beiden dieselbe ist, so werden wir eine neue Correspondenz erhalten, wenn wir die Stellen x und x_1 entsprechend setzen. Offenbar wird nach Fixirung der Stelle x die Stelle x_1 im Ganzen $\alpha\beta'$ Lagen und nach Fixirung von x_1 die Stelle x im Ganzen $\beta\alpha'$ Lagen annehmen. Sind nun $y', y'', \ldots y^{\alpha}$ die vermöge der ersten Correspondenz zu x gehörigen Lagen von y und $(x_1')^r, (x_1'')^r, \ldots (x_1^{\beta'})^r$ die vermöge der zweiten Correspondenz zu y^r gehörigen Lagen von x_1, so ist

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \gamma \,.\, u_k(x) = \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

$$\sum_{s=1}^{s=\beta'} u_k((x_1^s)^r) + \gamma' u_k(y^r) = \pi_k^r \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots p \\ r = 1, 2, \ldots \alpha \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} \sum_{s=1}^{s=\beta'} u_k(x_1^s)^r - \gamma\gamma' u_k(x) = \Pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p),$$

*) Math. Annalen Bd. 6, pag. 42 oder Bd. 7, pag. 611.

wo π_k, π_k', Π_k von der Stelle x unabhängig sind. Das letztere Gleichungssystem zeigt, dass die Correspondenz (x, x_1) die Werthigkeit $-\gamma\gamma'$ besitzt. Nach Gleichung (9) des vorigen Paragraphen kommt es also

$$(10) \qquad \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma'$$

Mal vor, dass x mit x_1 und also das Paar (x, y) mit (x_1, y) identisch wird.

Betrachten wir n Correspondenzen mit den zugehörigen Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; ... $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, so ergiebt sich auf ähnlichem Wege, dass im Ganzen

$$(11) \quad \alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n + \beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_n + (-1)^{n+1} . 2p\gamma_1 \cdot \gamma_2 \ldots \gamma_n$$

Gruppen von n Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf der Riemann'schen Fläche existiren von der Beschaffenheit, dass die Stellenpaare

$$(x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \ldots (x_{n-1}, x_n),\ (x_n, x_1)$$

der Reihe nach der ersten, zweiten, ... n^{ten} Correspondenz angehören.

Die Formel (10) ist ein specieller Fall von (11). Diese Formeln erleiden, wenn die betrachteten Correspondenzen gewisse Symmetrie-Verhältnisse darbieten, eine in jedem Falle leicht anzugebende Modification.

§ 6.

Darstellung der Correspondenzen von positiver Werthigkeit durch algebraische Gleichungen.

Wenn die Werthigkeit γ eine positive Zahl*) ist, so stellt die Gleichung

$$(12) \qquad F(x, y) = 0,$$

wo $F(x, y)$ das aus ϑ-Functionen gebildete Product (7) bedeutet, die Correspondenz rein dar, wenn von der γ-fachen Lösung $x = y$ dieser Gleichung abgesehen wird. Nun wird $F(x, y)$ als Function von y betrachtet, an den festen Stellen $y = y_0', y_0'', \ldots y_0^{\alpha}$ je einfach, an der Stelle $y = x_0$ γ-fach unendlich. Es ist $F(x, y)$ folglich eine lineare homogene Function von einer bestimmten Zahl $q + 1$ linear unabhängiger algebraischer Functionen

$$f_0(y),\ f_1(y),\ \ldots f_q(y),$$

welche an eben denselben Stellen unendlich werden, wobei die Coefficienten dieser linearen homogenen Function von der Stelle y unabhängig sind. Die Zahl q ist bekanntlich höchstens gleich $\alpha + \gamma - p - \tau$, wo τ angiebt, wie viele linear unabhängige Differentiale erster Gattung

---

*) Die Werthigkeit Null wird hier und in der Folge stets als eine positive angesehen.

an jenen Unendlichkeitsstellen von der zweiten Ordnung unendlich klein werden. Setzen wir in der sich so ergebenden Gleichung

$$F(x,y) = c_0 f_0(y) + c_1 f_1(y) + \cdots + c_q f_q(y)$$

für y $q+1$ verschiedene Stellen $y^\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots q)$, so ergeben sich die Coefficienten c als algebraische Functionen der Stelle x, deren Unendlichkeitsstellen bei $x = x_0', x_0'', \ldots x_0^\beta$ (den der Stelle y_0 correspondirenden Lagen von x) und der γ-fach zu nehmenden Stelle $x = x_0$ liegen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Determinante $|f_\mu(y^\nu)|$ nicht verschwindet, eine Voraussetzung, die durch passende Wahl der Stellen y^ν erfüllt werden kann, da die Functionen $f_\nu(y)$ linear unabhängig sind. Es wird also

$$F(x,y) = \varphi_0(x) f_0(y) + \varphi_1(x) f_1(y) + \cdots \varphi_q(x) f_q(y). \tag{13}$$

Wir dürfen offenbar annehmen, dass auch die Functionen $\varphi_\nu(x)$ linear unabhängig sind, da sich anderenfalls die rechte Seite der vorstehenden Gleichung auf weniger Glieder zusammenziehen lässt. Es ist dann q auch höchstens gleich $\beta + \gamma - p + \tau'$, wo τ' angiebt, wie viele linear unabhängige Differentiale erster Gattung in den Unendlichkeitsstellen der Functionen $\varphi_\nu(x)$ von der zweiten Ordnung verschwinden. Multipliciren wir $F(x,y)$ mit irgend einer Function $\varphi(x)$, welche nur an den Stellen $x_0', \ldots x_0^\beta$ einfach, bei $x = x_0$ γ-fach verschwindet und mit einer Function $f(y)$, welche nur an den Stellen $y_0', \ldots y_0^\alpha$ einfach, bei $y = y_0$ γ-fach verschwindet, so kommt

$$\begin{aligned} \Psi(x,y) &= \varphi(x) \,.\, f(y) \,.\, F(x,y) \\ &= \Phi_0(x) \,.\, F_0(y) + \Phi_1(x) \,.\, F_1(y) + \cdots + \Phi_q(x) \,.\, F_q(y), \end{aligned} \tag{14}$$

wo nun die Functionen Φ_ν bez. F_ν an $\beta + \gamma$ bez. $\alpha + \gamma$ Stellen, welche zu den Unendlichkeitsstellen der Functionen φ_ν und f_ν corresidual sind, unendlich von der ersten Ordnung werden. Da die Gleichung $\Psi = 0$ dieselbe Abhängigkeit zwischen den Stellen x, y, wie die Gleichung $F = 0$ vermittelt, so ist hiermit der Satz bewiesen:

„*Jede Correspondenz mit positiver Werthigkeit lässt sich durch eine Gleichung*

$$\Phi_0(x) \,.\, F_0(y) + \Phi_1(x) \,.\, F_1(y) + \cdots + \Phi_q(x) \,.\, F_q(y) = 0, \tag{15}$$

deren linke Seite eine algebraische Function $\beta + \gamma^{ten}$ Grades der Stelle x und $\alpha + \gamma^{ten}$ Grades der Stelle y ist, vollständig darstellen, in dem Sinne, dass bei Fixirung von x bez. y diese Gleichung, abgesehen von der γ-fachen Lösung $y = x$ bez. $x = y$, nur die der Stelle x bez. y correspondirenden Stellen als Lösungen besitzt".

Wir fügen den ohne Schwierigkeit zu beweisenden Ergänzungssatz hinzu:

„*Diese Darstellung der Correspondenz ist eine vollständig bestimmte, sofern man von solchen Umänderungen der Gleichung* (15) *absieht,*

welche in der Multiplication derselben mit irgend einer Function der Stelle x oder der y allein, oder endlich in simultanen linearen Transformationen der Φ und F, welche die Form $\Phi_0 F_0 + \Phi_1 F_1 + \cdots + \Phi_q F_q$ ungeändert lassen, bestehen".

Es ist also namentlich auch die Zahl q eine ganz bestimmte für die Correspondenz charakteristische Zahl. Wir wollen dieselbe als die „*Dimension*" der Correspondenz bezeichnen*).

§ 7.

Bestimmung der Correspondenzen von gegebener Dimension und gegebener (positiver) Werthigkeit.

Es seien $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots \Phi_q(x)$ irgend $q+1$ linear unabhängige algebraische Functionen der Stelle x. Bestimmen wir nun irgend $q+1$ andere, ebenfalls linear unabhängige Functionen $F_0(y), F_1(y), \ldots \ldots F_q(y)$ der Stelle y, welche nur der Einschränkung unterworfen sind, dass $\sum_{\nu=0}^{\nu=q} \Phi_\nu(x) F_\nu(y)$ als Function von x an der Stelle $x=y$ γ-fach aber nicht von höherer Ordnung verschwindet, so wird die Gleichung

$$\Phi_0(x) F_0(y) + \Phi_1(x) F_1(y) + \cdots + \Phi_q(x) F_q(y) = 0 \tag{16}$$

eine γ-werthige Correspondenz der Dimension q vorstellen, und auf diese Weise werden, zufolge des vorigen Paragraphen, auch alle solche Correspondenzen entstehen. Jene Einschränkung, welcher die Functionen $F(y)$ unterliegen, drückt sich analytisch dahin aus, dass die γ Gleichungen

$$\tag{17} \left\{ \begin{array}{llllll} \Phi_0(y) F_0(y) & + \Phi_1(y) F_1(y) & + \cdots & + \Phi_q(y) F_q(y) & = 0 \\ \Phi_0'(y) F_0(y) & + \Phi_1'(y) F_1(y) & + \cdots & + \Phi_q'(y) F_q(y) & = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \Phi_0^{(\gamma-1)}(y) F_0(y) & + \Phi_1^{(\gamma-1)}(y) F_1(y) & + \cdots & + \Phi_q^{(\gamma-1)}(y) F_q(y) & = 0 \end{array} \right.$$

erfüllt sein müssen, während

$$\Phi_0^{(\gamma)}(y) F_0(y) + \Phi_1^{(\gamma)}(y) F_1(y) + \cdots + \Phi_q^{(\gamma)}(y) F_q(y)$$

nicht mehr verschwindet. Das Zeichen $\Phi_\nu^{(\varrho)}(y)$ bedeutet dabei den ϱ^{ten} Differentialquotienten von $\Phi_\nu(y)$, nach irgend einer Function der Stelle y genommen. Wir folgern aus (17) zunächst, dass die Dimension einer Correspondenz mindestens gleich ihrer Werthigkeit ist. Denn falls $q < \gamma$, muss die Determinante

*) Deutet man die Verhältnisse $\Phi_0(x) : \Phi_1(x) : \cdots : \Phi_q(x)$ und $F_0(y) : F_1(y) : \cdots : F_q(y)$ als Punkt-, bez. Ebenen-Coordinaten in einem Raume von q Dimensionen, so erhält man eine bestimmte geometrische Darstellung der Correspondenz. Eine ähnliche ist in einem Raume von weniger als q Dimensionen nicht möglich.

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(y) & \cdots \Phi_q(y) \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_0^{(q-1)}(y) & \cdots \Phi_q^{(q-1)}(y) \end{vmatrix}$$

verschwinden, was, wie eine nähere Betrachtung zeigt, infolge der linearen Unabhängigkeit von $\Phi_0(y), \ldots \Phi_q(y)$ nicht angeht.

Eliminiren wir aus (17) und (16) die Functionen $F_q(y), F_{q-1}(y), \ldots$ $\ldots F_{q-\gamma+1}(y)$, so ergiebt sich, *dass durch die Gleichung*

$$(18) \qquad \sum_{s=0}^{s=q-\gamma} F_s(y) \cdot \begin{vmatrix} \Phi_s(x), & \Phi_{q-\gamma+1}(x), \ldots & \Phi_q(x) \\ \Phi_s(y), & \Phi_{q-\gamma+1}(y), \ldots & \Phi_q(y) \\ \Phi_s'(y), & \Phi_{q-\gamma+2}'(y), \ldots & \Phi_q'(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_s^{(\gamma-1)}(y), & \Phi_{q-\gamma+1}^{(\gamma-1)}(y), \ldots & \Phi_q^{(\gamma-1)}(y) \end{vmatrix} = 0$$

die allgemeinste Correspondenz mit der Werthigkeit γ und der Dimension q definirt wird, wenn

1) $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots \Phi_q(x)$ *beliebige linear unabhängige algebraische Functionen der Stelle x bedeuten und*

2) *die $q-\gamma+1$ ebenfalls algebraischen Functionen $F_0(y), F_1(y), \ldots$ $\ldots F_{q-\gamma}(y)$ der Stelle y so gewählt werden, dass die Gleichung* (18) *nicht identisch erfüllt ist, wenn $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots \Phi_q(x)$ durch $\Phi_0^{(\gamma)}(y), \Phi_1^{(\gamma)}(y), \ldots$ $\ldots \Phi_q^{(\gamma)}(y)$ oder durch nicht sämmtlich verschwindende Constanten $c_0, c_1, \ldots$ $\ldots c_q$ ersetzt werden.*

Die Functionen $F(y)$ können aber stets, nach willkürlicher Annahme der $\Phi(x)$, diesen Bedingungen gemäss gewählt werden, *so dass es immer Correspondenzen von der Werthigkeit γ und einer beliebigen Dimension $q \geqq \gamma$ giebt.*

Zum Beweise betrachten wir die in (18) auftretenden Determinanten für den Fall, dass die Functionen $\Phi_\nu(x)$ durch $\Phi_\nu^{(\gamma)}(y)$ oder durch nicht sämmtlich verschwindende Constanten c_ν ersetzt werden. Weder die bei der ersten, noch die bei der zweiten Ersetzung entstehenden Determinanten (D) können sämmtlich identisch verschwinden.

Die gegentheilige Annahme würde nämlich zu der Folgerung führen, dass die Functionen $\Phi_0(x), \ldots \Phi_q(x)$, entgegen unserer Voraussetzung, nicht linear unabhängig sind. Dieses vorausgeschickt, wählen wir nun die Functionen $F_0(y), \ldots F_{q-\gamma}(y)$ so, dass keine zwei dieser Functionen an derselben Stelle unendlich werden und dass ihre Grade grösser sind, als die Grade der Determinanten D. Alsdann sind, wie leicht zu sehen, die Bedingungen 2) sicher erfüllt.

Ein besonderes Interesse verdient der Fall, in welchem Dimension und Werthigkeit der Correspondenz einander gleich sind. Auf diesen speciellen Fall beziehen sich die Betrachtungen des Herrn Lindemann, welche in einem Briefe an Herrn Hermite und in den Vorlesungen

über Geometrie von Clebsch*) mitgetheilt sind; auch gehören hierher die von Herrn Brill im 4. Bande der Mathemat. Annalen pag. 527 ff. gegebenen Entwickelungen über die eine algebraische Curve mehrfach berührenden Curven einer linearen Curvenschaar. Die Gleichung (18) reducirt sich für $q = \gamma$ auf

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \Phi_0(x), & \Phi_1(x), & \cdots \Phi_\gamma(x) \\ \Phi_0(y), & \Phi_1(y), & \cdots \Phi_\gamma(y) \\ \Phi_0'(y), & \Phi_1'(y), & \cdots \Phi_\gamma'(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_0^{(\gamma-1)}(y), & \Phi_1^{(\gamma-1)}(y), & \cdots \Phi_q^{(\gamma-1)}(y) \end{vmatrix} = 0,$$

so dass die Correspondenz schon durch die Wahl der Functionen $\Phi(x)$ vollständig bestimmt ist. — Weitere sich an die Resultate dieses Paragraphen anknüpfende Entwickelungen liegen ausserhalb des Rahmens gegenwärtiger Mittheilung.

§ 8.

Darstellung der Correspondenzen mit positiver Werthigkeit auf Curven vom Geschlechte p.

Wir bezeichnen nun mit

$$\eta(x) = \frac{x_1}{x_3}, \qquad \xi(x) = \frac{x_2}{x_3}$$

zwei algebraische Functionen der Stelle x der Riemann'schen Fläche, durch welche sich alle übrigen rational ausdrücken lassen. Zwischen diesen Functionen η, ξ besteht eine algebraische Gleichung vom Geschlechte p, welche in der Form

$$(20) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dargestellt werden kann und bei Auffassung der Verhältnisse $x_1:x_2:x_3$ als Dreieckscoordinaten eine ebene Curve vom Geschlechte p vorstellt. In der irgend eine positiv-werthige Correspondenz definirenden Gleichung (15) lassen sich nun die Functionen $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... $\Phi_q(x)$ in die Gestalt setzen:

$$(21) \qquad \Phi_0(x) = \frac{\Phi_0(x_1, x_2, x_3)}{\Phi(x_1, x_2, x_3)}, \ \ldots \ \Phi_q(x) = \frac{\Phi_q(x_1, x_2, x_3)}{\Phi(x_1, x_2, x_3)},$$

wo die Gleichung $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine Curve vorstellt, welche durch die Unendlichkeitspunkte der Functionen $\Phi_\nu(x)$ und eventuell durch weitere feste Punkte hindurchläuft, welche auf allen Curven $\Phi_\nu(x_1, x_2, x_3) = 0$

*) Crelle's Journal, Bd. 84, pag. 300—304; Vorlesungen über Geometrie, l. c.; siehe auch Bd. III, pag. 76 ff. der französichen Uebersetzung dieses Werkes von Benoist, wo Herr Lindemann die Darstellung etwas modificirt hat.

liegen. In entsprechender Weise lassen sich die Functionen $F_\nu(y)$ darstellen; es sei etwa

$$(22)\qquad F_0(y) = \frac{F_0(y_1, y_2, \eta_3)}{F(y_1, y_2, y_3)}, \ldots F_q(y) = \frac{F_q(y_1, y_2, y_3)}{F(y_1, y_2, y_3)}.$$

Die Gleichung (15) geht nun, wenn wir den Nenner $\Phi(x_1, x_2, x_3) \cdot F(y_1, y_2, y_3)$ unterdrücken, über in:

$$(23)\quad \Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q} \Phi_\nu(x_1, x_2, x_3) \cdot F_\nu(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

womit der folgende Satz bewiesen ist:

„*Jede auf einer algebraischen Curve*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

existirende algebraische Correspondenz mit positiver Werthigkeit lässt sich durch eine einzige Gleichung

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$$

definiren. Bedeuten nämlich y_1, y_2, y_3 (*bez.* x_1, x_2, x_3) *die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve* f, *während* x_1, x_2, x_3, (*bez.* y_1, y_2, y_3) *laufende Coordinaten bezeichnen, so stellt die Gleichung* $\Psi = 0$ *eine Curve vor, welche die Curve* f γ-*fach in dem Punkte* y_1, y_2, y_3 (*bez.* x_1, x_2, x_3) *je einfach in den diesem Punkte correspondirenden Punkten und überdies eventuell in festen Punkten durchschneidet*".

Dieser Satz lässt sich sofort auf algebraische Curven, welche in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen liegen, übertragen. Auch für solche Curven lässt sich bei ev. Hinzunahme von festen Punkten jede Correspondenz mit positiver Werthigkeit durch eine einzige Gleichung definiren.

§ 9.

Darstellung der Correspondenzen mit negativer Werthigkeit durch algebraische Gleichungen.

Wir wollen die Correspondenz C'' aus den beiden Correspondenzen C und C' zusammengesetzt nennen, wenn sie durch die Angabe definirt ist, dass jeder Stelle x gleichzeitig diejenigen Stellen entsprechen sollen, welche ihr in C und C' correspondiren.

Besitzen die Correspondenzen C und C' die Werthigkeiten γ und γ', so ist die aus ihnen zusammengesetzte Correspondenz C'' eine Correspondenz mit der Werthigkeit $\gamma + \gamma'$, wie aus der Addition der zu den Correspondenzen C und C' gehörenden Gleichungen (5) hervorgeht. Es sei nun C' eine Correspondenz mit der negativen Werthigkeit

$$\gamma' = -\delta,$$

und C irgend eine Correspondenz mit einer positiven Werthigkeit $\gamma \geqq \delta$; es wird dann C'' die positive Werthigkeit $\gamma - \delta$ besitzen. Sind nun

$$\Psi\,(x, y) = 0$$

$$\Psi_2(x, y) = 0$$

die Gleichungen, welche die positiv-werthigen Correspondenzen C und C'' darstellen, so wird die Gleichung

$$\frac{\Psi_2(x, y)}{\Psi\,(x, y)} = 0 \tag{24}$$

die Correspondenz C' mit der negativen Werthigkeit $-\delta$ definiren. Nach den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen wird also z. B. jede solche Correspondenz auf einer ebenen Curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

durch eine Gleichung der Form

$$\frac{\Psi_2(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)}{\Psi\,(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)} = 0\text{*)} \tag{25}$$

dargestellt werden können, wobei Ψ_2 und Ψ ganze homogene Functionen sowohl von x_1, x_2, x_3 wie von y_1, y_2, y_3 bedeuten, und wo die Gleichung $\Psi = 0$ eine beliebig zu wählende Correspondenz, deren Werthigkeit mindestens gleich δ ist, vorstellt. Beispielsweise kann

$$\Psi = (x_1 y_3 - x_3 y_1)^\delta$$

gesetzt werden, und es wird dann $\Psi_2 = 0$ eine (leicht geometrisch zu definirende) Correspondenz mit der Werthigkeit 0 werden.

Die Division von Ψ in Ψ_2 ist aber nicht ausführbar, da eine Gleichung, deren linke Seite eine *ganze* homogene Function von x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 ist, stets eine Correspondenz mit *positiver* Werthigkeit definirt.

Setzen wir, wie soeben, die Correspondenz C' mit C zu der positiv-werthigen Correspondenz C'' und mit einer anderen Correspondenz K zu der positiv-werthigen Correspondenz K' zusammen, so werden die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}\Psi_1(x, y) = 0,\\ \Psi_2(x, y) = 0,\end{array}\right. \tag{26}$$

von denen die erste die Correspondenz K', die zweite die Correspondenz C'' definirt, zusammengenommen die Correspondenz C' darstellen, da je zwei Stellen, welche gleichzeitig in K' und C'' einander entsprechen, auch vermöge der Correspondenz C' correspondirende Stellen sind.

*) Durch solche Gleichungen definirte Correspondenzen betrachtet gelegentlich Herr Lindemann. (Vorlesungen Bd. II, pag. 747, wo gezeigt wird, dass auf diese Correspondenzen die Formel (10) Anwendung findet).

Berücksichtigen wir das Resultat des vorigen Paragraphen, so erhalten wir den Satz:

„Jede auf einer algebraischen Curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

existirende Correspondenz mit negativer Werthigkeit lässt sich zwar nicht durch eine einzige Gleichung, wohl aber auf mannigfaltige Weise durch zwei Gleichungen der Form

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0 \\ \Psi_2(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0 \end{cases}$$

definiren. Bedeuten nämlich y_1, y_2, y_3 (bez. x_1, x_2, x_3) die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve f, während x_1, x_2, x_3 (bez. y_1, y_2, y_3) laufende Coordinaten bezeichnen, so stellen die Gleichungen $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ zwei Curven vor, welche sich auf der Curve f ausser (eventuell) in dem Punkte y_1, y_2, y_3 (bez. x_1, x_2, x_3) nur noch in den diesem Punkte correspondirenden Punkten und (eventuell) in festen Punkten durchschneiden".

Dieser Satz lässt sich auch auf Curven, welche in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen liegen, übertragen; stets werden zwei Gleichungen, welche noch auf unendlich viele verschiedene Weisen gewählt werden können, zur Definition der Correspondenz ausreichen.

§ 10.

Die allgemeine Correspondenzformel.

Es erübrigt noch, die singulären Correspondenzen einer näheren Untersuchung zu unterziehen. Die erforderlichen Entwicklungen lassen sich dabei zumeist so darstellen, dass sie für alle algebraischen Correspondenzen, gleichviel ob sie Werthigkeits- oder singuläre Correspondenzen sind, Gültigkeit haben. Es soll daher, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, über die Natur der in der Folge betrachteten Correspondenzen und der sie tragenden Riemann'schen Fläche keine besondere Voraussetzung gemacht werden.

Vermöge irgend einer Correspondenz mögen der Stelle x die Lagen $y', y'', \ldots, y^\alpha$ von y entsprechen; ferner seien $y_0', y_0'', \ldots, y_0^\alpha$ die einer festen Stelle x_0 correspondirenden Lagen von y und endlich bezeichne y_0 irgend eine feste Stelle. Alsdann wird die Function:

$$(27) \qquad C(x) = \prod_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\vartheta\,[u_i(x) - u_i(y^r) - c_i]}{\vartheta\,[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i]\;\vartheta\,[u_i(x) - u_i(y^r) - c_i]}$$

auf der in eine einfach zusammenhängende zerschnittenen Fläche so oft Null, als die Stelle x mit einer correspondirenden Stelle y^r zu-

sammenfällt, also C-mal, wenn C die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz bezeichnet; dieselbe Function wird an den der Stelle x correspondirenden Stellen $y_0', \ldots, y_0^\alpha$ und an den β Stellen, welche der Stelle y_0 entsprechen, je einfach unendlich.

Es ist folglich:

$$C - \alpha - \beta = \frac{1}{2\pi i}\int d \log C(x), \tag{28}$$

wo das Integral in positivem Sinne durch die Begrenzung der zerschnittenen Fläche zu erstrecken ist*). Andererseits ist dieses Integral gleich

$$\sum_k \left(\int\limits_{a_k} d \log \frac{C^+}{C^-} + \int\limits_{b_k} d \log \frac{C^+}{C^-}\right),$$

wenn die Einzelintegrale längs der Riemann'schen Schnitte a_k, b_k genommen werden und C^+, C^- die Werthe von $C(x)$ auf der positiven bez. negativen Seite des betreffenden Schnittes bedeuten. Infolge der Relationen (1), (2), (3) des ersten Paragraphen ergiebt sich für die letztere Summe der Werth:

$$-(h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp}),$$

so dass wir *für die Zahl C der Coincidenzen der allgemeinsten überhaupt möglichen algebraischen Correspondenz die Formel erhalten:*

$$C = \alpha + \beta - (h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp}). \tag{29}$$

Ist die Correspondenz eine Werthigkeitscorrespondenz, so werden (cf. § 2) die Zahlen h_{ii}, G_{ii} sämmtlich untereinander gleich und die Formel (29) geht, wenn der gemeinsame Werth dieser Zahlen gleich $-\gamma$ gesetzt wird, in

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma$$

über, wie es nach § 4 sein muss.

Die Zahl der Stellenpaare x, y, welche sich gleichzeitig in zwei beliebigen Correspondenzen entsprechen, ergiebt sich auf folgendem Wege. Es seien $y', y'', \ldots, y^\alpha$ die vermöge der ersten Correspondenz der Stelle x entsprechenden Lagen von y und $x'^{,r}, x''^{,r}, \ldots, x^{\beta'r}$ die vermöge der zweiten Correspondenz der Stelle y^r entsprechenden Lagen von x. Dann bestehen nach § 1 die folgenden Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k, \\ &\sum_{s=1}^{s=\beta'} u_k(x^{s,r}) = \sum_i \pi'_{ki} u_i(y^r) + \pi'_k, \quad (r = 1, 2, \cdots, \alpha), \end{aligned}\right. \tag{30}$$

---

*) In Betreff solcher „Begrenzungsintegrale" verweise ich auf die Riemann'sche Abhandlung über Abel'sche Functionen, sowie auf den Aufsatz von Roch, „Ueber ϑ-Functionen vielfacher Argumente" in Crelle's Journal, Bd. 66.

wobei

$$
(31)\quad \begin{cases}
\pi_{kl} = h_{kl} + \sum\limits_i g_{il}\, a_{ki}, \\
\sum\limits_i \pi_{ki}\, a_{il} = H_{kl} + \sum\limits_i G_{il}\, a_{ki}, \\
\pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum\limits_i g'_{il}\, a_{ki}, \\
\sum\limits_i \pi'_{ki}\, a_{il} = H'_{kl} + \sum\limits_i G'_{il}\, a_{ki},
\end{cases}
$$

unter den Zeichen h, g, H, G, h', g', H', G' ganze Zahlen verstanden.

Die Elimination der Integrale $u_i(y^r)$ aus den Gleichungen (30) ergiebt Relationen der Gestalt:

$$
(32)\quad \sum_{r,s} u_k(x^{s,r}) = \sum_i \pi''_{ki}\, u_i(x) + \pi''_k,
$$

wo zur Abkürzung

$$
\pi''_{kl} = \sum_i \pi'_{ki}\, \pi_{il}
$$

gesetzt ist. Eine kurze Rechnung zeigt, dass für die Grössen π''_{kl} die Relationen

$$
(33)\quad \begin{cases}
\pi''_{kl} = h''_{kl} + \sum\limits_i g''_{il}\, a_{ki} \\
\sum\limits_i \pi''_{ki}\, a_{il} = H''_{kl} + \sum\limits_i G''_{il}\, a_{ki}
\end{cases}
$$

aufgestellt werden können, wenn unter h'', g'', H'', G'' die Zahlen:

$$
(34)\quad \begin{cases}
h''_{kl} = \sum\limits_i (h_{il}\, h'_{ki} + g_{il}\, H'_{ki}), \\
g''_{kl} = \sum\limits_i (h_{il}\, g'_{ki} + g_{il}\, G'_{ki}), \\
H''_{kl} = \sum\limits_i (H_{il} h'_{ki} + G_{il}\, H'_{ki}), \\
G''_{kl} = \sum\limits_i (H_{il}\, g'_{ki} + G_{il}\, G'_{ki})
\end{cases}
$$

verstanden werden. Die Anwendung der Formel (29) auf die Correspondenz, welche durch die Zuordnung der Stellen $x^{r,s}$ zur Stelle x definirt ist, ergiebt nun für die Zahl (C, C') der Coincidenzen dieser Correspondenz den Ausdruck:

$$(C, C') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - (h''_{11} + h''_{22} + \cdots + h''_{pp} + G''_{11} + G''_{22} + \cdots + G''_{pp}),$$

oder, mit Rücksicht auf (34):

$$(35) \qquad (C, C') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \sum_{i,k} [h_{ik} h'_{ki} + g_{ik} H'_{ki} + H_{ik} g'_{ki} + G_{ik} G'_{ki}],$$

und diese Zahl wird offenbar angeben, wie viele Stellenpaare x, y gleichzeitig beiden Correspondenzen angehören).*

Unter der Voraussetzung, dass beide Correspondenzen Werthigkeitscorrespondenzen sind, geht die Formel (35) in die Formel (10) des § 5 über.

§ 11.

Existenz der singulären Correspondenzen.

Es sei irgend ein Lösungssystem der $2p^2$ Gleichungen:

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_i g_{il}\, a_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki}\, a_{il} &= H_{kl} + \sum_i G_{il}\, a_{ki} \end{aligned} \right.$$

gegeben. Dann werden durch den Ansatz:

$$(37) \qquad u_k(y') + u_k(y'') + \cdots + u_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k$$

jeder Stelle x p bestimmte Stellen $y', y'', \ldots, y^p$ zugeordnet, wenn die Constanten π_k, was stets möglich ist, so gewählt werden, dass nicht für alle Lagen von x das auf der rechten Seite in (37) auftretende Grössensystem auf mehr als eine Weise in die durch (37) verlangte Form gesetzt werden kann. Durch diesen Ansatz ist also eine algebraische Correspondenz bestimmt, für welche die oben mit α be-

*) Bei der Anwendung dieser und ähnlicher Formeln ist der folgende Satz von Nutzen: Werden für irgend eine Correspondenz die in § 1 benutzten Bezeichnungen verwendet und bedeuten $x', x'', \ldots, x^\beta$ die vermöge der Correspondenz einer Stelle y entsprechenden Lagen von x, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=\beta} u_k(x^{s}) = \sum_i \bar{\pi}_{ki} u_i(y) + \bar{\pi}_k,$$

wobei

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\pi}_{kl} &= G_{lk} - \sum_i g_{li}\, a_{ki}, \\ \sum_i \bar{\pi}_{ki}\, a_{il} &= -H_{lk} + \sum_i h_{li}\, a_{ki}. \end{aligned} \right.$$

zeichnete Zahl den Werth p besitzt. In transcendenter Form lässt sich diese Correspondenz durch die eine Gleichung*)

$$(38)\qquad \vartheta\left[u_k(y)-\sum_i \pi_{ki}u_i(x)-c_k\right]=0$$

definiren, unter c_k passend gewählte Constanten verstanden.

Die Zahl der einer beliebigen Stelle y entsprechenden Lagen von x ist, beiläufig bemerkt, durch das Begrenzungsintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log\vartheta\left[u_k(y)-\sum_i \pi_{ki}u_i(x)-c_k\right]$$

bestimmt und findet sich, infolge der Gleichungen (36), gleich

$$(39)\qquad \sum_{i,k}(G_{ik}h_{ik}-g_{ik}H_{ik}).$$

Wenn nun die Riemann'sche Fläche, welche unserer Betrachtung zu Grunde liegt, eine singuläre ist, so dürfen wir annehmen, dass die Elimination der π_{kl} aus dem Systeme (36) nicht zu lauter Identitäten zwischen den Grössen a_{ik} führt, oder, wie wir kurz sagen wollen, dass das System (36) kein „identisches" ist. Alsdann ist aber die durch (37) definirte Correspondenz sicher keine Werthigkeitscorrespondenz. Die gegentheilige Annahme würde nämlich zu den Gleichungen

$$\sum_i \pi_{ki}u_i(x)=\gamma\cdot u_k(x)+\bar{\pi}_k,$$

und also, indem wir auf beiden Seiten die Perioden nehmen, zu

$$h_{kl}+\Sigma g_{il}\,a_{ki}=\begin{cases}0, & \text{für } k\gtrless l\\ \gamma, & \text{für } k=l\end{cases}$$

$$H_{kl}+\Sigma G_{il}\,a_{ki}=\gamma\cdot a_{kl}$$

führen. Aus den letzteren Gleichungen würde aber folgen, dass $h_{11}=h_{22}=\cdots=G_{11}=G_{22}=\cdots=\gamma$ und alle übrigen Zahlen h, g, H, G gleich Null sind, und somit würde das System (36), entgegen unserer Annahme, ein „identisches" sein.

Auf jeder singulären Riemann'schen Fläche existiren also auch singuläre Correspondenzen.

Wir können hinzufügen, dass es stets unendlich viele singuläre Correspondenzen von der eben betrachteten Art giebt.

**) Durch derartige Gleichungen definirte *Werthigkeits*correspondenzen betrachtet Herr Lindemann in der Note „Ueber eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale" (Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. Bd. 7. Heft 3; siehe pag. 288 u. 290).

Es mögen nämlich δ und γ irgend zwei ganze Zahlen bezeichnen, so bestehen zufolge (36) die Relationen

$$(40) \quad \begin{cases} \pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum_i g'_{il} a_{ki}, \\ \sum_i \pi'_{ki} a_{il} = H'_{kl} + \sum_i G'_{il} a_{ki}, \end{cases}$$

wenn

$$\pi'_{kl} = \delta \pi_{kl} - \gamma \varepsilon_{kl}, \quad h'_{kl} = \delta h_{kl} - \gamma \varepsilon_{kl}, \quad g'_{kl} = \delta g_{kl}, \quad H'_{kl} = \delta H_{kl},$$
$$G'_{kl} = \delta G_{kl} - \gamma \varepsilon_{kl}$$

gesetzt wird, wobei ε_{kl} den Werth 0 oder 1 bedeutet, je nachdem $k \gtrless l$ oder $k = l$ ist.

Zu dem Systeme (40) gehört nun in derselben Weise eine singuläre Correspondenz, wie die Correspondenz (38) zu dem Systeme (36). Die Zahlen α, β haben für diese neue Correspondenz die Werthe

$$\alpha = p, \quad \beta = \sum_{i,k} (G'_{ik} h'_{ik} - g'_{ik} H'_{ik}) \quad \text{(cf. 39)},$$

oder

$$\beta = \delta^2 \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}) - \gamma \delta \sum_k (h_{kk} + G_{kk}) + p \gamma^2.$$

Da letzterer Ausdruck, seiner Bedeutung gemäss, für alle ganzzahligen Werthe von γ, δ einen positiven Werth besitzen muss (abgesehen von dem Falle $\gamma = \delta = 0$), so sind die Zahlen g, h, G, H der Bedingung

$$4p \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}) > \Big[\sum_k (h_{kk} + G_{kk})\Big]^2$$

unterworfen.

§ 12.

Darstellung der singulären Correspondenzen durch algebraische Gleichungen.

Betrachten wir irgend eine Correspondenz, so gehören zu derselben p Gleichungen der Gestalt:

$$(41) \quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k,$$

wo wie früher die der Stelle x entsprechenden Lagen von y mit y', y'', . . ., y^α bezeichnet sind. Wir definiren nun, wie im vorhergehenden Paragraphen, zwei weitere Correspondenzen durch die Ansätze:

$$(42)\qquad \sum_n u_k(y_1{}^n) = -\sum_i \pi_{ki} u_i(x) - \gamma_1 u_k(x) + \pi'_k,$$

$$(43)\qquad \sum_n u_k(y_2{}^n) = -\sum_i \pi_{ki} u_i(x) - \gamma_2 u_k(x) + \pi''_k.$$

Hier bedeuten γ_1, γ_2 irgend zwei positive Zahlen, welche wir nach Willkür annehmen; die Constanten π'_k, π''_k wählen wir, was in mannigfacher Weise geschehen kann, so, dass nicht für jede Lage von x unter den Stellen y_1', y_1'', $\ldots$, $y_1{}^p$ sich solche finden, welche gleichzeitig unter den Stellen y_2', y_2'', $\ldots$, $y_2{}^p$ vorkommen.

Die Addition der Gleichungen (41) und (42), sowie von (41) und (43) ergiebt nun:

$$(44)\qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \sum_n u_k(y_1{}^n) + \gamma_1 u_k(x) = \pi_k + \pi'_k,$$

$$(45)\qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \sum_n u_k(y_2{}^n) + \gamma_2 u_k(x) = \pi_k + \pi''_k.$$

Es werden hiernach durch die Angabe, dass der Stelle x die Lagen y^r und $y_1{}^n$, bezüglich die Lagen y^r und $y_2{}^n$ von y entsprechen sollen, Correspondenzen mit den positiven Werthigkeiten γ_1 und γ_2 definirt und diese können nach den früheren Entwickelungen durch je eine algebraische Gleichung dargestellt werden. Damit ist bewiesen:

„*Jede algebraische Correspondenz, insbesondere auch jede singuläre Correspondenz, lässt sich auf mannigfaltige Art durch zwei algebraische Gleichungen*

$$\Psi_1(x, y) = 0$$
$$\Psi_2(x, y) = 0$$

definiren“.

Es gilt daher der in § 9 besonders hervorgehobene Satz nicht nur für die negativ-werthigen, sondern auch für die singulären Correspondenzen.

§ 13.

Ueber die Gesammtheit der auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche existirenden Correspondenzen.

Es seien μ verschiedene Lösungen des Systems (36) bekannt:

$$(46)\qquad \begin{cases} \pi^s_{ki} = h^s_{ki} + \sum_i g^s_{ii}\, a_{ki}, \\ \sum_i \pi^s_{ki} a_{ii} = H^s_{ki} + \sum_i G^s_{ii}\, a_{ki}, \end{cases} \qquad (s = 1, 2, \cdots, \mu),$$

wobei der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass unter diesen μ Systemen „identische", d. h. solche vorkommen, bei welchen die Elimination der π_{kl}^{ε} auf lauter Identitäten zwischen den a_{ki} führen.

Wir nennen diese μ Systeme *abhängig*, wenn es möglich ist, die Gleichungen:

$$(47) \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} = 0, \quad (k, l = 1, 2, \cdots, p)$$

durch nicht sämmtlich verschwindende ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ zu befriedigen; im entgegengesetzten Falle heissen die Systeme (46) unabhängig. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichungen (47) drückt sich durch die $2p^2$ Relationen:

$$(48) \qquad \begin{cases} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon h_{kl}^{\varepsilon} = 0 \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon g_{kl}^{\varepsilon} = 0 \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \cdots, p)$$

aus, woraus hervorgeht, dass nicht mehr als $2p^2$ unabhängige Systeme (46) existiren können. Wir nehmen an, dass die μ Systeme (46) unabhängig sind und dass es nicht mehr als μ unabhängige Systeme giebt. Ist dann irgend ein weiteres System (36) gegeben, so können die p^2 Gleichungen

$$(49) \qquad \lambda \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} \quad (k, l = 1, 2, \cdots, p)$$

durch ganze Zahlen $\lambda, \lambda_\varepsilon$, welche nicht sämmtlich verschwinden, befriedigt werden, und es wird λ von Null verschieden sein, da widrigenfalls die μ Systeme (46) abhängig sein würden.

Es lassen sich aber, wie eine eingehendere Betrachtung zeigt, die μ Systeme stets so wählen, dass die Zahl λ den Werth 1 erhält, und wir haben dann für jedes System (36) die Darstellung:

$$(50) \qquad \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon}, \quad (k, l = 1, 2, \cdots, p),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ ganze Zahlen bezeichnen.

Die μ Systeme π_{kl}^{ε}, aus welchen sich jedes andere nach der vorstehenden Formel ganzzahlig zusammensetzen lässt, mögen als μ „Fundamentalsysteme" bezeichnet werden. Ferner sollen die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ die „Charaktere" des Systems π_{kl}, und jeder Correspondenz, zu welcher dieses System gehört, heissen. Die Charaktere sind nach Annahme der μ Fundamentalsysteme eindeutig bestimmt.

Für eine beliebige Correspondenz möge das Gleichungssystem

$$(51)\qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k$$

stattfinden. Setzen wir nun

$$(52)\quad C(x,y) = \prod_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\vartheta[u_k(y) - u_k(y^r) - c_k]}{\vartheta[u_k(y_0) - u_k(y^r) - c_k]\,\vartheta[u_k(y) - u_k(y_0{}^r) - c_k]},$$

so wird die Gleichung:

$$(53)\qquad C(x,y) = 0$$

unsere Correspondenz zwar in transcendenter Form, aber vollständig darstellen, indem die Gleichung (53) *nur* für correspondirende Stellen (x, y) erfüllt ist.

Wir bilden jetzt mit den μ Fundamentalsystemen π^s_{ki} die μ ϑ-Quotienten:

$$(54)\quad C_s(x,y) = \frac{\vartheta\left[u_k(y) - \sum_i \pi^s_{ki} u_i(x) - c_k\right]}{\vartheta\left[u_k(y_0) - \sum_i \pi^s_{ki} u_i(x) - c_k\right]\,\vartheta\left[u_k(y) - \sum_i \pi^s_{ki} u_i(x_0) - c_k\right]},$$

wo s der Reihe nach die Werthe $1, 2, \ldots, \mu$ erhält.

Zufolge (50) und (51) ist nun der Quotient aus $C(x, y)$ und $\prod_{s=1}^{s=\mu} [C_s(x,y)]^{\lambda_s}$ eine *algebraische* Function $F(x, y)$ der Stellen x und y, und also:

$$(55)\quad C(x,y) = [C_1(x,y)]^{\lambda_1}\,[C_2(x,y)]^{\lambda_2} \ldots [C_\mu(x,y)]^{\lambda_\mu} \cdot F(x,y).$$

Hiermit ist die Bestimmung aller auf einer beliebigen Fläche existirenden algebraischen Correspondenzen ausgeführt:

„Man bestimme μ „Fundamentalsysteme“ (46), *aus welchen sich jedes andere System gemäss* (50) *ganzzahlig zusammensetzen lässt. Ferner bilde man mit den μ Fundamentalsystemen die ϑ-Quotienten $C_s(x, y)$ nach Gleichung* (54).

Alsdann wird die Gleichung:

$$(56)\qquad [C_1(x,y)]^{\lambda_1}\,[C_2(x,y)]^{\lambda_2} \ldots [C_\mu(x,y)]^{\lambda_\mu} F(x,y) = 0,$$

in welcher $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ irgend welche ganze Zahlen und $F(x, y)$ irgend eine von den beiden Stellen x, y algebraisch abhängende Function bedeuten, alle auf der Fläche möglichen algebraischen Correspondenzen definiren.“

Da ein Ausdruck der Form

$$[C_1(x,y)]^{\varrho_1}\,[C_2(x,y)]^{\varrho_2} \ldots [C_\mu(x,y)]^{\varrho_\mu}$$

nur dann eine algebraische Function der Stellen x, y sein kann, wenn die Zahlen ϱ sämmtlich verschwinden, so kann zur Darstellung *aller* Correspondenzen keine der μ Functionen $C_s(x, y)$ entbehrt werden.

Für nicht-singuläre Riemann'sche Flächen hat die Zahl μ den Werth 1, denn alle Systeme (36) lassen sich ganzzahlig aus dem *einen*, in welchem $\pi_{11} = \pi_{22} = \cdots = \pi_{pp} = 1$ und alle übrigen $\pi_{ki} = 0$ sind, zusammensetzen. Das System der Charaktere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ einer Correspondenz reducirt sich auf die eine Zahl $\lambda_1 = -\gamma$, wo γ die Werthigkeit bezeichnet, und die Formel (55) geht in (7) über.

Für singuläre Flächen ist dagegen die Zahl μ stets grösser als 1 und das System der Charaktere einer Correspondenz besteht aus mehreren Zahlen.

Setzen wir in (55) $y = x$ und vergleichen die Zahl der Null- und Unendlichkeitsstellen der auf beiden Seiten entstehenden Functionen der Stelle x, so erhalten wir

(57) $$C = \alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_\mu\lambda_\mu$$

wenn C die Anzahl der Coincidenzen der beliebigen Correspondenz $C(x, y) = 0$, α und β die Zahl der einer beliebigen Stelle x bez. y entsprechenden Lagen von y bez. x bedeuten. Die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ sind ganze Zahlen, welche von der betrachteten Correspondenz unabhängig sind. In dieser Gleichung (57) haben wir die allgemeine Correspondenzformel in einer neuen Gestalt vor uns.

§ 14.

Litterarisches über die singulären Riemann'schen Flächen.

Die im vorstehenden Paragraphen gegebene Darstellung der Correspondenzen habe ich für die von Herrn Klein in die Theorie der elliptischen Modulfunctionen eingeführten „Modularcorrespondenzen"*) (wenigstens für den Fall einer primzahligen „Stufe") in einer in den Berichten der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften abgedruckten Note**) hergestellt. Jedoch sind an jener Stelle die transcendenten Factoren $C_1(x, y), \ldots, C_\mu(x, y)$ nicht auf ihre geringste Zahl zurückgeführt, da dieses für die dort verfolgten Zwecke nicht erforderlich war. Die „Charaktere" λ_i der Modularcorrespondenzen sind die Entwicklungscoefficienten der Integrale erster Gattung q^{ter} Stufe, und da die Zahl dieser Coefficienten im Allgemeinen grösser als 1 ist, so folgt, dass alle diese Correspondenzen singulär sind. In diesem Umstande lag die Schwierigkeit begründet, welche sich bei der Aufstellung der Classenzahlrelationen für höhere Fälle einstellte. Diese Relationen konnten nicht mehr aus der speciellen Formel $C = \alpha + \beta + 2p\gamma$,

---

*) Sitzungsberichte der Münchener Academie vom 6. Dec. 1879 oder Mathem. Annalen, Bd. 17 pag. 63 ff.

**) Mathematisch-physische Classe, Sitzung vom 4. Mai 1885. Die hier in Betracht kommenden Formeln finden sich auf pag. 233; die Functionen $F(\omega', \omega)$ entsprechen den im Texte mit $C(x, y)$ bezeichneten Functionen.

sondern mussten aus der allgemeinen Correspondenzformel (57) entnommen werden. Diese letztere geht für die Modularcorrespondenzen geradezu in die Classenzahlrelationen über, falls die Zahl C durch die auf arithmetischem Wege abgezählten Coincidenzen ersetzt wird.

Die Modularcorrespondenzen liegen auf denjenigen Riemann'schen Flächen, welche zu der Galois'schen Resolvente der Modulargleichungen gehören. Diese Flächen charakterisiren sich schon dadurch als singuläre, dass sie eindeutige Transformationen in sich besitzen. Es gilt nämlich der Satz:

„Jede Riemann'sche Fläche, welche eine eindeutige Transformation in sich besitzt, ist entweder eine „hyperelliptische“ oder eine singuläre Fläche“.

Ist nämlich die eindeutige Transformation als Correspondenz betrachtet eine Werthigkeitscorrespondenz, so existirt nach unseren Entwicklungen eine zweiwerthige Function der Stelle x und die Fläche ist also hyperelliptisch; nach Ausschluss dieses Falles bleibt nur noch die Möglichkeit, dass die Fläche eine singuläre ist*).

Schliesslich verweise ich noch in Betreff der singulären Riemann'schen Flächen auf die Untersuchungen der Herren Kronecker, Weber, Frobenius, Wiltheiss**) über die verallgemeinerte complexe Multiplication. Diese Untersuchungen beziehen sich sämmtlich, soweit sie auf die zu algebraischen Gleichungen gehörenden Thetas Anwendung finden, auf singuläre Flächen in dem Sinne, wie er in der vorstehenden Note verstanden ist.

Königsberg i. Pr., 5. Januar 1886.

---

*) Neuerdings habe ich gefunden, dass die Gleichungen $f(s^n, z) = 0$, welche offenbar die eindeutige Transformation $z' = z$, $s' = e^{\frac{2i\pi}{n}} \cdot s$ zulassen, alle überhaupt existirenden Riemann'schen Flächen definiren, die eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzen. Für $n = 2$ ergiebt dieses Resultat die Antwort auf die von Herrn Fuchs in den Berichten der Berliner Academie, Sitzung vom 22. Juli 1886, behandelte Frage; der dort entwickelte Satz, die betreffenden Riemann'schen Flächen seien nothwendig hyperelliptisch, kann hiernach nicht aufrecht erhalten werden. [Januar 1887.]

**) Kronecker, Monatsberichte der Berl. Acad. vom October 1866 (wieder abgedruckt in Crelle's Journal, Bd. 68). Weber, Annali di Matematica, Serie II. Bd. 9. pag. 126. Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 95. pag. 264. Wiltheiss, Bestimmung Abel'scher Functionen mit zwei Argumenten, bei denen complexe Multiplicationen stattfinden. Habilitationsschrift, Halle 1881. idem. Mathem. Annalen, Bd. 26. pag. 127.

Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique.

(Première note.)

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

Dans cette note je me propose d'obtenir tous les cas, où le produit de deux valeurs de y, satisfaisantes à l'équation différentielle

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

de la série hypergéométrique, se réduit à une fonction entière de x.

D'abord nous déduisons, d'après les régles connues, l'équation différentielle d'ordre troisième, à laquelle satisfait le produit

$$(2) \qquad z = y_1 y_2$$

de deux intégrales de l'équation (1).

En posant pour la brièveté

$$(3) \qquad p = x(1-x), \quad q = \gamma - (\alpha + \beta + 1)x, \quad r = -\alpha\beta$$

on trouve

$$z = y_1 y_2,$$

$$\frac{dz}{dx} = y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = y_1 \frac{d^2y_2}{dx^2} + y_2 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx},$$

$$p\frac{d^2z}{dx^2} = 2p\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} - q\frac{dz}{dx} - 2rz,$$

$$p\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{dp}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} = 2p\frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2} + 2p\frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dp}{dx}\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx}$$

$$- q\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx} + 2r\right)\frac{dz}{dx}$$

$$= 2\left(\frac{dp}{dx} - 2q\right)\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} - q\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx} + 4r\right)\frac{dz}{dx}$$

et enfin

$$(4)\quad p^2\frac{d^3z}{dx^3}+3pq\frac{d^2z}{dx^2}+\left(2q^2+p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}+4pr\right)\frac{dz}{dx}$$
$$+2r\left(2q-\frac{dp}{dx}\right)z=0.$$

En posant au lieu des p, q, r leurs expressions (3), nous obtenons

$$(4')\quad x^2(1-x)^2\frac{d^3z}{dx^3}+3x(1-x)(ax+b)\frac{d^2z}{dx^2}+(cx^2+dx+e)\frac{dz}{dx}$$
$$+(fx+g)z=0,$$

où

$$(5)\quad \begin{cases} a=-(\alpha+\beta+1),\\ b=\quad\gamma,\\ c=\quad 2\alpha^2+8\alpha\beta+2\beta^2+3\alpha+3\beta+1,\\ d=-2\gamma(2\alpha+2\beta+1)-4\alpha\beta,\\ e=\quad 2\gamma^2-\gamma,\\ f=\quad 4\alpha\beta(\alpha+\beta),\\ g=-2\alpha\beta(2\gamma-1).\end{cases}$$

Donc il reste de trouver tous les cas, où l'équation (4) admet la solution

$$z=\text{une fonction entière de } x.$$

Soit

$$(6)\quad z=L_0+L_1x+L_2x^2+\cdots+L_{n-1}x^{n-1}+L_nx^n,$$

où

$$L_0,\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{n-1},\ L_n,$$

sont des nombres constants et L_n n'est pas égal à zéro.

Alors la partie gauche de l'équation (4) se réduit à une fonction entière

$$(7)\quad P_0+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n+P_{n+1}x^{n+1}$$

du degré $n+1$ par rapport à x.

Ses coefficients se déterminent par les formules

$$(8)\quad \begin{cases} P_0=R_0L_0+S_0L_1,\\ P_1=Q_1L_0+R_1L_1+S_1L_2,\\ P_2=Q_2L_1+R_2L_2+S_2L_3,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_{m+1}=Q_{m+1}L_m+R_{m+1}L_{m+1}+S_{m+1}L_{m+2},\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_n\ =Q_nL_{n-1}+R_nL_n,\\ P_{n+1}=Q_{n+1}L_n,\end{cases}$$

où en général

$$(9)\quad \begin{cases} Q_{m+1} = m(m-1)(m-2) - 3am(m-1) + cm + f \\ \qquad\qquad = (m+2\alpha)(m+2\beta)(m+\alpha+\beta), \\ R_{m+1} = -2(m+1)\,m(m-1) + 3(a-b)(m+1)\,m \\ \qquad\qquad + d(m+1) + g, \\ S_{m+1} = (m+2)(m+1)\,m + 3b(m+2)(m+1) + e(m+2) \\ \qquad\qquad = (m+2)(m+\gamma+1)(m+2\gamma). \end{cases}$$

Tous les expressions

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n,\ P_{n+1}$$

à force de nos conditions doivent se réduire à zéro.

L'équation

$$P_{n+1} = 0$$

donne

$$n = -2\alpha \quad \text{ou} \quad -2\beta \quad \text{ou} \quad -(\alpha+\beta).$$

Quant aux autres équations

$$P_0 = 0,\ P_1 = 0,\ \cdots,\ P_n = 0$$

elles seront satisfaites pour un certain système de nombres

$$L_0,\ L_1,\ \ldots,\ L_{n-1},\ L_n,$$

entre lesquels se trouvent des nombres différents de zéro, si le déterminant

$$(10)\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} R_0, & S_0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ Q_1, & R_1, & S_1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & Q_2, & R_2, & S_2, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & Q_{n-1}, & R_{n-1}, & S_{n-1} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & Q_n, & R_n \end{vmatrix}$$

est égal à zèro.

De telle manière notre question est réduite à la résolution de l'équation

$$(11)\qquad \Delta_n = 0$$

à la condition

$$(12)\qquad n = -2\alpha, \quad \text{ou} \quad -2\beta, \quad \text{ou} \quad -(\alpha+\beta).$$

La résolution de l'équation mentionnée consiste dans les propositions suivantes.

Lemme 1.

Si n est pair, le déterminant Δ_n est égal à zéro

$$\text{pour} \quad \alpha = -\frac{n}{2} \quad \text{et pour} \quad \beta = -\frac{n}{2}.$$

Pour démontrer ce lemme il suffit de remarquer, que dans le cas, où un des nombres α et β est entier et négatif, à l'équation (1) satisfait une fonction entière de x et le carré de cette fonction satisfait à l'équation (4).

Lemme 2.

On peut poser dans l'équation (11) $\alpha+\beta+1-\gamma$ au lieu de γ.

Pour démontrer ce lemme il suffit de remarquer que la substitution de $\alpha+\beta+1-\gamma$ au lieu de γ correspond à celle de $1-x$ au lieu de x, dans l'équation différentielle.

Relation entre Δ_{m+1}, Δ_m, Δ_{m-1}:

$$\Delta_{m+1} = R_{m+1}\Delta_m - Q_{m+1} S_m \Delta_{m-1}. \tag{13}$$

Théorème I.

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_{2\varkappa} &= \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdots(\alpha+\varkappa)(\beta+\varkappa)\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right)\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\\
&\qquad\cdots\left(\gamma+\tfrac{2\varkappa-1}{2}\right)\Phi_{2\varkappa},\\
\Delta_{2\varkappa+1} &= \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdots(\alpha+\varkappa)(\beta+\varkappa)\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right)\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\\
&\qquad\cdots\left(\gamma+\tfrac{2\varkappa-1}{2}\right)\Phi_{2\varkappa+1},
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

où $\Phi_{2\varkappa}$ *et* $\Phi_{2\varkappa+1}$ *sont des fonctions entières de* α, β, γ. *Ces fonctions se réduisent à zéro:*

La première $\Phi_{2\varkappa}$ *pour*

$$\alpha+\beta = -\varkappa-s,$$
$$\gamma = -\frac{2\varkappa+1}{2},\quad -\frac{2\varkappa+3}{2},\ \ldots,\ -\frac{2\varkappa+2s-1}{2},\qquad (s=1,2,\cdots,\varkappa),$$

la seconde $\Phi_{2\varkappa+1}$ *pour*

$$\alpha+\beta = -\varkappa-s,$$
$$\gamma = -\frac{2\varkappa+1}{2},\quad -\frac{2\varkappa+3}{2},\ \ldots,\ -\frac{2\varkappa+2s-1}{2},\qquad (s=1,2,\cdots,\varkappa+1).$$

Démonstration.

Les calculs immédiats donnent

$$\Delta_0 = -2\alpha\beta(2\gamma-1),$$
$$\Delta_1 = 4\alpha\beta(2\gamma-1)\cdot(\gamma(2\alpha\beta+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta),$$

d'où il est facile de conclure, que notre théorème est juste dans le cas de $\varkappa=0$.

Admettant ensuite, qu'il a lieu dans le cas de $\varkappa=\varkappa'$, nous obtenons

$$\Delta_{2\varkappa'+2} = \alpha\cdot\beta(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+\varkappa')(\beta+\varkappa')\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right)\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\gamma+\frac{2\varkappa'-1}{2}\right)\left\{R_{2\varkappa'+2}\Phi_{2\varkappa'+1} - Q_{2\varkappa'+2}S_{2\varkappa'+1}\Phi_{2\varkappa'}\right\},$$

où

$$Q_{2\varkappa'+2} = (2\alpha+2\varkappa'+1)(2\beta+2\varkappa'+1)(\alpha+\beta+2\varkappa'+1).$$

L'expression

$$R_{2\varkappa'+2}\Phi_{2\varkappa'+1} - Q_{2\varkappa'+2}S_{2\varkappa'+1}\Phi_{2\varkappa'}$$

d'après le lemme (1) doit avoir le diviseur

$$(\alpha+\varkappa'+1)\cdot(\beta+\varkappa'+1).$$

Or d'après notre admission cette expression doit être égale à zéro dans tous les cas, où

$$\alpha+\beta = -\varkappa'-s,$$
$$\gamma = -\frac{2\varkappa'+1}{2},\quad -\frac{2\varkappa'+3}{2},\ \cdots,\ -\frac{2\varkappa'+2s-1}{2},\qquad (s=1,2,3,\cdots,\varkappa'+1).$$

Et dans le cas de $\alpha+\beta = -2\varkappa'-2$, d'après le lemme (2), le déterminant $\Delta_{2\varkappa'+2}$ doit se réduire à zéro pour

$$\gamma = -\frac{2\varkappa'+3}{2},\quad -\frac{2\varkappa'+5}{2},\ \cdots,\ -\frac{4\varkappa'+3}{2},$$

car ce déterminant est égal à zéro pour

$$\gamma = -\frac{2\varkappa'-1}{2},\quad -\frac{2\varkappa'-3}{2},\ \cdots,\ -\frac{1}{2},\quad +\frac{1}{2}.$$

Par conséquent dans ce cas l'équation

$$R_{2\varkappa'+2}\Phi_{2\varkappa'+1} - Q_{2\varkappa'+2}S_{2\varkappa'+1}\Phi_{2\varkappa'} = 0,$$

du degré $\varkappa'+2$ par rapport à γ, admet les $\varkappa'+1$ racines suivantes

$$\gamma = -\frac{2\varkappa'+3}{2},\quad -\frac{2\varkappa'+5}{2},\ \cdots,\ -\frac{4\varkappa'+3}{2}.$$

Il s'agit de trouver encore une racine de la même equation. Cette racine est égale à $-\frac{2\varkappa'+1}{2}$, car elle ne peut pas être changée, quand au lieu de γ on pose $-(2\varkappa'+1+\gamma)$.

Donc, γ étant égal à $-\frac{2\varkappa'+1}{2}$, la fonction

$$\Psi = R_{2\varkappa'+2}\Phi_{2\varkappa+1} - Q_{2\varkappa'+2}S_{2\varkappa'+1}\Phi_{2\varkappa'}$$

du degré $\varkappa'+2$ par rapport à α se réduit à zéro pour

$$\alpha = -\beta-\varkappa'-1,\quad -\beta-\varkappa'-2,\ \cdots,\ -\beta-2\varkappa'-2,\quad -\varkappa'-1.$$

Ce résultat montre, que notre expression Ψ pour $\gamma = -\frac{2\varkappa'+1}{2}$ est identiquement égale à zéro.

De là il est facile de conclure, que

$$\Delta_{2\varkappa'+2}=\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+\varkappa'+1)(\beta+\varkappa'+1)\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right)\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\gamma+\frac{2\varkappa'+1}{2}\right)\Phi_{2\varkappa'+2},$$

où le polynome $\Phi_{2\varkappa'+2}$ se réduit à zéro dans tous les cas, où

$$\alpha+\beta=-\varkappa'-1-s,$$
$$\gamma=-\frac{2\varkappa'+3}{2},\quad -\frac{2\varkappa'+5}{2},\cdots,-\frac{2(\varkappa'+1)+2s-1}{2},\quad (s=1,2,3,\cdots,\varkappa'+1).$$

En abordant l'expression $\Delta_{2\varkappa'+3}$, nous obtenons

$$\Delta_{2\varkappa'+3}=\alpha\cdot\beta(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+\varkappa'+1)(\beta+\varkappa'+1)\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right)\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\gamma+\frac{2\varkappa'+1}{2}\right)\Phi_{2\varkappa'+3}.$$

Le polynome

$$\Phi_{2\varkappa'+3}=R_{2\varkappa'+3}\,\Phi_{2\varkappa'+2}-8(\alpha+\beta+2\varkappa'+2)(2\varkappa'+3)(\gamma+2\varkappa'+2)\,\Phi_{2\varkappa'+1}$$

d'après ce qui précede doit être égal à zéro dans tous les cas, où

$$\alpha+\beta=-\varkappa'-1-s,$$
$$\gamma=-\frac{2\varkappa'+3}{2},\quad -\frac{2\varkappa'+5}{2},\cdots,-\frac{2(\varkappa'+1)+2s-1}{2},\quad (s=1,2,3,\cdots,\varkappa'+1).$$

Et dans le cas de $\alpha+\beta=-2\varkappa'-3$, d'après le lemme (2), le même polynome $\Phi_{2\varkappa'+3}$ doit être égal à zéro pour

$$\gamma=-\frac{2\varkappa'+3}{2},\quad -\frac{2\varkappa'+5}{2},\cdots,-\frac{4\varkappa'+5}{2}.$$

De cette manière nous nous persuadons, que notre théorème est juste pour $\varkappa=\varkappa'+1$, si ce théorème est juste pour $\varkappa=\varkappa'$. Or nous savons, qu'il a lieu pour $\varkappa=0$; par conséquent il doit avoir lieu pour

$$\varkappa=1,\,2,\,3,\,\cdots.$$

Théorème II.

Si

$$\alpha=-\frac{2\varkappa+1}{2},$$

l'équation

$$\Phi_{2\varkappa+1}=0$$

du degré $\varkappa+1$, *par rapport à* γ, *a les racines suivantes:*

$$\gamma=\beta,\quad \beta-1,\quad \beta-2,\cdots,\beta-\varkappa.$$

Démonstration.

Les formules (14) du théorème précedent montrent, que $\Delta_{2\varkappa+1}$ est égal à zéro pour

$$\gamma=\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{2},\cdots,-\frac{2\varkappa-1}{2}.$$

Par conséquent, si $\alpha = -\frac{2\varkappa+1}{2}$, ce déterminant doit se réduire à zéro aussi pour

$$\gamma = \beta - \varkappa,\ \beta - \varkappa + 1, \cdots, \beta - 1, \beta,$$

d'après le lemme (2).

Conclusion.

Le produit de deux intégrales de l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

de la série hypergéométrique est égal à une fonction entière de x dans les cas suivants et dans nuls autres cas:

a) *n est pair:*

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2}$,

3) $\alpha+\beta = -n,\quad \gamma = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}, \cdots, -\frac{2n-1}{2}$;

b) *n est impair:*

1) $\alpha = -\frac{n}{2},\quad \gamma = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}, \cdots,$
$-\frac{n-2}{2},\ \beta,\ \beta-1, \cdots, \beta-\frac{n-1}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2},\quad \gamma = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}, \cdots,$
$-\frac{n-2}{2},\ \alpha,\ \alpha-1, \cdots, \alpha-\frac{n-1}{2}$,

3) $\alpha+\beta = -n,\quad \gamma = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}, \cdots,$
$-\frac{n-2}{2},\ -\frac{n}{2}, \cdots, -\frac{2n-1}{2}$.

Addition.

Cas particulier: $\alpha + \beta = -n,\ \gamma = -n + \frac{1}{2}$.

Dans ce cas notre fonction entière z vérifie l'équation différentielle

$$x^2(1-x)z''' + 3x(\gamma - (\alpha+\beta+1)x)z''$$
$$+(2\gamma^2-\gamma-(1+3\alpha+3\beta+2\beta^2+8\alpha\beta+2\alpha^2)x)z'-4\alpha\beta(\alpha+\beta)z=0;$$

d'où, en posant

$$\alpha' = 2\alpha,\ \beta' = 2\beta,\ \delta' = \alpha+\beta,\ \gamma' = \gamma,\ \varepsilon' = 2\gamma - 1,$$

on trouve

$$z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\varepsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha'+1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta'+1}{\gamma' \cdot \gamma'+1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta'+1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon'+1} x^2 + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha' \cdot \alpha'+1 \cdots \alpha'+n-1}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta'+1 \cdots \beta'+n-1}{\gamma' \cdot \gamma'+1 \cdots \gamma'+n-1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta'+1 \cdots \delta'+n-1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon'+1 \cdots \varepsilon'+n-1} x^n.$$

On peut trouver pour z une expression semblable à la précédente, si

$$\alpha + \beta = -n \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

ou

$$\alpha + \beta = -n \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{-n+1}{2} \quad (n \text{ est pair});$$

car ces deux cas se réduisent par les substitutions connues au cas examiné.

Remarquons à propos, que dans une note*) sur la série hypergéométrique Clausen à donné la formule suivante

$$\left(1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha+1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta+1}{\gamma \cdot \gamma+1} x^2 + \cdots\right)^2$$

$$= 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\varepsilon'} x + \frac{\alpha'(\alpha'+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta'+1}{\gamma' \cdot \gamma'+1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta'+1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon'+1} x^2 + \cdots$$

où l'on a

$$\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \quad \alpha' = 2\alpha, \quad \beta' = 2\beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad \delta' = \alpha + \beta,$$
$$\varepsilon' = 2\gamma - 1$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2} = \frac{\delta'}{\varepsilon'} = \frac{\delta'+1}{\varepsilon'+2} = \frac{\delta'+2}{\varepsilon'+4} = \cdots.$$

Pour

$$\alpha + \beta = -n$$

la seconde partie de la formule de Clausen a les $n + 1$ termes premiers communs avec la fonction entière précédente.

St. Pétersbourg, September 1886.

*) Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. III.

Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

Fr. Brioschi in Mailand.

(Auszug eines Briefes an M. Krause in Rostock.)

Es mögen durch die Buchstaben c die ursprünglichen, C die transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente bezeichnet werden. Zwischen den zehn Grössen C, c bestehen dann für den Fall der Transformation dritten Grades fünf von einander unabhängige Gleichungen, welche aus den Gleichungen hergeleitet werden können, die sich § 41 pag. 193 Ihres Werkes befinden.

Ich schreibe gleich Ihnen:

$$\begin{aligned}
C_{34}\,.\,c_{34} + C_{03}\,.\,c_{03} + C_{23}\,.\,c_{23} &= C_5\,.\,c_5,\\
C_2\,.\,c_2 + C_4\,.\,c_4 + C_0\,.\,c_0 &= C_5\,.\,c_5,\\
C_4\,.\,c_4 + C_{14}\,.\,c_{14} + C_{34}\,.\,c_{34} &= C_5\,.\,c_5,\\
C_0\,.\,c_0 + C_{03}\,.\,c_{03} + C_{01}\,.\,c_{01} &= C_5\,.\,c_5,\\
C_{01}\,.\,c_{01} + C_{14}\,.\,c_{14} + C_{12}\,.\,c_{12} &= C_5\,.\,c_5,\\
C_2\,.\,c_2 + C_{12}\,.\,c_{12} + C_{23}\,.\,c_{23} &= C_5\,.\,c_5.
\end{aligned}$$

Diesen Relationen wird identisch Genüge geleistet, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
C_5\;c_5 &= \tfrac{1}{2}\,\varrho(g_0+g_1+g_2+g_3),\\
C_0\;c_0 &= \tfrac{1}{2}\,\varrho(g_0+g_1-g_2-g_3),\\
C_{12}\,c_{12} &= \tfrac{1}{2}\,\varrho(g_0-g_1+g_2-g_3),\\
C_{34}\,c_{34} &= \tfrac{1}{2}\,\varrho(g_0-g_1-g_2+g_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{23}\,.\,c_{23} &= \varrho(g_1-1), & C_{14}\,.\,c_{14} &= \varrho(g_1+1),\\
C_4\,.\,c_4 &= \varrho(g_2-1), & C_{03}\,.\,c_{03} &= \varrho(g_2+1),\\
C_{01}\,.\,c_{01} &= \varrho(g_3-1), & C_2\,.\,c_2 &= \varrho(g_3+1)
\end{aligned}$$

oder durch andere Ausdrücke ähnlicher Art.

Der Ursprung der Grössen g_0, g_1, g_2, g_3 ist der folgende. Sei:

$$\vartheta_5(v_1', v_2') = h_0 \cdot \vartheta_5^3 + \vartheta_5(h_1 \cdot \vartheta_0^2 + h_2 \cdot \vartheta_{12}^2 + h_3 \cdot \vartheta_{34}^2) + h_4 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{34}$$

die Transformationsgleichung und:

$$\begin{aligned}\vartheta_5^4 + \vartheta_0^4 + \vartheta_{12}^4 + \vartheta_{34}^4 &+ 2a(\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_0^2 + \vartheta_{12}^2 \, \vartheta_{34}) \\ &+ 2b(\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_0^2) \\ &+ 2c(\vartheta_5^2 \cdot \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 \cdot \vartheta_{12}^2) \\ &+ 4\varkappa \vartheta_5 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{34} = 0\end{aligned}$$

die entsprechende Göpel'sche biquadratische Gleichung, dann folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_0\left[a - g_1\sqrt{a^2-1}\right], \\ h_2 &= h_0\left[b - g_2\sqrt{b^2-1}\right], \\ h_3 &= h_0\left[c - g_3\sqrt{c^2-1}\right], \\ h_4 &= h_0\left[\varkappa - g_4\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}\right], \end{aligned}$$

$$g_0 = \frac{bc-a}{\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}}\, g_1 + \frac{ca-b}{\sqrt{(c^2-1)(a^2-1)}}\, g_2 + \frac{ab-c}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}\, g_3 + \varkappa g_4.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt dann, dass das Problem der Transformation dritter Ordnung sich auf die Untersuchung der Gleichungen reducirt, denen die Grössen g_0, g_1, g_2, g_3 Genüge leisten.

Diese Gleichungen erhält man aber aus den bekannten quadratischen oder biquadratischen Relationen, die zwischen den 10 Grössen C bestehen. Zunächst geben die beiden Gleichungen:

$$C_{23}^4 - C_{14}^4 = C_4^4 - C_{03}^4 = C_{01}^4 - C_2^4$$

zwischen g_1, g_2, g_3, die Relationen:

$$(1) \quad \frac{(g_1-1)^4}{c_{23}^4} - \frac{(g_1+1)^4}{c_{14}^4} = \frac{(g_2-1)^4}{c_4^4} - \frac{(g_2+1)^4}{c_{03}^4} = \frac{(g_3-1)^4}{c_{01}^4} - \frac{(g_3+1)^4}{c_2^4}.$$

Andrerseits bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon C_5^2 &= C_{23}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{01}^2 + C_{14}^2 \cdot C_{03}^2 \cdot C_2^2, \\ \varepsilon C_0^2 &= C_{14}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{01}^2 + C_{23}^2 \cdot C_{03}^2 \cdot C_2^2, \\ \varepsilon C_{12}^2 &= C_{14}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 + C_{23}^2 \cdot C_{03}^2 \cdot C_{01}^2, \\ \varepsilon C_{34}^2 &= C_{23}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 + C_{14}^2 \cdot C_{03}^2 \cdot C_{01}^2, \\ \varepsilon &= C_{23}^4 - C_{14}^4. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die linken Seiten Functionen von g_0, g_1, g_2, g_3, die rechten Functionen von g_1, g_2, g_3. In Folge dessen kann man g_0 als Function von g_1, g_2, g_3 ausdrücken.

Dann ergeben die beiden oberen Gleichungen (1) und eine beliebige der zuletzt angeführten die gesuchten Werthe von g_1, g_2, g_3, werden also die neuen Modulargleichungen sein.

Setzt man einen jeden der oberen Ausdrücke (1) gleich einer unbestimmten Grösse t, so ergeben sich drei Gleichungen 4^{ten} Grades, um g_1, g_2, g_3 als Functionen von t zu bestimmen.

Setzt man dann schliesslich diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so erhält man die Modulargleichung.

November 1886.

Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

M. Krause in Rostock.

(Auszug eines Briefes an Herrn Fr. Brioschi in Mailand).

Die so ungemein einfache und elegante Darstellung, welche Sie von der Transformation dritten Grades geben, hat mich zu den Untersuchungen zurückgeführt, die ich vor einigen Jahren über denselben Gegenstand angestellt habe. Vielleicht dürften einige der hierbei gefundenen Resultate von allgemeinerem Interesse sein. In den Formeln, die Sie aufstellen, finden sich zwei Grössen ϱ und h_0, die nicht bestimmt worden sind, da sie für die Transformation der hyperelliptischen Functionen und für die Theorie der Modulargleichungen ohne Bedeutung sind. Anders gestaltet sich die Sache für die Transformation der Thetafunctionen und für die Theorie der Multiplicatorgleichungen. Hier sind gerade diese Grössen von besonderem Interesse. Es ist nun nicht schwer, ihre Bestimmung so weit als angänglich auf Grund der Relationen wirklich durchzuführen, die sich auf pag. 174 meines Buches über die Transformation der hyperelliptischen Functionen finden. Diese Relationen folgen nicht aus den von Ihnen zu Grunde gelegten, da sie keine Modular- sondern Multiplicatorbeziehungen sind. Der Einfachheit halber beschränke ich mich zunächst auf einen der von mir stets gebrauchten Repräsentanten, etwa auf den, für welchen wird:

$$v_1' = nv_1, \quad v_2' = nv_2, \quad \tau_{11}' = n\tau_{11}, \quad \tau_{12}' = n\tau_{12}, \quad \tau_{22}' = n\tau_{22}.$$

Dann kann man setzen:

$$\begin{aligned}\vartheta_5((nv)) = {} & H_0\,\vartheta_5((v', \tau'))^3 \\ & + (H_1 . \vartheta_0((v', \tau'))^2 + H_2 . \vartheta_{12}((v', \tau'))^2 + H_3 . \vartheta_{34}((v', \tau'))^2)\,\vartheta_5((v', \tau')) \\ & + H_4 . \vartheta_0((v', \tau')) . \vartheta_{12}((v', \tau')) . \vartheta_{34}((v', \tau')).\end{aligned}$$

Wendet man Ihre Bezeichnungsweise an, so ergeben sich für die vier ersten Coefficienten die Ausdrücke:

$$(C_{14}^4 - C_{23}^4) H_0 = 2\varrho,$$
$$(g_1^2-1) \quad H_1 = H_0 \left[-(3g_1^2+1)\, a + (g_1^3 + 3g_1)\sqrt{a^2-1}\right],$$
$$(g_2^2-1) \quad H_2 = H_0 \left[-(3g_2^2+1)\, b + (g_2^3 + 3g_2)\sqrt{b^2-1}\right],$$
$$(g_3^2-1) \quad H_3 = H_0 \left[-(3g_3^2+1)\, c + (g_3^3 + 3g_3)\sqrt{c^2-1}\right],$$

Nun bestehen aber die Beziehungen:

$$h_2 \,.\, c_{23}^2 + h_3 \,.\, c_{14}^2 = 3\,(H_2 \,.\, C_{14}^2 + H_3 \,.\, C_{23}^2)\, \frac{C_{01} \,.\, C_2 \,.\, C_4 \,.\, C_{03}}{c_{01} \,.\, c_2 \,.\, c_4 \,.\, c_{03}},$$
$$h_2 \,.\, c_{14}^2 + h_3 \,.\, c_{23}^2 = 3\,(H_2 \,.\, C_{23}^2 + H_3 \,.\, C_{14}^2)\, \frac{C_{01} \,.\, C_2 \,.\, C_4 \,.\, C_{03}}{c_{01} \,.\, c_2 \,.\, c_4 \,.\, c_{03}},$$

oder auch:

$$h_2\,(C_{14}^2 \,.\, c_{23}^2 - C_{23}^2 \,.\, c_{14}^2) + h_3\,(C_{14}^2 \,.\, c_{14}^2 - C_{23}^2 \,.\, c_{23}^2)$$
$$= 3\,H_2\,(C_{14}^4 - C_{23}^4)\, \frac{C_{01} \,.\, C_2 \,.\, C_4 \,.\, C_{03}}{c_{01} \,.\, c_2 \,.\, c_4 \,.\, c_{03}},$$
$$h_2\,(C_{23}^2 \,.\, c_{23}^2 - C_{14}^2 \,.\, c_{14}^2) + h_3\,(C_{23}^2 \,.\, c_{14}^2 - C_{14}^2 \,.\, c_{23}^2)$$
$$= 3\,H_3\,(C_{23}^4 - C_{14}^4)\, \frac{C_{01} \,.\, C_2 \,.\, C_4 \,.\, C_{03}}{c_{01} \,.\, c_2 \,.\, c_4 \,.\, c_{03}},$$

und vier ähnliche, von deren Aufstellung indessen abgesehen werden möge.

Aus diesen Formeln ergeben sich dann für ϱ^2 u. a. die Bestimmungsgleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned}
&\frac{6\varrho^2}{c_{23}^4 - c_{14}^4} \sqrt{b^2-1}\,\sqrt{c^2-1}\,(g_3^2-1)\left[-(3g_2^2+1)b + (g_2^3+3g_2)\sqrt{b^2-1}\right] \\
&= \left(b - g_2\sqrt{b^2-1}\right)\left(2g_1 a - (g_1^2+1)\sqrt{a^2-1}\right) - 2g_1\left(c - g_3\sqrt{c^2-1}\right), \\
&\frac{6\varrho^2}{c_{23}^4 - c_{14}^4} \sqrt{b^2-1}\,\sqrt{c^2-1}\,(g_2^2-1)\left[-(3g_3^2+1)c + (g_3^3+3g_3)\sqrt{c^2-1}\right] \\
&= \left(c - g_3\sqrt{c^2-1}\right)\left(2g_1 a - (g_1^2+1)\sqrt{a^2-1}\right) - 2g_1\left(b - g_2\sqrt{b^2-1}\right),
\end{aligned}$$

oder also es lassen sich die Grössen:

$$\frac{\varrho^2}{c_{23}^4 - c_{14}^4} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\varrho^2}{c_5^4} \quad \text{und} \quad h_0^2\,(c_{23}^4 - c_{14}^4) \quad \text{oder auch} \quad h_0^2\, c_5^4$$

rational durch die von Ihnen eingeführten Grössen g_1, g_2, g_3 und die ursprünglichen Moduln ausdrücken.

Damit ist aber auch das Problem der Transformation der Thetafunctionen und das der Multiplicatorgleichungen auf das von Ihnen behandelte zurückgeführt. Die erste Behauptung ist unmittelbar klar, zweitens aber können die Wurzeln der Multiplicatorgleichung gleich den Grössen:

$$(-1)^{\frac{a_0-1}{2}+\frac{b_1-1}{2}} \cdot a_0 b_1 \cdot \frac{C_5^2}{c_5^2}$$

gesetzt werden und diese drücken sich rational durch g_0, g_1, g_2, g_3 und die ursprünglichen Moduln aus (cf. pag. 198 des c. Werkes).

Noch ein zweiter Punkt möge hervorgehoben werden.

Während Sie die Transformation dritten Grades auf die Untersuchung der *vier* Hülfsgrössen g_0, g_1, g_2, g_3 reduciren, stütze ich sie auf die Untersuchung von *drei* Grössen, etwa:

$$\frac{C_0}{C_5}, \quad \frac{C_{12}}{C_5}, \quad \frac{C_{34}}{C_5}.$$

Zwischen diesen Grössen habe ich dann eine Reihe von Modulargleichungen auf Grund der Transformation zweiten Grades gefunden. Es ist nun leicht zu zeigen, wie eine einfache Modification Ihres Verfahrens unmittelbar zur Aufstellung von Modulargleichungen der zuletzt definirten Art führt.

Ich schreibe dazu:

$$\begin{aligned}
C_5 \cdot c_5 &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2+\mathfrak{g}_3),\\
C_0 \cdot c_0 &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1-\mathfrak{g}_2-\mathfrak{g}_3),\\
C_{12} \cdot c_{12} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_0-\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2-\mathfrak{g}_3),\\
C_{34} \cdot c_{34} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_0-\mathfrak{g}_1-\mathfrak{g}_2+\mathfrak{g}_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{23} \cdot c_{23} &= \mathfrak{g}_1 - \varrho, & C_{14} \cdot c_{14} &= \mathfrak{g}_1 + \varrho,\\
C_4 \cdot c_4 &= \mathfrak{g}_2 - \varrho, & C_{03} \cdot c_{03} &= \mathfrak{g}_2 + \varrho,\\
C_{01} \cdot c_{01} &= \mathfrak{g}_3 - \varrho, & C_2 \cdot c_2 &= \mathfrak{g}_3 + \varrho.
\end{aligned}$$

Es sind dann auch umgekehrt die Grössen $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ durch die Grössen $C_\alpha c_\alpha$ ausdrückbar und zwar erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_0 &= \tfrac{1}{2}(C_5 \cdot c_5 + C_0 \cdot c_0 + C_{12} \cdot c_{12} + C_{34} \cdot c_{34}),\\
\mathfrak{g}_1 &= \tfrac{1}{2}(C_5 \cdot c_5 + C_0 \cdot c_0 - C_{12} \cdot c_{12} - C_{34} \cdot c_{34}),\\
\mathfrak{g}_2 &= \tfrac{1}{2}(C_5 \cdot c_5 - C_0 \cdot c_0 + C_{12} \cdot c_{12} - C_{34} \cdot c_{34}),\\
\mathfrak{g}_3 &= \tfrac{1}{2}(C_5 \cdot c_5 - C_0 \cdot c_0 - C_{12} \cdot c_{12} + C_{34} \cdot c_{34}).
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun die Thetarelationen:

$$\begin{aligned}
C_{23}^2 \cdot C_{14}^2 &= C_5^2 \cdot C_0^2 - C_{12}^2 \cdot C_{34}^2,\\
C_4^2 \cdot C_{03}^2 &= C_5^2 \cdot C_{12}^2 - C_{34}^2 \cdot C_0^2,\\
C_{01}^2 \cdot C_2^2 &= C_5^2 \cdot C_{34}^2 - C_0^2 \cdot C_{12}^2,
\end{aligned}$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\mathfrak{g}_1^4 - 2\mathfrak{g}_1^2\varrho^2 + \varrho^4 = (C_5^2 \cdot C_0^2 - C_{12}^2 \cdot C_{34}^2)(c_5^2 \cdot c_0^2 - c_{12}^2 \cdot c_{34}^2) = x_{23}^2 \cdot x_{14}^2,$$
$$\mathfrak{g}_2^4 - 2\mathfrak{g}_2^2\varrho^2 + \varrho^4 = (C_5^2 \cdot C_{12}^2 - C_{34}^2 \cdot C_0^2)(c_5^2 \cdot c_{12}^2 - c_{34}^2 \cdot c_0^2) = x_4^2 \cdot x_{03}^2,$$
$$\mathfrak{g}_3^4 - 2\mathfrak{g}_3^2\varrho^2 + \varrho^4 = (C_5^2 \cdot C_{34}^2 - C_0^2 \cdot C_{12}^2)(c_5^2 \cdot c_{34}^2 - c_0^2 \cdot c_{12}^2) = x_1^{02} \cdot x_2^2,$$
$$x_\alpha = C_\alpha \cdot c_\alpha .$$

Hieraus folgen die Beziehungen:

$$2\varrho^2 = \mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 - \frac{(x_{23}^2 \cdot x_{14}^2 - x_4^2 \cdot x_{03}^2)}{\mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2} = \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 - \frac{(x_4^2 x_{03}^2 - x_{01}^2 \cdot x_2^2)}{\mathfrak{g}_2^2 - \mathfrak{g}_3^2}$$
$$= \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_1^2 - \frac{(x_{01}^2 \cdot x_2^2 - x_{23}^2 \cdot x_{14}^2)}{\mathfrak{g}_3^2 - \mathfrak{g}_1^2},$$

$$\varrho^4 = \mathfrak{g}_1^2\mathfrak{g}_2^2 - \frac{(x_{23}^2 \cdot x_{14}^2 \cdot \mathfrak{g}_2^2 - x_{03}^2 \cdot x_4^2 \cdot \mathfrak{g}_1^2)}{\mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2} = \mathfrak{g}_2^2\mathfrak{g}_3^2 - \frac{(x_4^2 \cdot x_{03}^2 \cdot \mathfrak{g}_3^2 - x_{01}^2 \cdot x_2^2 \cdot \mathfrak{g}_2^2)}{\mathfrak{g}_2^2 - \mathfrak{g}_3^2}$$
$$= \mathfrak{g}_3^2\mathfrak{g}_1^2 - \frac{(x_{01}^2 \cdot x_2^2 \cdot \mathfrak{g}_1^2 - x_{23}^2 \cdot x_{14}^2 \cdot \mathfrak{g}_3^2)}{\mathfrak{g}_3^2 - \mathfrak{g}_1^2}.$$

Hieraus folgen die Modulargleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} & x_{23}^2 \cdot x_{14}^2(\mathfrak{g}_2^2 - \mathfrak{g}_3^2) + x_4^2 \cdot x_{03}^2(\mathfrak{g}_3^2 - \mathfrak{g}_1^2) + x_{01}^2 \cdot x_2^2(\mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2) \\ & \quad + (\mathfrak{g}_2^2 - \mathfrak{g}_3^2)(\mathfrak{g}_3^2 - \mathfrak{g}_1^2)(\mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2) = 0, \\ & [(\mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2)^2 - (x_{23}^2 \cdot x_{14}^2 + x_4^2 \cdot x_{03}^2)]^2 - 4x_{23}^2 \cdot x_{14}^2 \cdot x_4^2 \cdot x_{03}^2 = 0. \end{aligned}$$

Dieselben sind von ähnlicher Form wie die auf Seite 196 meines Werkes befindlichen.

In ähnlicher Weise können die übrigen Thetarelationen zur Aufstellung von Modulargleichungen benützt werden.

Rostock im December 1886.